Στατιστική 1
(συνοπτικές σημειώσεις)

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2019

Επιμέλεια: Panos Andreou

Η ύλη χωρίζεται σε τέσσερα βασικά μέρη: Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (Ε.Ο.Κ.), Εκτιμητική, Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Έλεγχοι Υποθέσεων. Για καθένα από αυτά, συνοψίζουμε βασικούς ορισμούς και προτάσεις, παραθέτουμε ορισμένες υποσημειώσεις-παρατηρήσεις και δίνουμε λίγα παραδείγματα, όπου κρίνεται χρήσιμο.

"There are three kinds of lies : lies, damned lies and Statistics "

Mark Twain

Περιεχόμενα

1 Ε.Ο.Κ. **4**

2 Εκτιμητική **6**
2.1 Γενικά 6
2.2 Αμεροληψία 7
2.3 Επάρκεια 7
2.4 Πληρότητα 9
2.5 Αμερόληπτες Εκτιμήτριες Ελάχιστης Διασποράς 10
2.6 Μέθοδοι υπολογισμού εκτιμητριών 14

3 Διαστήματα Εμπιστοσύνης **18**
3.1 Εισαγωγικά στοιχεία 18
3.2 Γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης . 19
3.3 Διαστήματα Εμπιστοσύνης για κανονικούς πληθυσμούς . . 21
3.4 Ασυμπτωτικά διαστήματα εμπιστοσύνης 23

4 Έλεγχοι Υποθέσεων **24**
4.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί 24
4.2 Ελεγχοσυνάρτηση 25
4.3 Έλεγχοι απλών και μονόπλευρων υποθέσεων 27
4.4 Έλεγχοι με χρήση γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών . . 34

Κεφάλαιο 1

Ε.Ο.Κ.

Βασικός στόχος στη Στατιστική 1 είναι να βρούμε τρόπους για να μπορούμε να εκτιμούμε άγνωστες παραμέτρους κατανομών. Στην κλασική Στατιστική κάθε άγνωστη παράμετρος θεωρείται σταθερά.
Υπάρχει μία κλάση (οικογένεια) κατανομών, τα στοιχεία (κατανομές) της οποίας χαρακτηρίζονται από ιδιότητες που μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε εύκολα διάφορες προτάσεις και θεωρήματα για αυτά, η λεγόμενη Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (Ε.Ο.Κ.).

Ορισμός 1. Μία κατανομή άγνωστης παραμέτρου ϑ ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x;\vartheta) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(x;\vartheta) = h(x) \cdot exp\{Q(\vartheta)T(x) - A(\vartheta)\}, \quad x \in S, \;\; \vartheta \in \Theta.$$

Λέμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή αν ο συντελεστής του $T(x)$ είναι ϑ.

Ορισμός 2. Μία κατανομή άγνωστων παραμέτρων $\underline{\vartheta}$ (διάνυσμα με περισσότερες από μία άγνωστες παραμέτρους) ανήκει στην πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x;\underline{\vartheta}) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{\vartheta}$ και

$$f(x;\underline{\vartheta}) = h(x) \cdot exp\{Q(\underline{\vartheta})T(x) - A(\underline{\vartheta})\}, \quad x \in S, \;\; \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Λέμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή αν ο συντελεστής του $T(x)$ είναι $\underline{\vartheta}$.

Ορισμός 3. Μία κατανομή ανήκει στην πολυδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R} : f(\underline{x};\underline{\vartheta}) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{\vartheta}$ και $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x}) \cdot exp\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})\}$.

Σημείωση 1. Ορισμένες γνωστές κατανομές που ανήκουν στην Ε.Ο.Κ. είναι οι $Bernoulli(p), Bin(n,p), Geom(p), Poisson(\vartheta), Exp(\vartheta), Gamma(\vartheta_1, \vartheta_2), N(\mu, \sigma^2)$, ενώ η ομοιόμορφη $U(\vartheta_1, \vartheta_2)$ δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ. αφού το στήριγμά της $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ εξαρτάται από το $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Πρόταση 1. (για τη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ.)
Αν $f(x;\vartheta) = h(x)exp\{\vartheta T(x) - A(\vartheta)\}$ σε κανονική μορφή, τότε

$$E[T(X)] = A'(\vartheta), \quad Var[T(X)] = A''(\vartheta)$$

και $M_T(u) = exp\{A(\vartheta + u) - A(\vartheta)\}$, όπου M_T η ροπογεννήτρια της $T(X)$.

Πρόταση 2. (για την πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ.)
Αν $f(x;\underline{\vartheta}) = h(x)exp\{\underline{\vartheta} \cdot \underline{T}(x) - A(\underline{\vartheta})\}$ σε κανονική μορφή (η πράξη $\underline{\vartheta} \cdot \underline{T}(x)$ είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων), τότε για $i, j = 1, ..., k$ (όπου k το πλήθος των άγνωστων παραμέτρων) ισχύει:

$$E[T_i(X)] = \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i}, \quad Var[T_i(X)] = \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_i^2}, \quad Cov[T_i(X), T_j(X)] = \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$$

και $M_{\underline{T}}(\underline{u}) = exp(A(\underline{u} + \underline{\vartheta}) - A(\underline{\vartheta}))$.

Κεφάλαιο 2

Εκτιμητική

2.1 Γενικά

Ορισμός 4. Λέμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, ..., X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n αν οι X_i, $i = 1, ..., n$, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες (ανήκουν δηλαδή στην ίδια κατανομή).

Στις Πιθανότητες μάς δινόταν κάποια κατανομή (γνωρίζαμε δηλαδή τη σ.κ. ή σ.π. ή σ.π.π. της) και εμείς υπολογίζαμε διάφορα στοιχεία για αυτήν (μέση τιμή, διασπορά κλπ). Στη Στατιστική έχουμε ορισμένες παρατηρήσεις και προσπαθούμε εμείς να εκτιμήσουμε από ποια κατανομή προέρχονται. Είναι σαφές, λοιπόν, ότι οποιαδήποτε προσπάθεια εκτίμησης θα στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στο δείγμα που έχουμε.

Ορισμός 5. Κάθε συνάρτηση $T = T(\underline{X})$ του τυχαίου δείγματος $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ ονομάζεται στατιστική συνάρτηση.

Έχουμε αναπτύξει διάφορα κριτήρια για να κρίνουμε αν μία εκτιμήτρια (στατιστική συνάρτηση) είναι "καλή" ή όχι, μερικά από τα οποία είναι η αμεροληψία, η επάρκεια και η πληρότητα.

2.2 Αμεροληψία

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n$ από κατανομή άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta} \in \Theta$ (για συντομία, κάποιες φορές θα αναγράφεται απλώς ως ϑ, όταν δε βλάπτεται η γενικότητα).

Ορισμός 6. Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται αμερόληπτη εκτιμήτρια (α.ε.) για το $\underline{\vartheta}$ αν $E_{\underline{\vartheta}}(\underline{T}) = \vartheta \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Η συνάρτηση

$$b_{\underline{T}}(\underline{\vartheta}) = E_{\underline{\vartheta}}(\underline{T}) - g(\underline{\vartheta})$$

ονομάζεται μεροληψία της T ως προς $g(\underline{\vartheta})$.

Ορισμός 7. Ορίζουμε ως μέσο τετραγωνικό σφάλμα (ΜΤΣ) της στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X})$ ως προς $g(\vartheta)$ την ποσότητα

$$MSE_{g(\vartheta)}(T) = E_{\vartheta}[(T(\underline{X}) - g(\vartheta))^2], \quad \vartheta \in \Theta.$$

Πρόταση 3. Μία εύχρηστη μορφή του ΜΤΣ είναι η εξής:

$$MSE(T) = Var_{\vartheta}(T(\underline{X})) + b_T^2(\vartheta).$$

2.3 Επάρκεια

Ορισμός 8. Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται επαρκής για την παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν η δεσμευμένη κατανομή $f_{\underline{X}|\underline{T}}(\underline{x} \mid \underline{t})$ του $\underline{X}$ δεδομένου ότι $\underline{T} = \underline{t}$ είναι ανεξάρτητη του $\underline{\vartheta}$.

Ο ορισμός της επάρκειας στην πράξη δεν είναι τόσο εύχρηστος. Για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση είναι επαρκής για μία άγνωστη παράμετρο, χρησιμοποιούμε συχνά το ακόλουθο κριτήριο:

Πρόταση 4. (Παραγοντικό Κριτήριο Neyman - Fisher)
Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν, και μόνο αν,

$$\forall \underline{\vartheta} \in \Theta \quad f_{\underline{X}}(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\vartheta}) \cdot h(\underline{x}),$$

για κάποιες συναρτήσεις g, h.

Πόρισμα 1. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και $\underline{T} = \psi(\underline{T}_1)$, τότε και η $\underline{T}_1$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. Επίσης, αν $\underline{\vartheta} = \underline{G}(\underline{\eta})$ και η $\underline{T}$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$, τότε η $\underline{T}$ είναι επαρκής και για το $\underline{\eta}$.

Πρόταση 5. (Επάρκεια στην Ε.Ο.Κ.) Έστω

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x})exp\Big[\sum_{k=1}^{s} Q_k(\underline{\vartheta})T_k(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})\Big], \quad \underline{x} = (x_1, ..., x_n), \underline{\vartheta} = (\vartheta_1, ..., \vartheta_s) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$$

(δηλαδή η κατανομή ανήκει στην πολυδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ.). Τότε, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (T_1(\underline{X}), ..., T_n(\underline{X}))$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Σημείωση 2. Για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση είναι επαρκής έχουμε, κυρίως, τρεις τρόπους: είτε με τον ορισμό είτε με το παραγοντικό κριτήριο (το πιο σύνηθες) είτε μέσω της Ε.Ο.Κ. (συνήθως συνδυάζεται με πληρότητα, όπως αναφέρουμε παρακάτω). Ενδεικτικά, αναφέρουμε επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις για ορισμένες βασικές κατανομές (σχεδόν αποκλειστικά με χρήση του παραγοντικού κριτηρίου): Έστω $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από:

• Bernoulli(ϑ). Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

• Poisson(ϑ). Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

• Geom(ϑ). Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

• Exp(ϑ). Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

• N(ϑ_1, σ^2), σ^2 γνωστό και $\Theta = \mathbb{R}$. Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ_1 είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

• N(μ, ϑ_2), μ γνωστό, $\Theta = (0, \infty)$. Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ_2 είναι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$.

