Λύσεις ασκήσεων Πιθανότητες ΙΙ

21 Σεπτεμβρίου 2021

Πρόλογος

Οι λύσεις των ασκήσεων εδώ αναφέρονται στις σημειώσεις του κ. Χελιώτη για το μάθημα των Πιθανοτήτων ΙΙ '*Ένα δεύτερο μάθημα πιθανοτήτων*' και γράφτηκαν το καλοκαίρι του 2021. Σε επόμενες εκδόσεις των σημειώσεων του καθηγητή ίσως προστεθούν ασκήσεις ή αλλάξει η αρίθμηση.

Για τη λύση των ασκήσεων χρησιμοποιήθηκαν τα εξής (στην έκδοση που υπήρχαν το καλοκαίρι του 2021):

- οι βιντεοδιαλέξεις του μαθήματος το χειμερινό εξάμηνο του α.ε. 2020-21 όπου δίδασκε ο κος Χελιώτης, οι υποδείξεις στο τέλος των σημειώσεων του και οι απαντήσεις του διδάσκοντος έπειτα από προσωπική επικοινωνία μαζί του σε διάφορες απορίες

- οι σημειώσεις του κ. Κουμουλλή για τη Θεωρία Μέτρου (επιμέλεια κ. Εσκενάζη) και οι λύσεις των ασκήσεων τους (επιμ. κ. Γιαννόπουλος) εκδ. 2020-21 καθώς και το βιβλίο του κου Παπαδάτου *Θεωρία Πιθανοτήτων* (δεν κυκλοφορεί στο εμπόριο, αλλά δίνεται από τον καθηγητή στους μεταπτυχιακούς φοιτητές και υπάρχει στη Βιβλιοθήκη τις σχολή σε λίγα αντίτυπα)

- οι σημειώσεις σε εξέλιξη για το μάθημα της Θεωρίας Μέτρου (εκδ. 2019-20) και των Πιθανοτήτων ΙΙ του κου Τρέβεζα όπως και χειρόγραφες σημειώσεις φοιτητών από τις χρονιές που δίδαξε το μάθημα και βρίσκονται στις eclass των Πανεπιστημιακών Σημειώσεων φοιτητών (θα αναφέρονται για όποιον θέλει να ανατρέξει στην αρχή της κάθε άσκησης)

- οι δακτυλογραφημένες σημειώσεις των μαθημάτων Απειροστικός Ι, ΙΙ και Πραγματική Ανάλυση όπως και οι υποδείξεις των ασκήσεων των σημειώσεων αυτών

- οι δακτυλογραφημένες λύσεις ασκήσεων των Ανδρέου και Παρασκευά, οι χειρόγραφες λύσεις του Dimitris Volteras και υποδείξεις ασκήσεων σε διάφορα post από την ομάδα του Μαθηματικού Αθήνας στο facebook

- υποδείξεις ασκήσεων σε διάφορα post σε μαθηματικά forum όπως το Math Stack Exchange

Τις περισσότερες φορές γίνεται παραπομπή στην πηγή. Αν δεν αναφέρεται η πηγή τότε είτε δόθηκε υπόδειξη από κάποιον και λύθηκε από εμένα, είτε είναι από forum. Η προσπάθεια αυτή έγινε για να μαζευτούν οι λύσεις που ήταν διασκορπισμένες σε διάφορες πηγές, αλλά δεν λείπουν τα λάθη πάσης φύσεως (ορθοφραφικά, μαθηματικά, λογικά κ.ά.) Αν βρείτε λάθος μπορείτε να επικοινωνήσετε μέσω του προσωπικού μου mail nikolesev@gmail.com με θέμα *«λύσεις πιθανοτήτων ΙΙ»* ώστε να διορθωθεί το λάθος. Επλίζω στο μέλλον οι λύσεις αυτές να περαστούν σε latex αν όχι από εμένα, τουλάχιστον από κάποιον άλλο.

Κάποιες ασκήσεις των σημειώσεων δεν έχουν λυθεί. Αυτές είναι οι: 11.12, 11.13, 11.18(β), 11.19, 11.20, 12.5, 12.9, 12.10, 12.11, 12.12, 13.13, 13.15, 13.16, 13.17, 14.2, 14.13, 14.15, 14.16, 15.1, 15.7, 15.8. Αν κάποιος τις λύσει μπορεί να μου τις στείλει και εγώ θα τις προσθέσω στο αρχείο.

Καλό Διάβασμα!