• N(ϑ_1, ϑ_2), $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Τότε, επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ είναι η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$.

2.4 Πληρότητα

Ορισμός 9. Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται πλήρης για την παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν για κάθε συνάρτηση φ με $E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$, ισχύει ότι $\varphi(\underline{T}) = 0$ με πιθανότητα 1 (πρακτικά, $\varphi \equiv 0$).

Θα δούμε τώρα ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που παίρνουμε αν μία κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ. (μία από τις πολλές ιδιότητες που είπαμε στην αρχή ότι μας δίνει η Ε.Ο.Κ.):

Θεώρημα 1. (Επάρκειας - Πληρότητας στην Ε.Ο.Κ.)
Έστω $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x})exp[\sum\limits_{k=1}^{s} Q_k(\underline{\vartheta})T_k(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})]$, $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, ..., \vartheta_s) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$, και το σύνολο $\{(Q_1(\underline{\vartheta}), ..., Q_s(\underline{\vartheta})) : \underline{\vartheta} \in \Theta\} \subseteq \mathbb{R}^s$ περιέχει ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$. Τότε, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (T_1(\underline{X}), ..., T_n(\underline{X}))$ είναι επαρκής και πλήρης για το $\underline{\vartheta}$.

Σημείωση 3. Για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση T είναι πλήρης για μία παράμετρο, έχουμε κυρίως 2 τρόπους: είτε θα δουλέψουμε με τον ορισμό είτε με το προηγούμενο Θεώρημα. Στην πρώτη περίπτωση (π.χ. στην ομοιόμορφη κατανομή, που δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ.), πρέπει να βρούμε την κατανομή της $\underline{T}$, ώστε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)]$. Παίρνουμε τη συνθήκη

$$E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta \Leftrightarrow \int_S \varphi(t) f_T(t;\underline{\vartheta})dt = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$$

(αντίστοιχα με άθροισμα στη διακριτή περίπτωση) και έχουμε στο μυαλό μας δύο πράγματα που μπορεί να χρειαστούν για να δείξουμε ότι $\varphi \equiv 0$:
• (για συνεχείς τ.μ., όπου εμφανίζεται ολοκλήρωμα στη μέση τιμή): Ο μετασχηματισμός Laplace είναι $1-1$ σε κλάσεις σχεδόν παντού ίσων συναρτήσεων (το σύνολο των σημείων στα οποία δεν είναι ίσες είναι μέτρου 0), οπότε ισότητα της μορφής $\int_0^\infty \psi(t)e^{-\vartheta t}dt = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$ δίνει απευθείας ότι $\psi \equiv 0$.
• Αν το στήριγμα της κατανομής εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ (π.χ. στην ομοιόμορφη $U(0,\vartheta)$), τότε στο ολοκλήρωμα εμφανίζεται η παράμετρος στα όρια ολοκλήρωσης, οπότε παραγωγίζουμε ως προς ϑ και παίρνουμε εύκολα το ζητούμενο, π.χ. αν $\int_0^\vartheta t^{n-1}\varphi(t)dt = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$ (η

σχέση αυτή εμφανίζεται στην ομοιόμορφη $U(0, \vartheta)$), τότε παραγωγίζουμε ως προς ϑ και παίρνουμε ότι $\vartheta^{n-1}\varphi(\vartheta) = 0 \ \forall\vartheta \in \Theta \Rightarrow \varphi(\vartheta) = 0 \ \forall\vartheta \in \Theta$, όπως θέλαμε.

Θεώρημα 2. (Basu)
Έστω κατανομή άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$, $\underline{T}$ επαρκής και πλήρης για το $\underline{\vartheta}$ και $\underline{S}$ στατιστική συνάρτηση με κατανομή ανεξάρτητη του $\underline{\vartheta}$. Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές $\underline{T}$ και $\underline{S}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σημείωση 4. Το θεώρημα Basu είναι πολύ σημαντικό στη Στατιστική. Μία κλασική εφαρμογή του είναι ότι στην κανονική κατανομή $N(\vartheta, \sigma^2)$ οι $\overline{X}$ και S^2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

2.5 Αμερόληπτες Εκτιμήτριες Ελάχιστης Διασποράς

Αν τώρα έχουμε δύο ή περισσότερες αμερόληπτες εκτιμήτριες για μία άγνωστη παράμετρο, θέλουμε να αναπτύξουμε κριτήρια για να διαλέξουμε την "καλύτερη".

Ορισμός 10. Η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underline{X})$ καλείται αμερόληπτη εκτιμήτρια ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς (Α.Ο.Ε.Δ.) της παραμέτρου $g(\vartheta)$ αν $E_{\underline{\vartheta}}(T(\underline{X})) = g(\underline{\vartheta}) \ \forall\vartheta \in \Theta$ (δηλαδή η T είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\underline{\vartheta})$), $E_{\underline{\vartheta}}(T^2(\underline{X})) < \infty$ και αν $\delta(\underline{X})$ αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\underline{\vartheta})$, τότε $Var_{\underline{\vartheta}}(T) \leq Var_{\underline{\vartheta}}(\delta) \ \forall\vartheta \in \Theta$.

Σημείωση 5. Γιατί να θέσουμε ως κριτήριο καλής αμερόληπτης εκτιμήτριας το να έχει τη μικρότερη διασπορά;
Διαισθητικά, αν έχουμε μία παράμετρο $g(\underline{\vartheta})$, τότε μεταξύ των αμερολήπτων εκτιμητριών του $g(\underline{\vartheta})$ προτιμούμε μία $T = T(\underline{X})$ για την οποία ισχύει $P_{\underline{\vartheta}}(|T - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon) \simeq 1 \ \forall\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα Chebyshev, έχουμε ότι $P_{\underline{\vartheta}}(|T - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{Var_{\underline{\vartheta}}(T)}{\varepsilon^2}$, άρα θέλουμε πράγματι να ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά.

Πρόταση 6. (Χαρακτηρισμός Α.Ο.Ε.Δ. μέσω αμερόληπτων εκτιμητριών του μηδενός):
Έστω $U_0 = \{U = U(\underline{X}) : E_{\vartheta}U = 0, \ E_{\vartheta}U^2 < \infty \ \forall\vartheta \in \Theta\}$ η κλάση των

αμερολήπτων εκτιμητριών του 0. Έστω δ μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\vartheta)$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή

$$E_\vartheta \delta(\underline{X}) = g(\vartheta), \;\; Var_\vartheta \delta(\underline{X}) < \infty \;\; \forall \vartheta \in \Theta.$$

Τότε, η δ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για το $g(\vartheta)$ αν, και μόνο αν

$$Cov_\vartheta(\delta, U) = 0 \;\; \forall \vartheta \in \Theta \;\; \forall U \in U_0.$$

Πόρισμα 2. Αν οι $T_1, ..., T_n$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. των $g_1(\vartheta), ..., g_n(\vartheta)$, αντίστοιχα, τότε η στατιστική συνάρτηση $T = \sum_{i=1}^n c_i T_i$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. της παραμέτρου $g(\vartheta) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i g_i(\vartheta)$.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δούμε πώς υπολογίζουμε Α.Ο.Ε.Δ., χρησιμοποιώντας δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα και ένα πολύ χρήσιμο πόρισμα (το οποίο χρησιμοποιούμε κατά κόρον στην πράξη).

Θεώρημα 3. (Rao - Blackwell)
Έστω $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x; \underline{\vartheta})$, $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$. Έστω δ μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] = g(\underline{\vartheta})$ και $Var_{\underline{\vartheta}} \delta(\underline{X}) < \infty \;\; \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Έστω, επίσης, $\underline{T} = (T_1, ..., T_k)'$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$. Ορίζουμε $\delta^* = E(\delta \mid \underline{T})$. Τότε, η δ^* είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\underline{\vartheta})$, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] = g(\underline{\vartheta}) \;\; \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, και $Var_{\underline{\vartheta}}(\delta^*) \leq Var_{\underline{\vartheta}}(\delta) \;\; \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Θεώρημα 4. (Lehmann - Scheffé)
Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rao - Blackwell και επιπλέον η T είναι και πλήρης για το $\underline{\vartheta}$, τότε η δ^* είναι η μοναδική Α.Ο.Ε.Δ. του $g(\underline{\vartheta})$.

Πόρισμα 3. Αν η $T = T(\underline{X})$ είναι επαρκής και πλήρης για το $\underline{\vartheta}$ και η $\delta(T)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\underline{\vartheta})$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(T)$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. του $g(\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 6. Το προηγούμενο πόρισμα είναι πολύ σημαντικό και χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πορεία εύρεσης Α.Ο.Ε.Δ., γιατί πολλές φορές είναι ευκολότερη η εύρεση αμερόληπτης εκτιμήτριας για μία παράμετρο $g(\underline{\vartheta})$ από τον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής στο θεώρημα Rao-Blackwell. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτο και ορισμένες φορές (ιδίως όταν η αμερόληπτη εκτιμήτρια δίνεται μέσω κάποιας δείκτριας συνάρτησης) δουλεύουμε με τα δύο θεωρήματα: ας θεωρήσουμε π.χ. τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n \sim Poisson(\vartheta)$ και ας πούμε ότι ζητάμε Α.Ο.Ε.Δ. για την παράμετρο $\vartheta e^{-\vartheta}$. Παρατηρούμε ότι $\vartheta e^{-\vartheta} = P_\vartheta(X_1 = 1)$, άρα η αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\vartheta e^{-\vartheta}$ προσδιορίζεται άμεσα και είναι η $S(\underline{X}) = I_{\{X_1=1\}}(\underline{X})$. Επίσης, από θεώρημα Επάρκειας-Πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., βρίσκουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για το ϑ, οπότε υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\delta(T) = E_\vartheta(S \mid T)$ και από τα δύο θεωρήματα έπεται ότι η δ είναι η (μοναδική) Α.Ο.Ε.Δ. του $\vartheta e^{-\vartheta}$. Το παραπάνω παράδειγμα αναφέρεται στην πιο σπάνια περίπτωση όπου δουλεύουμε με τα δύο θεωρήματα αντί για το Πόρισμα. Παραθέτουμε τώρα και ένα σύντομο παράδειγμα, στο οποίο το Πόρισμα δίνει άμεσα την Α.Ο.Ε.Δ.: έστω $X_1, ..., X_n \sim Exp(\vartheta)$ και ας πούμε ότι θέλουμε να βρούμε Α.Ο.Ε.Δ. για το $\frac{1}{\vartheta^2}$. Από θεώρημα Επάρκειας-Πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., βρίσκουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για το ϑ. Επίσης, $E_\vartheta(T^2) = Var_\vartheta(T) + (E_\vartheta(T))^2 = \frac{n(n+1)}{\vartheta^2} \Leftrightarrow E_\vartheta\left(\frac{T^2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{\vartheta^2}$, οπότε συμπεραίνουμε άμεσα ότι η στατιστική συνάρτηση $\frac{T^2}{n(n+1)}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. του $\frac{1}{\vartheta^2}$ (ως αμερόληπτη του $\frac{1}{\vartheta^2}$ και συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους T).

Ορισμός 11. Ορίζουμε την πληροφορία του Fisher από μία παρατήρηση X ως $I_X(\vartheta) = E_\vartheta[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} log f(X;\vartheta)\right)^2]$

Ορισμός 12. Ορίζουμε την πληροφορία του Fisher από ένα τυχαίο δείγμα $\underline{X}$ ως $I_{\underline{X}}(\vartheta) = E_\vartheta[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} log f(\underline{X};\vartheta)\right)^2]$.

Θα δούμε τώρα πώς συνδέονται αυτές οι δύο ποσότητες.

Πρόταση 7. Αν $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα (δηλαδή οι X_i ανεξάρτητες και ισόνομες), τότε $I_{\underline{X}}(\vartheta) = n \cdot I_{X_i}(\vartheta),\ \ i = 1, ..., n$. Αν $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (όχι απαραίτητα ισόνομες), τότε $I_{\underline{X}}(\vartheta) = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{X_i}(\vartheta)$.

Θα δώσουμε μία πιο εύχρηστη μορφή της πληροφορίας του Fisher:

Πρόταση 8. Αν ισχύει ότι $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\int_S f(x;\vartheta)dx = \int_S \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(x;\vartheta)dx$, τότε $I(\vartheta) = -E[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} log f(X;\vartheta)]$.

Σημείωση 7. Γενικά προτιμάται η έκφραση με τη δεύτερη παράγωγο, καθώς απαιτεί μόνο υπολογισμούς μέσων τιμών, σε αντίθεση με την πρώτη έκφραση, όπου εμφανίζεται τετράγωνο στον τύπο, το οποίο υποδηλώνει εύρεση διασποράς (εν γένει δύσκολος υπολογισμός).

Αν θέλουμε την πληροφορία του Fisher για μία συνάρτηση της παραμέτρου ϑ, έχουμε:

Πρόταση 9. Αν $X \sim f(x;\vartheta),\ \ I_X(\vartheta)$ η πληροφορία του Fisher ως προς ϑ και η παράμετρος τέτοια ώστε $g(\eta)=\vartheta$, τότε $I_X(\eta)=I_X(\vartheta)\cdot(g'(\eta))^2$.

Θα θέλαμε να βρούμε ένα ομοιόμορφο κάτω φράγμα για τη διασπορά όλων των αμερολήπτων εκτιμητριών μίας παραμέτρου $g(\vartheta)$. Αν το πετύχουμε αυτό, τότε θα έχουμε άλλον έναν τρόπο να δείξουμε ότι μία εκτιμήτρια είναι Α.Ο.Ε.Δ. για μία παράμετρο (δεν είναι μέθοδος υπολογισμού Α.Ο.Ε.Δ., καθώς προϋποθέτει να μας δίνεται η προς εξέταση εκτιμήτρια, ωστόσο είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να δούμε αν μία αμερόληπτη εκτιμήτρια είναι Α.Ο.Ε.Δ.). Πράγματι, αφού θα είναι αμερόληπτη για τη συγκεκριμένη παράμετρο και με τη μικρότερη δυνατή διασπορά, θα είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για αυτήν την παράμετρο. Σχετικά, έχουμε:

Ορισμός 13. Αν $X_1,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή άγνωστης παραμέτρου $\vartheta\in\Theta$, τότε λέμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες ομαλότητας αν ισχύουν τα επόμενα:
(i) ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$,
(ii) το στήριγμα $S=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n : f(\underline{x};\vartheta)>0\}$ είναι ανεξάρτητο του ϑ,
(iii) η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)$ υπάρχει για κάθε $\underline{x}\in S,\ \ \vartheta\in\Theta$,
(iv) $\int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}\ \ \forall\vartheta\in\Theta$,
(v) $0<I_{\underline{X}}(\vartheta)<\infty\quad\forall\vartheta\in\Theta$.

Πρόταση 10. (Ανισότητα Cramér-Rao)
Έστω $X_1,...,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κατανομές παραμέτρου ϑ και έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες ομαλότητας. Αν η στατιστική συνάρτηση $T=T(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του $g(\vartheta)$ και $\int_S T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S T(\underline{x})f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}\ \ \forall\vartheta\in\Theta$, τότε για κάθε $\vartheta\in\Theta$ ισχύει ότι

$$Var_\vartheta(T(\underline{X}))\geq\frac{(g'(\vartheta))^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}.$$

Αν επιπλέον οι $X_1, ..., X_n$ είναι και ισόνομες (δηλαδή έχουμε τυχαίο δείγμα), τότε

$$Var_\vartheta(T(\underline{X})) \geq \frac{(g'(\vartheta))^2}{nI(\vartheta)}.$$

Ορισμός 14. Μία στατιστική συνάρτηση $T = T(\underline{X})$ καλείται αποτελεσματική για μία παράμετρο $g(\vartheta)$ αν $E_\vartheta(T(\underline{X})) = g(\vartheta)$ $\forall \vartheta \in \Theta$ και η διασπορά της ισούται με το κάτω φράγμα Cramér-Rao, δηλαδή

$$Var_\vartheta(T(\underline{X})) = \frac{(g'(\vartheta))^2}{nI(\vartheta)}.$$

Πρόταση 11. Η ισότητα στην ανισότητα Cramér-Rao ισχύει αν, και μόνο αν, $\frac{\partial}{\partial\vartheta} logf(\underline{x};\vartheta) = q(\vartheta)T(\underline{x}) - a(\vartheta)$ $\forall \underline{x} \in S$ $\forall \vartheta \in \Theta$, για κάποιες συναρτήσεις q, a, οπότε $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})exp\left(Q(\vartheta)T(\underline{x}) - A(\vartheta)\right)$. Ισχύει, επίσης, ότι $E_\vartheta(T(\underline{X})) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = g(\vartheta)$ (αφού η T είναι αμερόληπτη για την $g(\vartheta)$), οπότε για να πιαστεί το κάτω φράγμα πρέπει η προς εκτίμηση παράμετρος να είναι της μορφής $g(\vartheta) = c_1 \cdot \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} + c_2$, όπου c_1, c_2 σταθερές.

Πρόταση 12. Η συνάρτηση $\frac{\partial}{\partial\vartheta} logf(\underline{X};\vartheta)$ ονομάζεται συνάρτηση score και έχει την ιδιότητα $E_\vartheta[\frac{\partial}{\partial\vartheta} logf(\underline{X};\vartheta)] = 0$ $\forall \vartheta \in \Theta$.

Διατυπώνουμε τώρα ως Πρόταση την ιδέα για την οποία ξεκινήσαμε την εύρεση ομοιόμορφου κάτω φράγματος μεταξύ όλων των αμερολήπτων εκτιμητριών μίας παραμέτρου.

Πρόταση 13. Αν η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική για την $g(\vartheta)$, τότε είναι Α.Ο.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$.

2.6 Μέθοδοι υπολογισμού εκτιμητριών

Μέχρι στιγμής, θέσαμε κυρίως κάποιες επιθυμητές ιδιότητες τις οποίες θα θέλαμε να έχουν οι εκτιμήτριές μας προκειμένου να θεωρηθούν "καλές". Ωστόσο, η απαίτηση αυτών των ιδιοτήτων δεν εξασφαλίζει πάντα και τρόπους υπολογισμού τέτοιων εκτιμητριών. Θα δούμε τώρα δύο βασικές μεθόδους υπολογισμού εκτιμητριών, τη Μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας και τη Μέθοδο των Ροπών.
Η Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας στηρίζεται στην ακόλουθη διαισθητική ιδέα: έχοντας παρατηρήσει δεδομένα $\underline{x}$ από μία κατανομή $f(x;\vartheta)$,

θα ψάξουμε την τιμή εκείνη της παραμέτρου ϑ για την οποία μεγιστοποιείται η πιθανότητα να παρατηρήσουμε αυτό που ήδη έχουμε παρατηρήσει! Εκφράζοντας μαθηματικά αυτή την ιδέα, παίρνουμε τον επόμενο

Ορισμός 15. Ορίζουμε, αρχικά, ως συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta \mid \underline{x})$ την από κοινού σ.π. ή σ.π.π. του δείγματος, δηλαδή $L(\vartheta \mid \underline{x}) = f(\underline{x};\vartheta)$. Ορίζουμε τώρα ως Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) την τιμή $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underline{x})$ για την οποία μεγιστοποιείται η $L(\vartheta \mid \underline{x})$, δηλαδή
$L(\hat{\vartheta} \mid \underline{x}) = \max\limits_{\vartheta\in\Theta} L(\vartheta \mid \underline{x})$.