ΚΕΦ 1

1 (a) ΟΧΙ η $\mathcal{A}_1$ δεν είναι $X \setminus \{b, \gamma\} = \{a, \delta\} \notin \mathcal{A}_1$

ΝΑΙ : • $\emptyset \in \mathcal{A}_2$,

• $X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}_2$, $X \setminus \{b,\gamma\} \in \mathcal{A}_2$, $X \setminus \{a,\delta\} \in \mathcal{A}_2$

και η ένωση οποιονδήποτε από αυτών (είναι αριθμήσιμη) κ ανήκει στην $\mathcal{A}_2$

(b) $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ όμως $\{a,\delta\} = X \setminus \{b,\gamma\} \in \mathcal{A}_1$

$\Rightarrow$ Θεωρώ οικογένεια $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \cup \{\{a,\delta\}\} =$

$= \{\emptyset, X, \{b,\gamma\}, \{a,\delta\}\} = \mathcal{A}_2$

και παρατηρώ ότι $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2$: σ-άλγεβρα

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_2$ όμως δεν υπάρχει μικρότερη σ-άλγεβρα που να περιέχει την $\mathcal{A}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$

2 (a) • $\emptyset \in \mathcal{A}$ • έστω $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} (\Pi_1) & B: \text{αριθμ.} \\ (\Pi_2) & X \setminus B: \text{αριθμ.} \end{cases}$

(Π_1) $X \setminus (X \setminus B) = B \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{A}$

(Π_2) $X \setminus B \in \mathcal{A}$

• Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ θα δο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(Π_1) Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ A_n : αριθμ. $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: αριθμ. ένωση αριθμήσιμων

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: αριθμ. $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(Π_2) Αν $\exists\, k \in \mathbb{N}$: A_k: όχι αριθμ. $\Rightarrow X \setminus A_k$: αριθμ. αφού $A_k \in \mathcal{A}$

$X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) \subseteq X \setminus A_k$

$\Rightarrow X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: αριθμήσ. $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

✓

(β) [Βλ. λύσεις ασκήσεων Θεωρ. Μέτρου άσκ. (1.3)] (2)

$\forall\, B \subset \mathcal{A}$ ισχύει $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$ ή $X \setminus B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$ } αφού ένα από τα 2 είναι αριθμήσιμο

$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \quad \text{και} \quad \mathcal{A}: \sigma\text{-άλγεβρα} \\ \text{κ} \ \{x\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \quad \text{ως αριθμ. σύνολ.} \end{cases}$ } που περιέχει την $\mathcal{A}_0$ $\xRightarrow{\sigma(\mathcal{A}_0):\ \text{η μικρότ. σ-άλγ}}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$

(δ) • $\phi \in \mathcal{A}_1$

• Αν $B \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \begin{cases} B: \text{πεπερ.} \rightarrow X\setminus B \in \mathcal{A}_1 \text{ ως συμπλήρωμα πεπερ.} \\ X\setminus B: \text{πεπερ} \rightarrow X\setminus B \in \mathcal{A}_1 \text{ ως πεπερασμ.} \end{cases}$

• Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}_1$;

Αν $\forall\, n\in\mathbb{N}$ A_n: πεπερ. $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ίσως άπειρο

π.χ. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία (αριθμών) στο $\mathbb{R}$ με $x_n = n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. πεπερασμ. υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

όμως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} = \mathbb{N}$ άπειρο

και

$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ κ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$: σύνολο άπειρο

άρα $\mathcal{A}_1$: όχι σ-άλγεβρα

(1.3) Βλ. σημειώσεις Τσέβεζα για Θεωρ. Μέτρου πόρισμ. 1.27

Θέτω $\mathcal{D} = \{ A \subseteq X : A$ αριθμ. ένωση από A_i ή A^c: αριθμ. -//- -//- $\}$

Θνδο $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$ Πρώτα ότι $\mathcal{D}$: σ-άλγεβρα

• $\phi \in \mathcal{D} \Rightarrow X \in \mathcal{D}$ (συμπλήρωμα αριθμ. ένωσης A_i)

• Αν $B \in \mathcal{D} \longrightarrow$ (Π1) B: αριθμ. ένωση $\rightarrow X\setminus B$: συμπλήρ. αριθμ. ένωσης $\rightarrow X\setminus B \in \mathcal{D}$

(Π2) $X\setminus B$: αριθμ. ένωση $\rightarrow X\setminus B \in \mathcal{D}$

• Αν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D} \rightarrow$ θνδο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$

(Π1) Αν $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $\quad B_n = \bigcup_{i\in J_n} A_i$ $\quad$ με $J_n \subseteq I$ αριθμήσιμο

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i\in J_n} A_i \right)$$: αριθμήσιμη ένωση $A_i \Rightarrow$ ανήκει στη $\mathcal{D}$

(Π2) Αν $\exists\, k\in\mathbb{N}$: B_k όχι αριθμήσιμη ένωση A_i $\overset{B_k\in\mathcal{D}}{\Rightarrow}$

$B_k^c = X \setminus B_k = \bigcup_{i\in J_k} A_i$ $\quad$ με $J_k \subseteq I$ αριθμήσιμο

$$X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X\setminus B_k \subseteq X\setminus B_k$$: αριθμήσιμο $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$

Άρα $\mathcal{D}$: σ-άλγεβρα

<u>Βήμα 2</u> $\quad$ Θδο $\quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$

$\forall\, i\in I$ $\quad \bigcup_{j\in\{i\}} A_j$: αριθμήσ. ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$

$\Rightarrow \forall\, i\in I \quad A_i \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$

Άρα $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$

<u>Βήμα 3</u> $\quad \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$

Αν $A\in\mathcal{D} \Rightarrow$ $\quad A$: αριθμ. ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$

$X\setminus A$: $\quad$ −//− $\quad$ −//− $\quad$ −//−

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\in\sigma(\mathcal{C}) \\ X\setminus A \in \sigma(\mathcal{C}) \overset{\sigma(\mathcal{C}):\sigma\text{-άλγ}}{\Longrightarrow} X\setminus(X\setminus A) = A \in \sigma(\mathcal{C}) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$$

Άρα $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$

(1.4) (Βλ. κ λύσεις ασκ. Θεωρ. Μέτρου Γιαννόπουλου άσκ. 1.7)

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ ανήκει στα Borel $\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Άρα αρκεί νδο $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ ή πιο απλά ότι κάποια οικογένεια που παράγει τα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι υποσύνολο της $\sigma(\mathcal{C})$

Διαλέγω $\Delta = \{(-\infty, b) : b, \ b \in \mathbb{R}\}$ (4)

Έστω $b \in \mathbb{R}$,

τότε από πληρότητα ρητών στο $\mathbb{R}$ $\exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$

ακολ. ρητών με $q_n \nearrow b$ (αυξάνει)

(δηλ $q_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

τότε $(-\infty, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, q_n] \in \sigma(G)$

$\Rightarrow \Delta \subseteq \sigma(G) \rightarrow \sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(G) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(G)$

(1.5) Από παράδ. 1.10 και άσκ 1.3

Αν μια σ-άλγεβρα παράγεται από διαμέριση περιγράφεται ($\{A_i\}_{i\in I}$ διαμέριση του συνόλου) ως

!! Προφανώς διαλέγω $\forall i \in I$ $A_i \neq \emptyset$

(π1) Αν η διαμέριση είναι αριθμήσιμη

$\{\bigcup_{i\in J} A_i : J \subseteq I\}$

(π2) Αν I: υπεραριθμήσιμο

$\{A \subseteq X : A$: αριθμήσ. ένωση στοιχείων της διαμέρισης ή A^c: αριθμ. ένωση$\}$

(π1) Έστω προς άτοπο ότι $\exists$ $(A_i)_{i\in I}$ διαμέριση (αριθμ.) του $\mathbb{R}$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(G)$ $(G = \{A_i : i \in I\})$

Επιλέγω ένα $a_i \in A_i$ $\forall i \in I$. Τότε $\bigcup_{i\in I}\{a_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

όμως δεν υπάρχει υποσύνολο $J \subseteq I$ ώστε

$\bigcup_{i\in I}\{a_i\} = \bigcup_{i\in J} A_i$ $\Rightarrow$ άτοπο (γιατί υπάρχει A_i που δεν είναι μονοσύνολο αφού $\mathbb{R}$: υπεραριθμήσιμο)

(π2) Έστω $J \subseteq I$ αριθμήσιμο και διαλέγω $a_i \in A_i$ $\forall i \in J$. Έχω ότι $\bigcup_{i\in I}\{a_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υπάρχουν 2 περιπτώσεις

(α) $\exists$ $K \subseteq I$ αριθμ. : $\bigcup_{i\in J}\{a_i\} = \bigcup_{i\in K} A_i$

(β) $\exists$ $K \subseteq I$ αριθμ. : $X \setminus \bigcup_{i\in J}\{a_i\} = \bigcup_{i\in K} A_i$

Για το (β)

$X \setminus \bigcup_{i\in J}\{a_i\} = \bigcap_{i\in J} \mathbb{R}\setminus\{a_i\}$