Παρατήρηση 1. Η Ε.Μ.Π., αν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητα μοναδική (π.χ. στην ομοιόμορφη $U(\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2})$ Ε.Μ.Π. του ϑ είναι κάθε
$\hat{\vartheta} \in [x_{(n)} - \frac{1}{2}, x_{(1)} + \frac{1}{2}]$).

Σημείωση 8. Στην πράξη δουλεύουμε συνήθως με τη λεγόμενη λογαριθμοπιθανοφάνεια, δηλαδή τη συνάρτηση $l(\vartheta) = logL(\vartheta \mid \underline{x})$, την οποία προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς ϑ. Επιτρέπεται να το κάνουμε αυτό, γιατί η συνάρτηση log είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η θέση μεγίστου παραμένει η ίδια, και προτιμάται συχνά διότι μετατρέπει το γινόμενο $f(\underline{x};\vartheta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta)$ σε άθροισμα, το οποίο είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμο. Συνήθως, λογαριθμίζουμε την πιθανοφάνεια, παραγωγίζουμε τη λογαριθμοπιθανοφάνεια, βλέπουμε πού είναι αρνητική (ή θετική) και βρίσκουμε τη θέση μεγίστου, η οποία είναι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δεν είναι απόλυτη. Πρέπει να θυμόμαστε ότι στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανοφάνεια. Ο τρόπος για να γίνει αυτό δεν είναι ένας. Χαρακτηριστική εξαίρεση αποτελεί, για άλλη μια φορά, η ομοιόμορφη κατανομή: έστω $X_1, ..., X_n \sim U(0,\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$. Υπολογίζουμε $L(\vartheta \mid \underline{x}) = \frac{1}{\vartheta^n}\prod\limits_{i=1}^{n} I_{[0,\vartheta]}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^n} I_{[0,\infty)}(x_{(1)}) I_{(-\infty,\vartheta]}(x_{(n)})$, οπότε $L(\vartheta \mid \underline{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \vartheta < x_{(n)} \\ \frac{1}{\vartheta^n}, & \vartheta \geq x_{(n)} \end{array} \right\}$, άρα το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\vartheta = x_{(n)}$, συνεπώς $\hat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$ (δε χρησιμοποιήσαμε ούτε λογαριθμοπιθανοφάνεια ούτε παραγώγιση).

Θα δούμε τώρα μία πολύ σημαντική ιδιότητα των Ε.Μ.Π., η οποία τις καθιστά και πολύ εύχρηστες στις εφαρμογές.

Πρόταση 14. (Ιδιότητα του Αναλλοίωτου των Ε.Μ.Π.)
Αν $\hat{\vartheta}$ είναι Ε.Μ.Π. του ϑ και η συνάρτηση $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε η στατιστική συνάρτηση $g(\hat{\vartheta})$ είναι Ε.Μ.Π. του $g(\vartheta)$, δηλαδή

$$\widehat{g(\vartheta)} = g(\hat{\vartheta}).$$

Π.χ. αν $\underline{\hat{\vartheta}} = (\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2) = \left(\overline{X},\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)$ Ε.Μ.Π. του $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ στην κανονική κατανομή $N(\vartheta_1, \vartheta_2)$, τότε Ε.Μ.Π. του $\vartheta_1^2 e^{\vartheta_2}$ είναι η στατιστική συνάρτηση $\overline{X}^2 e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.
Για να γίνει κατανοητό το πόσο σημαντική είναι αυτή η ιδιότητα των Ε.Μ.Π., αρκεί να συγκρίνει κανείς με τις Α.Ο.Ε.Δ., όπου η διαδικασία αυτή ήταν σχεδόν αδύνατη.

Θα κλείσουμε το κομμάτι της Εκτιμητικής παρουσιάζοντας την πιο απλή μέθοδο υπολογισμού εκτιμητριών, τη Μέθοδο των Ροπών. Πρόκειται για μία μέθοδο η οποία, σε γενικές γραμμές, εφαρμόζεται αρκετά ευκολότερα από τη Μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας, ωστόσο τα αποτελέσματα που δίνει δεν είναι πάντα τόσο καλά στην πράξη.

Ορισμός 16. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή και $k \in \mathbb{N}$ θετικός ακέραιος. Ορίζουμε ως (πληθυσμιακή ή θεωρητική) ροπή k-τάξης τη μέση τιμή $\mu_k = E(X^k)$ (γενικά είναι συνάρτηση της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ της κατανομής). Έστω τώρα τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n$. Ορίζουμε ως δειγματική ροπή k-τάξης την ποσότητα $M_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$.

Διαισθητικά, η ιδέα της Μεθόδου των Ροπών απορρέει από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, σύμφωνα με τον οποίο η δειγματική ροπή k-τάξης τείνει στη θεωρητική ροπή k-τάξης καθώς το $n \longrightarrow \infty$, δηλαδή οριακά ισχύει ότι $\mu_k \simeq M_k$.

Ορισμός 17. Έστω $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή $f(x; \underline{\vartheta})$, $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, ..., \vartheta_s)$. Θεωρούμε (υποθέτοντας ότι υπάρχουν οι s πρώτες ροπές) το σύστημα: $\begin{cases} \mu_1(\underline{\vartheta}) = M_1 = \overline{X} \\ \mu_2(\underline{\vartheta}) = M_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \\ \dots \\ \mu_s(\underline{\vartheta}) = M_s = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^s \end{cases}$. Αν το σύστημα λύνεται ως προς $\underline{\vartheta}$, τότε η λύση του, $\underline{\tilde{\vartheta}} = \underline{\tilde{\vartheta}}(\underline{X})$, καλείται Ε.Μ.Ρ. ή ροποεκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Σημείωση 9. Στην πράξη, για να εφαρμόσουμε τη Μέθοδο των Ροπών, φτιάχνουμε σύστημα με τόσες εξισώσεις όσες είναι και οι άγνωστοι παράμετροι. Αν σε κάποια εξίσωση η ροπή μ_k δε δίνει κάποια παράμετρο, τότε δουλεύουμε με τη ροπή της επόμενης τάξης. Π.χ. στην κανονική κατανομή $N(\mu, \vartheta)$, μ γνωστό, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, η 1η εξίσωση δίνει $\mu_1(\vartheta) = M_1 = \overline{X} \Rightarrow \mu = \overline{X}$, δηλαδή δεν υπάρχει το ϑ, οπότε βρίσκουμε την Ε.Μ.Ρ. από τη 2η εξίσωση: $\mu_2(\vartheta) = M_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \mu^2 + \vartheta = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, οπότε τελικά $\tilde{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$, η Ε.Μ.Ρ. για το ϑ (η οποία δε χρησιμοποιείται στην πράξη).

Κεφάλαιο 3

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Μέχρι στιγμής, ασχοληθήκαμε μόνο με σημειακές εκτιμήσεις. Είχαμε δηλαδή κάποια δεδομένα $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ και βρίσκαμε ορισμένες στατιστικές συναρτήσεις, σύμφωνα με κάποια κριτήρια που θέσαμε, για να εκτιμήσουμε άγνωστες παραμέτρους της κατανομής τους. Ωστόσο, ο υπολογισμός απλώς μίας εκτιμήτριας δε μας δίνει πολλή πληροφορία για το πόσο κοντά στην πραγματική τιμή των παραμέτρων είναι οι εκτιμήσεις που κάνουμε. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στην εύρεση ολόκληρου διαστήματος που περιέχει με κάποια βεβαιότητα την άγνωστη παράμετρο που μελετάμε.

Ορισμός 18. Έστω $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή άγνωστης παραμέτρου $\vartheta \in \Theta$. Αν $\alpha \in (0, 1)$ σταθερά, ορίζουμε ως $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για το ϑ (ή, γενικότερα, το $g(\vartheta)$) ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $[T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X})]$, όπου οι T_1, T_2 είναι στατιστικές συναρτήσεις με $T_1(\underline{x}) \leq T_2(\underline{x})$ και

$$\forall \vartheta \in \Theta \quad P_\vartheta(\vartheta \in [T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X})]) \geq 1 - \alpha$$

(αντίστοιχα,

$$\forall \vartheta \in \Theta \quad P_\vartheta\left(g(\vartheta) \in [T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X})]\right) \geq 1 - \alpha)$$

(συνήθως ζητάμε ισότητα, απλώς επειδή σε ορισμένες διακριτές κατανομές δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί, φτιάχνουμε τον ορισμό με ανίσωση, κυρίως για λόγους αυστηρότητας). Το $1-\alpha$ ονομάζεται συντελεστής εμπιστοσύνης του παραπάνω διαστήματος εμπιστοσύνης.

Σημείωση 10. Τι σημαίνει ένα 95% Δ.Ε. για το ϑ; Μία σκέψη είναι ότι το ϑ ανήκει στο συγκεκριμένο διάστημα με πιθανότητα 95%. Αυτό όμως είναι λάθος. Στην κλασική Στατιστική κάθε άγνωστη παράμετρος θεωρείται σταθερά. Μία σταθερά είτε ανήκει σε ένα διάστημα είτε δεν ανήκει, δεν έχει νόημα να αποδώσουμε κάποια πιθανότητα (στις τυχαίες μεταβλητές το κάνουμε αυτό). Άρα όταν λέμε ότι βρήκαμε ένα 95% Δ.Ε. (τυχαίο διάστημα) για το ϑ, εννοούμε ότι αν βρίσκουμε όλο και περισσότερα διαστήματα (παίρνοντας π.χ. περισσότερες παρατηρήσεις), τότε κατά προσέγγιση το 95% των διαστημάτων θα περιέχουν την άγνωστη παράμετρο ϑ. Άρα στην κλασική Στατιστική το διάστημα κινείται, ενώ η παράμετρος παραμένει σταθερή!

3.2 Γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης

Η γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για μία παράμετρο $g(\vartheta)$ είναι:
(1) Προσδιορίζουμε μία "καλή" εκτιμήτρια του $g(\vartheta)$ (Ε.Μ.Π., Α.Ο.Ε.Δ. ή τουλάχιστον επαρκή), έστω $T(\underline{x})$.
(2) Βρίσκουμε μία τυχαία μεταβλητή $Y = h(T(\underline{x}), g(\vartheta))$, η κατανομή της οποίας είναι ανεξάρτητη του ϑ. Η τυχαία μεταβλητή αυτή καλείται ποσότητα οδηγός (με βάση την T)
(3) Προσδιορίζουμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες, ώστε

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1-\alpha$$

(ή $\geq 1-\alpha$, αν η Y είναι διακριτή)
(4) Λύνουμε ως προς $g(\vartheta)$ και καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής $P_\vartheta\left(T_1(\underline{X}) \leq g(\vartheta) \leq T_2(\underline{X})\right) = 1-\alpha$ (ή $\geq 1-\alpha$ στη διακριτή περίπτωση). Το τυχαίο διάστημα $[T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X})]$ είναι το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το $g(\vartheta)$.

Σημείωση 11. Πολύ σημαντικό (και συχνά δύσκολο) είναι το Βήμα 2, καθώς δε δίνει κάποιον τρόπο εύρεσης τέτοιας τυχαίας μεταβλητής.

Ωστόσο, θα δούμε έναν τρόπο να το σκεφτόμαστε. Εφόσον ζητείται κατανομή ανεξάρτητη της παραμέτρου ϑ, είναι λογικό να ψάξουμε στις απαραμετρικές κατανομές. Υπάρχουν 4 βασικές απαραμετρικές κατανομές: η τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$, η χ^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας, η t κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας (κατανομή Student) και η $F_{n,m}$ κατανομή με n και m βαθμούς ελευθερίας (κατανομή Fisher-Snedecor - για ιστορικούς λόγους αναφέρουμε ότι την κατανομή τη βρήκε ο G.W. Snedecor και την ονόμασε F προς τιμήν του R. Fisher). Παρατίθενται τώρα ορισμένοι πολύ σημαντικοί μετασχηματισμοί, στους οποίους και στηριζόμαστε συνήθως για να καταλήξουμε σε κάποια απαραμετρική κατανομή και, κατ' επέκταση, στην ποσότητα οδηγό:

• Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

• Αν $Z \sim N(0,1)$, $W \sim \chi^2_n$ και οι Z, W είναι ανεξάρτητες, τότε $\dfrac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n}}} \sim t_n$.

• Αν $X \sim Gamma(n, \vartheta)$, τότε $2\vartheta \cdot X \sim \chi^2_{2n}$.

• Αν $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$ και οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\dfrac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F_{n,m}$.

• Αν $X \sim U(a,b)$, τότε $\frac{X-a}{b-a} \sim U(0,1)$ (ειδικότερα, αν $X_1, ..., X_n \sim U(0,\vartheta)$, τότε $\frac{X_{(n)}}{\vartheta} \overset{d}{=} U_{(n)}$ ως κατανομές, όπου $X_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$ και την κατανομή της $U_{(n)}$ μπορούμε εύκολα να τη βρούμε).

• Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (όπου $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ η δειγματική διασπορά).

Ορισμός 19. Ονομάζουμε α-άνω ποσοστιαίο σημείο μίας κατανομής F το σημείο c για το οποίο ισχύει $F(c) = 1 - \alpha$ (διαισθητικά, το σημείο το οποίο αφήνει δεξιά του εμβαδόν ίσο με α). Συμβολίζουμε τα α-άνω ποσοστιαία σημεία της τυποποιημένης κανονικής $N(0,1)$, της κατανομής χ^2_n, της κατανομής t_n και της κατανομής $F_{n,m}$ με $z_\alpha, \chi^2_{n;\alpha}, t_{n;\alpha}$ και $F_{n,m;\alpha}$, αντίστοιχα.

Σημείωση 12. Στο Βήμα 3, τα c_1, c_2 μπορούν να επιλέγουν με πολλούς τρόπους (πρακτικά, ζητάμε ένα εμβαδόν να ισούται με $1-\alpha$, το οποίο μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους). Υπάρχουν δύο κύριες επιλογές των σταθερών αυτών, οι οποίες οδηγούν σε Δ.Ε. ίσων ουρών και σε Δ.Ε. ελαχίστου μήκους. Ιδανικά, θα θέλαμε να μπορούμε να κατασκευάζουμε Δ.Ε. ελαχίστου μήκους. Πράγματι, αν ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της "βάσης" ζητώντας παράλληλα το εμβαδόν να ισούται με $1-\alpha$, τότε μεγιστοποιείται το "ύψος" και άρα βρισκόμαστε στην περιοχή με την υψηλότερη πιθανοφάνεια, δηλαδή στην περιοχή που είναι πιθανότερο να βρίσκεται το ϑ. Ωστόσο, η διαδικασία κατασκευής τέτοιων διαστημάτων είναι πολύ δύσκολη, οπότε καταφεύγουμε συνήθως στα Δ.Ε. ίσων ουρών, στα οποία διαλέγουμε τα c_1, c_2 ώστε το c_1 να "αφήνει εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ αριστερά του" και το c_2 να "αφήνει εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ δεξιά του" (οπότε "περισσεύει" εμβαδόν $1-\alpha$, όπως θέλαμε). Δηλαδή το c_1 επιλέγεται ως το $(1-\frac{\alpha}{2})$-άνω ποσοστιαίο σημείο, ενώ το c_2 ως το $\frac{\alpha}{2}$-άνω ποσοστιαίο σημείο της κατανομής.

3.3 Διαστήματα Εμπιστοσύνης για κανονικούς πληθυσμούς

Υπάρχουν ορισμένα πολύ σημαντικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης, αυτά που χρησιμοποιούνται για την κανονική κατανομή. Θα παραθέσουμε τα Δ.Ε. σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που προκύπτουν και θα εξηγήσουμε αναλυτικά μία από αυτές, ώστε να δούμε πώς εφαρμόζονται στην πράξη τα παραπάνω.

Πρόταση 15. Έστω $X_1, ..., X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $\alpha \in (0,1)$ δοσμένη σταθερά.
• Αν το ϑ_1 είναι άγνωστο και το ϑ_2 γνωστό, τότε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_1 είναι το $\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$.
• Αν το ϑ_1 είναι άγνωστο και το ϑ_2 άγνωστο, τότε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_1 είναι το $\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right]$.
• Αν το ϑ_2 είναι άγνωστο και το ϑ_1 γνωστό, τότε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_2 είναι το $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$.
• Αν το ϑ_2 είναι άγνωστο και το ϑ_1 άγνωστο, τότε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_2 είναι το $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$.
Θα εξηγήσουμε αναλυτικά τη δεύτερη περίπτωση (με ανάλογο τρόπο δουλεύονται όλες).

Το ϑ_1 είναι άγνωστο, το ϑ_2 άγνωστο και ψάχνουμε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_1. Θα ακολουθήσουμε τα βήματα που περιγράψαμε παραπάνω:
Βήμα 1: Διαλέγουμε ως εκτιμήτρια του ϑ_1 την επαρκή στατιστική συνάρτηση $\overline{X}$.
Βήμα 2: Θέλουμε να βρούμε ποσότητα οδηγό, άρα πρώτος μας στόχος είναι να οδηγηθούμε σε απαραμετρική κατανομή. Έχουμε ότι

$$X_1, ..., X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\vartheta_1}{\sqrt{\frac{\vartheta_2}{n}}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{\sqrt{\vartheta_2}} \sim N(0,1).$$

Η $N(0,1)$ είναι μεν απαραμετρική κατανομή, αλλά η τυχαία μεταβλητή $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{\sqrt{\vartheta_2}}$ δεν είναι ποσότητα οδηγός, γιατί εξαρτάται και από την άγνωστη (και όχι προς εκτίμηση) παράμετρο ϑ_2. Σκεφτόμαστε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τη ϑ_2 με μία εκτιμήτριά της. Μία λογική επιλογή είναι η $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (Α.Ο.Ε.Δ. του ϑ_2). Θα δούμε τι κατανομή ακολουθεί η $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{S}$. Έχουμε ότι $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{\sqrt{\vartheta_2}} \sim N(0,1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ και οι $\overline{X}, S^2$ είναι ανεξάρτητες (από το θεώρημα Basu), οπότε
$\frac{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{\sqrt{\vartheta_2}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\vartheta_2}}} \sim t_{n-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{S} \sim t_{n-1}$. Η t_{n-1} είναι απαραμετρική κατανομή και η ποσότητα $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{S}$ εξαρτάται από την προς εκτίμηση παράμετρο ϑ_1, άρα η $Y = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{S}$ είναι ποσότητα οδηγός.
Βήμα 3: Αναζητούμε c_1, c_2 τέτοια ώστε $P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1-\alpha$. Θα δουλέψουμε με Δ.Ε. ίσων ουρών: επιλέγουμε $c_1 = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ (λόγω συμμετρίας της κατανομής Student) και $c_2 = t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$.
Βήμα 4: Έχουμε

$$1-\alpha = P(c_1 \leq Y \leq c_2) = P(-t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq Y \leq t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}) = P\left(-t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\vartheta_1)}{S} \leq t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$\Rightarrow P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \leq \vartheta_1 \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$, οπότε $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το ϑ_1 είναι το $[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}]$.