$\Rightarrow \forall\, y \in \bigcap_{i\in J} \mathbb{R}\setminus\{a_i\}$ $\exists!\, k\in K : y \in A_k$ (A_i : ξένα ανά 2)

Έστω $z \in \bigcup_{i\in J} \underbrace{(A_i\setminus\{a_i\})}_{\text{ξένα ανά } 2} \subseteq X\setminus \bigcup_{i\in J}\{a_i\} = \bigcup_{i\in K} A_i$

$J\cap K = \emptyset$ αλλιώς $\exists\, k\in K\cap J$: $a_k \in \bigcap_{i\in J} \mathbb{R}\setminus\{a_i\}$

άτοπο (τα έχω βγάλει όλα τα a_i)

$\Rightarrow$ $\exists!\, j\in J : z\in A_j\setminus\{a_j\}$ και

$\exists!\, k\in K : z\in A_k$ άτοπο γιατί

$J\cap K = \emptyset$ & A_i : ξένα ανά 2

Για το (a):

Προκύπτει ότι $A_i = \{a_i\}$ $\forall\, i\in J$ & $J = K$

$\Rightarrow$ άρα το τυχαίο $J\subseteq I$ έχει μόνο A_i : μονοσύνολα $\Rightarrow \forall\, A_i$ είναι μονοσύνολο $\Rightarrow$

άσκ. 1.2

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A\subseteq\mathbb{R} : A$ αριθμ. ή $\mathbb{R}\setminus A$ αριθμ.$\}$

όμως το διάστημα $[0,1]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ & $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. όπως & το $[0,1]$ άρα πάλι οδηγηθήκαμε σε άτοπο

$\rightarrow$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση (ούτε αριθμ. ούτε υπεραριθμ.)

1.6 (βλ. μεθοδολογία για απόδ. προτ. 1.1.6(iii) θεωρ. μέτρου σημείωσ. Εσκενάζη)

Θέτω $B_1 = A_1$ & $B_n = A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n-1} A_k \subseteq A_n$

Θ.δ.ο. • B_i : ξένα ανά 2 • $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

• $B_i \in \mathcal{A}$ $\forall\, i\in\mathbb{N}$

• Έστω $i,j\in\mathbb{N}$ με $i<j$ (χ.β.τ.γ)

$B_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ όμως $i\in\{1,\dots,n-1\} \Rightarrow \nexists\, z\in A_i : z\in A_j$

$\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

• $B_n = A_n \cap \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c}_{\in \mathcal{A}} \longrightarrow B_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• $B_n \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Άρα αρκεί νδο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Έστω $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x \in A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_k$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

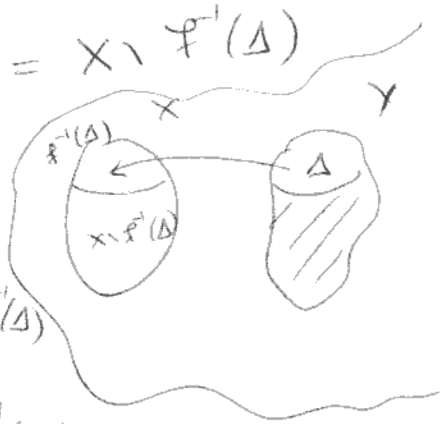
(βλ. βιντεοσκ. 1η ώρα 13/10/2020) ✓

1.7 (α) • $\emptyset \in \mathcal{B}$ γιατί $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$

• Έστω $\Delta \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$

Για $Y \setminus \Delta$: νδο $f^{-1}(Y \setminus \Delta) = X \setminus f^{-1}(\Delta)$

$f^{-1}(Y\setminus\Delta) \subseteq X \setminus f^{-1}(\Delta)$: Αν $x \in f^{-1}(Y \setminus \Delta) \Rightarrow \exists\, \delta \in Y\setminus\Delta : f(x) = \delta \Rightarrow \delta \notin \Delta$
$\Rightarrow x \notin f^{-1}(\Delta) \Rightarrow x \in X \setminus f^{-1}(\Delta)$



$f^{-1}(Y\setminus\Delta) \supseteq X \setminus f^{-1}(\Delta)$: Αν $x \in X \setminus f^{-1}(\Delta) \Rightarrow x \notin f^{-1}(\Delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow \nexists\, \delta \in \Delta : f(x) = \delta \Rightarrow f(x) \in Y \setminus \Delta$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y \setminus \Delta)$

• Αν $(A_n) \in \mathcal{B}$ νδο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$

(β) (βλ. θεωρ. μέτρου άσκ 1.2)