3.4 Ασυμπτωτικά διαστήματα εμπιστοσύνης

Για μεγάλα μεγέθη δείγματος συμφέρει πολλές φορές να δουλέψουμε με προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης.

Ορισμός 20. Έστω $X_1, ..., X_n \sim f(x;\vartheta)$, $\alpha \in (0,1)$ δοσμένη σταθερά. Ορίζουμε ως $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο $g(\vartheta)$ ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $[T_n(\underline{X}), R_n(\underline{X})]$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} P[T_n(\underline{X}) \leq g(\vartheta) \leq R_n(\underline{X})] = 1 - \alpha$.

Π.χ. αν $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ και $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1} \longrightarrow N(0,1)$ για $n \longrightarrow \infty$, δηλαδή για μεγάλα n ισχύει ότι $\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \simeq \overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ και παίρνουμε ότι το $[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ είναι $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για το μ (δηλαδή Δ.Ε. για το μ με συντελεστή εμπιστοσύνης περίπου $1-\alpha$).

Κεφάλαιο 4

Έλεγχοι Υποθέσεων

4.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στην πράξη, χρειαζόμαστε πολλές φορές να πάρουμε μία απόφαση βασιζόμενοι στην έκβαση ενός πειράματος τύχης. Διατυπώνουμε, λοιπόν, ορισμένες υποθέσεις, τις οποίες τελικά είτε δεχόμαστε είτε απορρίπτουμε.

Ορισμός 21. Στατιστική υπόθεση είναι μία εικασία για την κατανομή F μίας τυχαίας μεταβλητής ή ενός δείγματος. Στατιστικός έλεγχος είναι μία διαδικασία με την οποία, με βάση ένα δείγμα $X_1, ..., X_n \sim F$ αποφασίζουμε αν θα δεχθούμε ή θα απορρίψουμε την υπόθεση.

Στους ελέγχους υποθέσεων έχουμε δύο είδη υποθέσεων, τη μηδενική υπόθεση H_0 και την εναλλακτική υπόθεση H_1, κάθε μία από τις οποίες αφορά το σύνολο στο οποίο ανήκει η άγνωστη παράμετρος της κατανομής που μελετάμε (υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στον κλάδο της παραμετρικής Στατιστικής, οπότε μελετάμε κατανομές με άγνωστες παραμέτρους). Γράφουμε $H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$ (με $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$).

Ορισμός 22. Αν το Θ_0 είναι μονοσύνολο, τότε η H_0 καλείται απλή μηδενική υπόθεση, διαφορετικά καλείται σύνθετη μηδενική υπόθεση. Αν το Θ_1 είναι μονοσύνολο, τότε η H_1 καλείται απλή εναλλακτική υπόθεση, διαφορετικά καλείται σύνθετη εναλλακτική υπόθεση.

Στην πραγματικότητα, θα ισχύει ακριβώς μία από τις H_0 και H_1. Εμείς, με κάποιους κανόνες απόφασης που θα θέσουμε, θα καταλήξουμε στην επιλογή μίας από τις δύο. Είναι πιθανό, λοιπόν, να οδηγηθούμε σε σφάλματα.

Ορισμός 23. Διακρίνουμε δύο κύρια είδη σφαλμάτων:
Σφάλμα τύπου Ι: απορρίπτω την H_0 ενώ αυτή ισχύει
Σφάλμα τύπου ΙΙ: αποδέχομαι την H_0 ενώ αυτή δεν ισχύει.

Συνήθως, στην κλασική Στατιστική ορίζουμε ως μηδενική υπόθεση αυτήν που θέλουμε να απορρίψουμε. Το σφάλμα τύπου Ι θεωρείται πολύ σημαντικό σφάλμα (θέλουμε να το αποφύγουμε). Η πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι είναι $P_{\underline{\theta}}(\underline{X} \in K)$, $\underline{\theta} \in \Theta_0$, όπου K η περιοχή απόρριψης (ή κρίσιμη περιοχή) της H_0.

Ορισμός 24. Ορίζουμε $\alpha = \sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta_0} P_{\underline{\theta}}(\underline{X} \in K)$ να είναι το επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου (διαισθητικά, το επίπεδο σημαντικότητας ενός ελέγχου είναι η μέγιστη πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου Ι). Το α το προκαθορίζουμε εμείς. Στην πράξη, $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01, 0.001$.

Η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου ΙΙ είναι $P_{\underline{\theta}}(\underline{X} \in A)$, $\underline{\theta} \in \Theta_1$ (αφού σφάλμα τύπου ΙΙ σημαίνει "αποδεχόμαστε την H_0 ενώ ισχύει η H_1"), όπου A η περιοχή αποδοχής της H_0. Ισχύει ότι
$1 - P(\text{σφάλμα τύπου ΙΙ}) = P_{\underline{\theta}}(\underline{X} \in K) = P(\text{απορρίπτουμε την } H_0 \text{ ενώ αυτή δεν ισχύει})$.

Ορισμός 25. Η ποσότητα $\beta(\underline{\theta}) = 1 - P(\text{σφάλμα τύπου ΙΙ}) = P_{\underline{\theta}}(\underline{X} \in K)$ ονομάζεται ισχύς του ελέγχου.

4.2 Ελεγχοσυνάρτηση

Αφού η απόφαση που καλούμαστε να πάρουμε είναι του τύπου "απορρίπτω την H_0 αν βρίσκομαι στην κρίσιμη περιοχή K ή αποδέχομαι την H_0 αν βρίσκομαι στην περιοχή αποδοχής A", μπορούμε να αναπαραστήσουμε την παραπάνω διαδικασία απόφασης με μία συνάρτηση που θυμίζει δείκτρια.

Ορισμός 26. Κάθε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\varphi(\underline{x}) \in [0, 1]$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται ελεγχοσυνάρτηση. Στους ελέγχους υποθέσεων μελετάμε, κυρίως, ελεγχοσυναρτήσεις της μορφής

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \in K \\ 0, & \underline{x} \in A \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε ότι

$$E_\theta \varphi(\underline{X}) = 1 \cdot P_\theta(\varphi(\underline{X}) = 1) + 0 \cdot P_\theta(\varphi(\underline{X}) = 0) = P_\theta(\underline{X} \in K) \Rightarrow$$

$$E_\theta \varphi(\underline{X}) = \begin{cases} \alpha(\underline{\theta}), & \underline{\theta} \in \Theta_0 \\ \beta(\underline{\theta}), & \underline{\theta} \in \Theta_1 \end{cases}.$$

Αν θεωρήσουμε την πιο απλή μορφή ελέγχου, δηλαδή την περίπτωση $H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta = \theta_1$ (απλή έναντι απλής) σε επίπεδο σημαντικότητας α, τότε θα θέλαμε (σύμφωνα με τα παραπάνω) να ισχύει $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$. Ωστόσο, υπάρχουν παραδείγματα από τη διακριτή περίπτωση όπου η ισότητα δεν επιτυγχάνεται. Για τον λόγο αυτό οδηγούμαστε στην έννοια του τυχαιοποιημένου ελέγχου.

Ορισμός 27. Μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \in K \\ \gamma, & \underline{x} \in N \\ 0, & \underline{x} \in A \end{cases},$$

όπου τα K, N, A είναι ξένα ανά δύο και $K \cup N \cup A = \mathbb{R}^n$, καλείται τυχαιοποιημένος έλεγχος (και χρησιμοποιείται κυρίως για τις διακριτές κατανομές).

Σημείωση 13. Για συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος, δεν μπορούμε να βελτιώνουμε ταυτόχρονα και την P(σφάλμα τύπου Ι) και την P(σφάλμα τύπου ΙΙ). Συνήθως, μάλιστα, όταν η μία αυξάνεται, η άλλη μειώνεται. Αυτό που κάνουμε στην πράξη, λοιπόν, είναι να σταθεροποιούμε την P(σφάλμα τύπου Ι) και να προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την P(σφάλμα τύπου ΙΙ) (ισοδύναμα, να μεγιστοποιήσουμε την ισχύ του ελέγχου).

Ορισμός 28. Κάθε έλεγχος με τη μέγιστη δυνατή ισχύ για δεδομένο ε.σ. α ονομάζεται ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (Ο.Ι.Ε.) σε επίπεδο σημαντικότητας α, εκτός αν η εναλλακτική υπόθεση είναι απλή, οπότε και ονομάζεται ισχυρότατος έλεγχος σε ε.σ. α.