• $\emptyset \in \mathcal{A}$ γιατί $\emptyset \in \mathcal{B}$ κ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

• Αν $\Delta \in \mathcal{A}$ νδο $X \setminus \Delta \in \mathcal{A}$

$\Delta \in \mathcal{A} \Rightarrow \Delta = f^{-1}(B)$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}$ (I)

$$X \setminus \Delta = X \setminus f^{-1}(B) \underset{\text{από (α)}}{=} \underbrace{f^{-1}(Y \setminus B)}_{\in \mathcal{B} \text{ ως συμπλήρωμα του } B} \Rightarrow X \setminus \Delta \in \mathcal{A}$$

• Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ θ.δ.ο. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

$A_n = f^{-1}(B_n)$ για $B_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \underset{\text{όπως στο (α)}}{=} f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}_{\in \mathcal{B}}\Big) \in \mathcal{A}$$

1.8 Έστω $x \in X$

▸ $1_{\limsup_{n\geq 1} A_n}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \limsup_{n\geq 1} A_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \geq n : x \in A_k$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \geq n : 1_{A_k}(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \{k \in \mathbb{N} : 1-\varepsilon < 1_{A_k}(x)\} \text{ άπειρο } \forall \varepsilon > 0 \\ \underline{\text{και}} \quad (\text{αφού } 1_{A_k}(x) \leq 1) \\ \{k \in \mathbb{N} : 1+\varepsilon < 1_{A_k}(x)\} \text{ πεπερασμ. } \forall \varepsilon > 0 \\ (\text{βασικά είναι } \emptyset) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} 1_{A_n}(x) = 1$

▸ $1_{\liminf_{n\geq 1} A_n} = 1 \Leftrightarrow x \in \liminf_{n\geq 1} A_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \ni x \Leftrightarrow \exists \underset{n(x)}{n \in \mathbb{N}} : \forall k \geq n \ \underbrace{x \in A_k}_{1_{A_k}(x) = 1}$

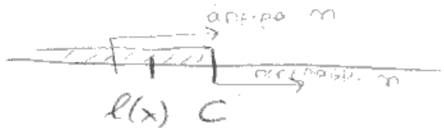
$\Leftrightarrow \begin{cases} \{k \in \mathbb{N} : 1_{A_k}(x) < 1+\varepsilon\} \text{ άπειρο } \forall \varepsilon > 0 \\ \underline{\text{και}} \\ \{k \in \mathbb{N} : 1_{A_k}(x) < 1-\varepsilon\} \text{ πεπερασμένο} \\ \quad \subseteq \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1$

* 1.9 (SOS για τα κεφ 11 και ύστερα) για όλα θέτω $\ell(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \limsup_{n\geq 1} f_n(x)$

b) $A_n = \{x \in X : f_n(x) < c\}$

$B_n = \{x \in X : f_n(x) \leq c\}$



ΒΛ. βιντεοδιάλεξη 13/10/2020 (2η ώρα)

(α) η συνθήκη $\ell(x) < c$ είναι αρκετή ώστε να εξασφαλίσει την $f_n(x) < c$ για ένα $x \in X$ από ένα σημείο και μετά (από κάποιο n_0 και ύστερα / τελικά)

$\Rightarrow \{x \in X : \ell(x) < c\} \subseteq \liminf_{n \geq 1} A_n$ (ισχύει ο "$\subseteq$")

$\boxed{\text{Αν } x \in \{x \in X : \overline{\lim_n} f_n(x) < c\} \to \forall \varepsilon > 0 \ \{n \in \mathbb{N} : c + \varepsilon < f_n(x)\} : \text{πεπερασμένο; για } \varepsilon = \frac{\ell(x)}{2} \longrightarrow c + \frac{\ell(x)}{2} < f_n(x) \text{ για πεπερ. } n \Rightarrow f_n(x) < c \text{ τελικά}}$

δηλαδή αν το limsup είναι $< c$ $\Rightarrow$ από κάποιο σημείο κ ύστερα $f_n < c$

(*) Αν $x \in \liminf A_n$ μπορεί $\ell(x) = c$ (δεν ισχύει "$\supseteq$")

(β) Αν $f_n(x) \leq c$ τελικά (πεπερ. όροι πάνω από c)

$\Rightarrow \limsup_n f_n(x) \leq c$

$\Rightarrow \liminf_{n \geq 1} B_n \subseteq \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$ (ισχύει ο "$\supseteq$")

$\ell(x) < c$ $\Leftrightarrow$ λίγο πιο πάνω από το c έχω πεπερασμένους όρους της ακολ.