4.3 Έλεγχοι απλών και μονόπλευρων υποθέσεων

Είναι πολύ χρήσιμο να μπορούμε να βρίσκουμε Ο.Ι.Ε. για τα διάφορα είδη υποθέσεων. Για την περίπτωση "απλή έναντι απλής" ισχύει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5. (Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson)
Έστω $X_1, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, και $f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$, η από κοινού σ.π. ή σ.π.π. του δείγματος. Έστω, επίσης, οι υποθέσεις $H_0 : \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1 : \theta = \theta_1$. Τότε, ο έλεγχος που ορίζεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} < c \\ \gamma, & \dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} = c \\ 0, & \dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} > c \end{cases},$$

όπου c, γ σταθερές που προσδιορίζονται από τη σχέση $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$, είναι ο ισχυρότατος έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Σημείωση 14. Μπορούμε να δουλέψουμε και με λογαριθμοπιθανοφάνειες:
$\dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} < c \Leftrightarrow log\dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} < logc \Leftrightarrow l(\theta_0 \mid \underline{x}) - l(\theta_1 \mid \underline{x}) < c' \Leftrightarrow \lambda(\underline{x}) < c'$,
όπου $c' = logc$ σταθερά και $\lambda(\underline{x}) = l(\theta_0 \mid \underline{x}) - l(\theta_1 \mid \underline{x})$.
Παράδειγμα: έστω $X_1, ..., X_n \sim N(\theta, 1)$, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$, και ας πούμε ότι θέλουμε να βρούμε τον ισχυρότατο έλεγχο σε ε.σ. α για τις υποθέσεις $H_0 : \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1 : \theta = \theta_1$, με $\theta_1 > \theta_0$. Μετά από πράξεις, βρίσκουμε ότι $\lambda(\underline{x}) = (\theta_0 - \theta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)$ και αναζητούμε κατάλληλη σταθερά c ώστε $\lambda(\underline{x}) < c \Leftrightarrow (\theta_0 - \theta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i < c'$ (αφού η ποσότητα $\frac{n}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)$ είναι ανεξάρτητη του $\underline{x}$) $\overset{\theta_0 - \theta_1 < 0}{\Longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} x_i > c'' \Leftrightarrow \overline{X} > \frac{c''}{n} = c_\alpha$, οπότε παίρνουμε

την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} > c_\alpha \\ 0, & \overline{x} \leq c_\alpha \end{cases}.$$

Αυτό είναι από τα πιο σημαντικά βήματα στην πορεία εύρεσης ισχυρότατου ελέγχου (ή Ο.Ι.Ε.). Αν έχουμε προσδιορίσει τον τύπο της ελεγχοσυνάρτησης, τότε το c_α το βρίσκουμε από την πολύ βασική σχέση $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$ (στην ουσία, εμείς κατασκευάζουμε την ελεγχοσυνάρτηση έτσι, ώστε να ισχύει αυτή η σχέση). Έχουμε:

$$E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(\overline{X} > c_\alpha) = \alpha.$$

Στο σημείο αυτό (που προκύπτει σε αρκετά σημεία μέσα στη Στατιστική) καλούμαστε να υπολογίσουμε μία πιθανότητα. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει συνήθως να γνωρίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής που βρίσκεται μέσα στην πιθανότητα. Μόλις τη βρούμε, μετασχηματίζουμε συνήθως την τυχαία μεταβλητή σε μία άλλη τ.μ. που ακολουθεί μία από τις τέσσερις βασικές απαραμετρικές κατανομές που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα: τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$, χ^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας, t κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας (κατανομή Student) ή $F_{n,m}$ κατανομή με n και m βαθμούς ελευθερίας. Αυτό γίνεται για καθαρά υπολογιστικούς λόγους, καθώς για αυτές τις κατανομές έχουμε έτοιμους πίνακες με τιμές τους. Εν προκειμένω, υπό την H_0 έχουμε:

$$\overline{X} \sim N\left(\theta_0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sqrt{n}(\overline{X} - \theta_0) \sim N(0,1),$$

οπότε

$$\alpha = P_{\theta_0}(\overline{X} > c_\alpha) = P_{\theta_0}\left(\sqrt{n}(\overline{X} - \theta_0) > \sqrt{n}(c_\alpha - \theta_0)\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(c_\alpha - \theta_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\sqrt{n}(c_\alpha - \theta_0)\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \sqrt{n}(c_\alpha - \theta_0) = z_\alpha \Rightarrow c_\alpha = \theta_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}},$$

άρα ο ισχυρότατος έλεγχος που παίρνουμε είναι ο

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} > \theta_0 + \dfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0, & \overline{x} \leq \theta_0 + \dfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

Παρατήρηση 2. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά την κατασκευή της ελεγχοσυνάρτησης στο προηγούμενο παράδειγμα, θα δούμε ότι, ουσιαστικά, το συγκεκριμένο θ_1 δεν έπαιξε κάποιον ρόλο τελικά. Χρειαστήκαμε μόνο ότι $\theta_1 > \theta_0$ (για να διαιρέσουμε στην ανίσωση με $\theta_0 - \theta_1$). Δηλαδή όποιο $\theta_1 > \theta_0$ και να παίρναμε, το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο. Συνεπώς, η παραπάνω ελεγχοσυνάρτηση δίνει τον Ο.Ι.Ε. και για τον έλεγχο $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad \theta > \theta_0$.

Θέλουμε τώρα να μελετήσουμε πιο συστηματικά σύνθετες περιπτώσεις ελέγχων, όπως είναι π.χ. οι περιπτώσεις "απλή έναντι σύνθετης" και "σύνθετη έναντι σύνθετης". Στη μελέτη αυτή θα αποβεί εξαιρετικά χρήσιμη μία ιδιότητα που έχουν ορισμένες κατανομές.

Ορισμός 29. Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n \sim f(x;\theta), \ \theta \in \Theta$. Θα λέμε ότι η κατανομή $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών (ΜΛΠ) αν
(i) το στήριγμα $S_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x;\theta) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του θ
(ii) για κάθε $\theta_1 \neq \theta_2$, οι $f(x;\theta_1), f(x;\theta_2)$ δεν είναι ταυτοτικά ίσες
(iii) για κάθε $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ με $\theta_1 < \theta_2$, ο λόγος $\dfrac{f(\underline{x};\theta_2)}{f(\underline{x};\theta_1)}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση μίας στατιστικής συνάρτησης.
(Για παράδειγμα, οι κατανομές $N(\mu, 1)$ και $Poisson(\lambda)$ έχουν την ιδιότητα ΜΛΠ με στατιστική συνάρτηση την $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$).
Αν κάποια κατανομή έχει την ιδιότητα ΜΛΠ, τότε μπορούμε εύκολα να βρούμε Ο.Ι.Ε. για αρκετούς ελέγχους υποθέσεων.

Πρόταση 16. (i) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta), \ \theta \in \Theta$, έχει την ιδιότητα ΜΛΠ με στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x})$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) < c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε

$$E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T(\underline{X}) > c_\alpha) + \gamma P_{\theta_0}(T(\underline{X}) = c_\alpha) = \alpha.$$

(ii) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, έχει την ιδιότητα ΜΛΠ με στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x})$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων $H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta < \theta_0$ δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) < c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) > c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε

$$E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T(\underline{X}) > c_\alpha) + \gamma P_{\theta_0}(T(\underline{X}) = c_\alpha) = \alpha.$$

Σημείωση 15. Είναι σημαντικό να αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά τη φορά των ανισώσεων στον ορισμό των παραπάνω ελεγχοσυναρτήσεων. Η ελεγχοσυνάρτηση παίρνει την τιμή 1 στην κρίσιμη περιοχή, δηλαδή στα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία απορρίπτουμε την H_0 ή, ισοδύναμα, αποδεχόμαστε την H_1. Στην πρώτη περίπτωση ($H_1 : \theta > \theta_0$) θέλουμε να αυξάνονται οι τιμές του θ για να δεχθούμε την εναλλακτική υπόθεση H_1, άρα η $T(\underline{x})$ είναι λογικό να φράσσεται από κάτω σε αυτόν τον κλάδο (η εξήγηση στην πραγματικότητα είναι λίγο πιο σύνθετη, γιατί εμπλέκεται και το θέμα της μονοτονίας, αλλά μπορούμε να το σκεφτόμαστε και ως εξής: στο Λήμμα Neyman-Pearson, το οποίο είδαμε στην Παρατήρηση 2 πώς συνδέεται με αυτούς τους ελέγχους, ισχύει σε αυτόν τον κλάδο ότι $\dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)} < c$ και η συνάρτηση $\dfrac{f(\underline{x};\theta_0)}{f(\underline{x};\theta_1)}$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της $T(\underline{x})$ σύμφωνα με την ιδιότητα ΜΛΠ (αφού $\theta_0 < \theta_1$), οπότε η $T(\underline{x})$ φράσσεται πράγματι από κάτω). Αντίστοιχα, στη δεύτερη περίπτωση, όπου στην εναλλακτική είναι μικρότερες οι τιμές του θ, η $T(\underline{x})$ είναι λογικό να φράσσεται από πάνω στον πρώτο κλάδο της ελεγχοσυνάρτησης.

Ορισμός 30. Θα λέμε ότι μία κατανομή έχει την ιδιότητα (ΜΛΠ)' αν έχει τις δύο πρώτες ιδιότητες της ΜΛΠ αλλά για κάθε $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ με $\theta_1 < \theta_2$, ο λόγος $\dfrac{f(\underline{x};\theta_2)}{f(\underline{x};\theta_1)}$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μίας στατιστικής συνάρτησης.

Πρόταση 17. (i) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, έχει την ιδιότητα (ΜΛΠ)' με στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x})$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) < c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) > c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε

$$E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T(\underline{X}) > c_\alpha) + \gamma P_{\theta_0}(T(\underline{X}) = c_\alpha) = \alpha.$$

(ii) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$, έχει την ιδιότητα (ΜΛΠ)' με στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x})$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$ δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) < c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε

$$E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T(\underline{X}) > c_\alpha) + \gamma P_{\theta_0}(T(\underline{X}) = c_\alpha) = \alpha.$$

Για την πιο δύσκολη περίπτωση $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ (''σύνθετη εναντίον σύνθετης'') ισχύει ένα ανάλογο αποτέλεσμα.

Πρόταση 18. (Karlin - Rubin)
Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$, έχει την ιδιότητα ΜΛΠ με στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x})$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) < c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

Παρατήρηση 3. Να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση η σχέση $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$ δεν είναι καθόλου προφανής, αφού η μηδενική υπόθεση δεν είναι απλή.

Άλλη μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα των κατανομών που ανήκουν στην Ε.Ο.Κ. είναι ότι αρκετές από αυτές έχουν την ιδιότητα ΜΛΠ.

Πρόταση 19. Αν η κατανομή $f(x;\theta)$ ανήκει στη μονοδιάστατη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ., δηλαδή $f(x;\theta) = h(x)exp\big(Q(\theta)T(x) - A(\theta)\big)$ και η $Q(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $\theta \in \Theta$, τότε η $f(\underline{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ με στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)$.

Μπορούμε τώρα να μεταφέρουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε κατανομές που ανήκουν στην Ε.Ο.Κ.