(*)' (γ) Το ότι $\exists$ άπειρα $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f_n(x) \leq c$ δεν σημαίνει ότι έχουμε λίγο πιο πάνω από το c πεπερασμένα n $\Rightarrow \limsup_{n \geq 1} B_n \not\subseteq \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$

liminf A_n (η liminf B_n) σημαίνει ότι $f_n < (n \leq) c$ τελικά

Αν $x : f_n(x) \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$ μπορεί άπειρες φορές $f_n(x) \geq c$ κ άπειρες φορές $f_n(x) \leq c$ $\Rightarrow x \in \limsup_n B_n$

limsup A_n σημαίνει ότι $\exists$ άπειρα n τ.ω. $f_n \leq c (f_n < c)$

όμως $\overline{\lim} f_n(x) \not\leq c \rightarrow x \notin \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$

$\Rightarrow \limsup B_n \not\subseteq \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$

ℓ c $c+\varepsilon$ πεπερ.

Αν $x \in X : f_n(x) = c + \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{\lim} f_n = \ell(x) = c$

όμως $\limsup B_n \not\ni x$ (δεν είναι για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \leq c$) $\Rightarrow \limsup \not\supseteq \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$ (δεν ισχύει κανένας)

(δ) Ελέγχω το "$\subseteq$": αν $x \in \{x \in X : \ell(x) \geq c\}$ για $f_n(x) = c - \frac{1}{n}$ δεν ισχύει για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ ότι $x \in \limsup A_n^c$ (δηλ. για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \geq c$) (δεν ισχύει ο "$\subseteq$")

$c - \varepsilon$ πεπερ. n άπειρα n

(*)' Δεν ισχύει το "$\subseteq$" π.χ. (για $c + \frac{1}{n}$) αν ισχύει $f_n(x) = c + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \limsup_{k \geq 1} f_n = c$ αλλά f_n όχι $< c$ τελικά

Ελέγχω το "$\supseteq$" 9

Αν $x \in \limsup A_n^c \Rightarrow \ell(x) \geq c$ αλλιώς

(αν δηλ. προς άτοπο $\ell(x) < c$) $\{n \in \mathbb{N} : c - \varepsilon < f_n(x)\}$ πεπερασμ.

άτοπο γιατί $\exists$ άπειρα n : $f_n(x) \geq c$ ($x \in \limsup A_n^c$)

$\{n \in \mathbb{N} : c - \varepsilon < f_n(x)\}$: άπειρο $\Rightarrow c \leq \ell(x)$ (ισχύει η "$\supseteq$")

(ε) Ελέγχω το ($\subseteq$) : $\ell(x) > c$

$\Rightarrow f_n(x) > c + \frac{1}{n} > c$ για άπειρα n

πεπερ, άπειρο, c, άπειρο, $c+\varepsilon$, $c-\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, λόγω $<$

$x \in \limsup B_n^c$ (άρα ισχύει ο εγκλεισμός $\subseteq$)

Ελέγχω το ($\supseteq$):

$\exists$ άπειρα $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) > c$ αν $f_n(x) = c + \frac{1}{n} > c$

$\Rightarrow x \in \limsup B_n^c$ όμως $\overline{\lim}\,\ell(x) = c$ (όχι $> c$)

(δεν ισχύει ο $\supseteq$)

1.10

(a) • $\emptyset \in \mathcal{F}$ ($P(\emptyset) = 0$)

• Αν $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow P(X \setminus A) = 1 \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F} \\ P(A) = 1 \Rightarrow P(X \setminus A) = 0 \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F} \end{cases}$

• Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad P(A_n) = 0 \Rightarrow P(X \setminus A_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \qquad \cup(X \setminus A_n) = X \setminus (\cap A_n) \\ \qquad \Rightarrow P(\cup(X \setminus A_n)) = 1 \Rightarrow P(\cap A_n) = 0 \ (*) \\ \exists n \in \mathbb{N} \quad P(A_n) = 1 \Rightarrow P(\cup A_n) \geq P(A_n) = 1 \\ \qquad \Rightarrow P(\cup A_n) = 1 \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$

$(*) \Rightarrow \cap A_n \in \mathcal{F}$ ✓

(b) $\emptyset \in \mathcal{G}$ αλλά αν $A \in \mathcal{G} \Rightarrow P(A) = 0$ και $P(X \setminus A) = 1$

$\Rightarrow X \setminus A \notin \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$: όχι σ-άλγεβρα

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$ Επίσης αν $A \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{G}) \\ \text{ή} \\ P(A) = 1 \Rightarrow P(X \setminus A) = 0 \Rightarrow X \setminus A \in \sigma(\mathcal{G}) \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{G}) \end{cases}$

ΠΙΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ για την (1.9)

(α) Η "$\supseteq$" ΔΕΝ ισχύει π.χ. αν $f_n(x) = c - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$x \in \liminf A_n$ όμως $\overline{\lim} f_n(x) = \ell(x) = c$

(β) Η "$\supseteq$" ισχύει γιατί αν $x \in \liminf B_n$

$\Rightarrow f_n(x) \leq c \quad \forall n \geq n_0$ (για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : c + \varepsilon < f_n(x)\}$ πεπερασμ.

c

άπειρα

(γ) Η "$\supseteq$" δεν ισχύει π.χ. αν $f_n(x) \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$ ώστε άπειρες φορές να είναι από πάνω κ. άπειρες από κάτω.

για κάποιο $x \in X \Rightarrow x \in \limsup_{n \geq 1} B_n$ αφού

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : f_{n_0}(x) \leq c$ ($n_0 \geq n$, n_0: άρτιος)

όμως $\{n \in \mathbb{N} : c - \varepsilon < f_n(x)\}$ όχι πεπερασμένο $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow c \leq \limsup f_n(x)$ και $\{n \in \mathbb{N} : (c + \frac{1}{2}) - \varepsilon < f_n(x)\}$

άπειρο $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow c < c + \frac{1}{2} \leq \limsup f_n(x) \Rightarrow x \notin \{x \in X : \ell(x) \leq c\}$

ΚΕΦ 2

2.1 Θυσδο $Q(\emptyset) = 0$ κ αν $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ με B_n: ξένα ανά 2 $Q(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q(B_n)$ (βλ κ άσκ. 2.5(α) θεωρ. μέτρου σημειώσεις Εσκεράζη)

$$Q(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0$$

$P_i(\emptyset) = 0$ αφού P_i μέτρο

$$Q(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(P_i \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} P_i(B_k)\right) =$$

P_i: σ-προσθετ.

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i(B_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i(B_k))}_{Q(B_k)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q(B_k)$$

✓

2.2 (σύμφωνα με την υπόδειξη στο τέλος)

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega \Rightarrow P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq P(\Omega) = 1$ όμως από σ-προσθετικότητα $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \leq 1 < \infty \xRightarrow{\text{Απει II}} P(A_n) \to 0$

2.3 σελ (Βλ. βιντεοδιάλεξη 15/10/2020)

(α) Θέτω $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$

- $B_n \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le P(B_n) \le P(A_n) = 0 \Rightarrow P(B_n) = 0$
- B_n: ξένα ανά 2 } (από άσκ. 1.6)
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Άρα:

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \overset{\text{ξένα + σ-προσθετ.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

σύμβαση $0\cdot\infty = 0$ — Βλ. θεωρ. μέτρου

(β) Θέτω $B_n = \Omega \setminus A_n$.

$$P(B_n) = P(\Omega \setminus A_n) \overset{A_n \subseteq \Omega,\ P(A_n) \le P(\Omega) = 1 < \infty}{=} P(\Omega) - P(A_n) = 1 - 1 = 0$$

Από το (α) ερώτ. $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = 0$. όμως

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n) \overset{\text{De Morgan}}{=} \Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$\Rightarrow P\Big(\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 0$ και $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$ με $P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le 1 < \infty$

$$\Rightarrow \underbrace{P\Big(\Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)}_{=0} = P(\Omega) - P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \Rightarrow$$

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1$$

2.4 (Βλ. βιντεοδιάλεξη 15/10/2020)

(α) *** Τα (α), (β) της 2.3 <u>δεν</u> ισχύουν αν έχω <u>$(A_i)_{i\in I}$ με I: υπεραριθμήσιμο</u>

Θέτω $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1))$, $P = \lambda$ ← Lebesgue

και $A_i = \{i\}$ με $I = (0,1) \Rightarrow \lambda(A_i) = \lambda(\{i\}) = 0$

όμως $\lambda\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \lambda((0,1)) = 1 \neq 0$

(β) Θέτω $B_i = (0,1) \setminus \{i\} \quad \forall i \in (0,1) \Rightarrow \lambda(B_i) = \lambda((0,1)) - \lambda(\{i\}) = 1$

και $I' = (0,1)$

$\bigcap_{i\in I'} B_i = \emptyset$

(2.5) (Βλ. βιντεοδιάλεξη 15/10/2020)

<u>ΣΚΕΨΗ</u>: Πόσα A_β μπορούν να έχουν $P(A_\beta) > \frac{1}{100}$;