Πόρισμα 4. (i) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, ανήκει στην Ε.Ο.Κ., δηλαδή $f(x;\theta) = h(x)exp\big(Q(\theta)T(x) - A(\theta)\big)$ και η $Q(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $\theta \in \Theta$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \theta > \theta_0$$

δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} T(x_i) > c_\alpha \\ \gamma, & \sum\limits_{i=1}^{n} T(x_i) = c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} T(x_i) < c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

(ii) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, ανήκει στην Ε.Ο.Κ., δηλαδή $f(x;\theta) = h(x)exp\big(Q(\theta)T(x) - A(\theta)\big)$ και η $Q(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του $\theta \in \Theta$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ \theta > \theta_0$$

δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c_\alpha \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) = c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

Πόρισμα 5. (i) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, ανήκει στην Ε.Ο.Κ., δηλαδή $f(x;\theta) = h(x)exp\big(Q(\theta)T(x) - A(\theta)\big)$ και η $Q(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $\theta \in \Theta$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \theta < \theta_0$$

δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c_\alpha \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) = c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

(ii) Έστω ότι η κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, ανήκει στην Ε.Ο.Κ., δηλαδή $f(x;\theta) = h(x)exp\big(Q(\theta)T(x) - A(\theta)\big)$ και η $Q(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του $\theta \in \Theta$. Τότε, ο Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ \theta < \theta_0$$

δίνεται από την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c_\alpha \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) = c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και γ τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

Σημείωση 16. Τους παραπάνω Ο.Ι.Ε. δε χρειάζεται να τους θυμόμαστε απ' έξω. Βγαίνουν όλοι με τη διαισθητική ερμηνεία που δώσαμε παραπάνω (όταν η Q είναι γνησίως φθίνουσα, οι ανισώσεις πηγαίνουν με την αντίστροφη φορά).

4.4 Έλεγχοι με χρήση γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών

Υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις ελέγχων, στις οποίες δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε το Λήμμα Neyman-Pearson ούτε τα αποτελέσματα των Karlin-Rubin. Για παράδειγμα, για έλεγχο της μορφής

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάτι από τα παραπάνω για να βρούμε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε στο κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Ορισμός 31. Έστω ο έλεγχος $H_0 : \underline{\theta} \in \Theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \underline{\theta} \in \Theta_0^c$. Ορίζουμε ως γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών την ποσότητα

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta_0} f(\underline{x};\underline{\theta})}{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta} f(\underline{x};\underline{\theta})}.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, θα απορρίπτουμε την H_0 αν $\lambda^*(\underline{x}) < c_\alpha$, δηλαδή η ελεγχοσυνάρτηση είναι η

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \lambda^*(\underline{x}) < c_\alpha \\ \gamma, & \lambda^*(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & \lambda^*(\underline{x}) > c_\alpha \end{cases},$$

όπου c_α και $\gamma \in [0,1)$ τέτοια ώστε $\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta_0} E_{\underline{\theta}}\varphi(\underline{X}) = \alpha$.

Σημείωση 17. Δίνουμε μία σύντομη ερμηνεία του κριτηρίου.
Ο αριθμητής του $\lambda^*(\underline{x})$ εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια υπό την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης, ενώ ο παρονομαστής εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια κάτω από το μοντέλο συνολικά (είναι δηλαδή η πιθανοφάνεια $f(\underline{x};\underline{\theta})$ υπολογισμένη στην εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας $\theta = \hat{\theta}(\underline{x})$). Θέτοντας ως κριτήριο απόρριψης ή μη της H_0 τη συνθήκη $\lambda^*(\underline{x}) < c_\alpha$, αποφασίζουμε εξετάζοντας την 'επίδραση' του Θ_0 σε όλο το δείγμα. Αν η επίδραση του Θ_0 είναι σχετικά 'μικρή', δηλαδή $\lambda^*(\underline{x}) < c_\alpha$, τότε απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1 (δηλαδή η ελεγχοσυνάρτηση παίρνει την τιμή 1), διαφορετικά αποδεχόμαστε την H_0.

Θα ασχοληθούμε, τέλος, με ορισμένους ελέγχους της μορφής

$$H_0 : \underline{\theta} \in \Theta_0 \quad vs \quad H_1 : \underline{\theta} \in \Theta_0^c$$

για την κανονική κατανομή, κάνοντας χρήση του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Θα παραθέσουμε τις ελεγχοσυναρτήσεις για κάθε περίπτωση και θα εξηγήσουμε για μία από αυτές πώς δουλέψαμε, ώστε να γίνει κατανοητή η εφαρμογή του κριτηρίου.

Πρόταση 20. Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.
(i) Αν το μ είναι άγνωστο και το $\sigma^2 = \sigma_0^2$ γνωστό, τότε για τον έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$$

το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών δίνει

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |\overline{x} - \mu_0| > \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |\overline{x} - \mu_0| \leq \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$

(ii) Αν το $\mu = \mu_0$ είναι γνωστό και το σ^2 είναι άγνωστο, τότε για τον έλεγχο
$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$
το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών δίνει
$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 < \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}} \ \ ή \ \ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 \leq \sigma_0^2 \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$
(iii) Αν και το μ και το σ^2 είναι άγνωστα, τότε για τον έλεγχο
$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1 : \mu \neq \mu_0$$
το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών δίνει
$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |\overline{x} - \mu_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |\overline{x} - \mu_0| \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \end{cases},$$
όπου $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ (να σημειωθεί ότι εδώ η H_0 δεν είναι απλή, αφού $\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$).
(iv) Αν και το μ και το σ^2 είναι άγνωστα, τότε για τον έλεγχο
$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$
το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών δίνει
$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 < \sigma_0^2 \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \ \ ή \ \ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sigma_0^2 \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \leq \sigma_0^2 \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$
Θα εξηγήσουμε την πρώτη περίπτωση:
Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου το μ είναι άγνωστο και

το $\sigma^2 = \sigma_0^2$ γνωστό, και έστω ο έλεγχος $H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$. Η μηδενική υπόθεση είναι απλή και η εναλλακτική αμφίπλευρη, άρα δουλεύουμε με γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών. Έχουμε ότι

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta_0} f(\underline{x};\underline{\theta})}{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta} f(\underline{x};\underline{\theta})} = \frac{f(\underline{x};\mu_0)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R}} f(\underline{x};\mu)},$$

αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta = \mathbb{R}$. Για τη σ.π.π. του δείγματος έχουμε ότι

$$f(\underline{x};\mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\mu) = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\Big[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\Big],$$

οπότε ο αριθμητής γίνεται $f(\underline{x};\mu_0) = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\Big[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\Big]$. Για τον παρονομαστή θα βρούμε την τιμή εκείνη του μ που μεγιστοποιεί την $f(\underline{x};\mu)$, δηλαδή την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας, $\hat{\mu}$. Δουλεύουμε όπως στην παράγραφο 2.6: λογαριθμίζουμε, παραγωγίζουμε, μελετάμε το πρόσημο της παραγώγου και βρίσκουμε το ζητούμενο μ:

$$f(\underline{x};\mu) = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\Big[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\Big] \Rightarrow$$

$$logf(\underline{x};\mu) = log\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}logf(\underline{x};\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}\Big[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\Big] = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}logf(\underline{x};\mu) = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(-2\sum_{i=1}^n x_i + 2n\mu\right).$$

Έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial\mu}logf(\underline{x};\mu) > 0 \Leftrightarrow \mu < \overline{x}$, άρα ο παρονομαστής μεγιστοποιείται για $\mu = \hat{\mu} = \overline{x}$, οπότε ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών γίνεται

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta_0} f(\underline{x};\underline{\theta})}{\sup\limits_{\underline{\theta}\in\Theta} f(\underline{x};\underline{\theta})} = \frac{f(\underline{x};\mu_0)}{f(\underline{x};\overline{x})}.$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι $\lambda^*(\underline{x}) = exp\Big[-\dfrac{n}{\sigma_0^2}(\overline{x}-\mu_0)^2\Big]$. Σύμφωνα με το κριτήριο γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, έχουμε:

$\lambda^*(\underline{x}) < c \Leftrightarrow exp\Big[-\dfrac{n}{\sigma_0^2}(\overline{x}-\mu_0)^2\Big] \Leftrightarrow -\dfrac{n}{\sigma_0^2}(\overline{x}-\mu_0)^2 < logc \Leftrightarrow \dfrac{n}{\sigma_0^2}(\overline{x}-\mu_0)^2 > c' \Leftrightarrow$

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > c_\alpha$, άρα παίρνουμε την ελεγχοσυνάρτηση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > c_\alpha \\ 0, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| \leq c_\alpha \end{cases},$$

όπου $E_{\mu_0}\varphi(\underline{X}) = \alpha \Leftrightarrow P_{\mu_0}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > c_\alpha\right) = \alpha$. Υπό την $H_0 : \mu = \mu_0$ ισχύει ότι

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\overline{X}-\mu_0\right) \sim N(0,1),$$

άρα

$$P_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > c_\alpha\right) = \alpha \Leftrightarrow P_{\mu_0}\left(|Z| > c_\alpha\right) = \alpha \Leftrightarrow c_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}},$$

λόγω συμμετρίας της τυποποιημένης κανονικής. Παίρνουμε, λοιπόν,

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > c_\alpha \\ 0, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| \leq c_\alpha \end{cases},$$

άρα

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{x}-\mu_0| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases},$$

δηλαδή, πράγματι

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |\overline{x} - \mu_0| > \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |\overline{x} - \mu_0| \leq \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$

Παρατήρηση 4. (!) Παρατηρούμε ότι δεν απορρίπτουμε την H_0 αν, και μόνο αν,

$$|\overline{x} - \mu_0| \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0 \in \left[\overline{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right],$$

που είναι το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το μ στην περίπτωση $N(\mu, \sigma_0^2)$.