<u>Απάντηση</u>: Το πολύ 100 (αφού $P(\Omega)=1$)

Θέτω $I_n = \{\beta \in B : P(A_\beta) \geq \frac{1}{n}\}$. Σύμφωνα με τη σκέψη $|I_n| \leq n$, και $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ αλλιώς (αν προς άτοπο) υπάρχουν τουλάχιστον $n+1$ στοιχεία $A_{\beta_1}, \dots, A_{\beta_{n+1}}$ με $\beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in I_n$ (διαφορετ. ανά 2)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_{\beta_i}\right) \overset{\sigma\text{-προσθετ.}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} P(A_{\beta_i}) \geq (n+1)\cdot\frac{1}{n} > 1 \quad \text{άτοπο}$$

$\Rightarrow |I_n| \leq n \Rightarrow B$: αριθμήσιμη ένωση πεπερασμ. συνόλων $\Rightarrow B$: αριθμήσιμο.

(2.6) Είναι γνωστό από την Ανελ ΙΙ ότι $\underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n)$

Ελέγχω τις υπόλοιπες. (Βλ. άσκ 2.2 θεωρ. μέτρου Εσκεμένα)

<u>Για την 1^n</u>: $\liminf_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$

Θέτω $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_n$ όπου $B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq B_{n+2} \subseteq \dots$

(δηλ. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα <u>σκβ</u>: $B_n \nearrow$)

Επίσης $B_n \subseteq A_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow P(B_n) \leq P(A_n) \xRightarrow[\text{προτ. 2.3.11}]{\text{Ανελ Ι}}$

$\liminf_{n\geq 1} P(B_n) \leq \liminf_{n\geq 1} P(A_n)$ όμως $B_n \nearrow$ άρα

"συνέχεια" μέτρου + $B_n \nearrow$ Βλ. θεωρ. μέτρου

$$\left\{\begin{matrix} P(B_n) \nearrow \\ + \\ \text{άνω φραγμένη} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \liminf_{n\geq 1} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = P\left(\liminf_{n\geq 1} A_n\right)$$

$\Rightarrow P\left(\liminf_{n\geq 1} A_n\right) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n)$

<u>Για την 3^n</u> $\limsup_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$

Θέτω $\Delta_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ όπου $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \Delta_{n+2} \supseteq \dots$

($(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολ. συνόλων <u>σκβ</u>: $\Delta_n \searrow$)

$\Delta_n \supseteq A_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ($\Delta_1 \supseteq \Delta_n \supseteq A_n \ \forall n\in\mathbb{N}$)

και $P(\Delta_n) \leq 1 < \infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$P(\Delta_n) \geq P(A_n) \overset{\text{Απει I}}{\Longrightarrow} \limsup_{n\geq 1} P(\Delta_n) \geq \limsup_{n\geq 1} P(A_n) \Rightarrow$ (13)

Από Απει II $\limsup_{n\geq 1} P(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} P(\Delta_n)$ αφού είναι $P(\Delta_n)\downarrow$ και κάτω φραγμένη. Επίσης από "συνέχεια" του μέτρου / Πρότ. 2.5 (v)

$$\lim_{n\to\infty} P(\Delta_n) = P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\Big) = P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = P\big(\limsup_{n\geq 1} A_n\big)$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} P(A_n) \leq P\big(\limsup_{n\geq 1} A_n\big)$$

(2.7) • $\mathrm{supp}(\nu) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{V:\text{ ανοιχτό}} \{V : V \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτ}, \nu(V) = 0\}$

$\nu(V) = 0 \Rightarrow V \cap [2,5] = \emptyset \Rightarrow V \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\setminus[2,5]}_{\text{ανοιχτό}}$ με ίσο με 0

$\Rightarrow \mathrm{supp}(\nu) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}\setminus[2,5]) = [2,5]$

• $\mathrm{supp}(\mu_1) = \mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})}_{\text{ανοιχτό με μέτρο 0}}$

• $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}\setminus\{V : V \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό}, \mu(V) = 0\}$

Για $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό

$\mu(V) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu_1(V) = 0 \\ \text{και} \\ \nu(V) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} V \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \\ \text{και} \\ V \subseteq \mathbb{R}\setminus[2,5] \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$V \subseteq (\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) \cap (\mathbb{R}\setminus[2,5]) \underset{\text{De Morgan}}{=} \mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}\cup[2,5])$: ανοιχτό

με $\mu(\mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}\cup[2,5])) = 0$

$\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{N}\cup[2,5]$

(2.8) (σύμφωνα με την υπόδειξη στο τέλος των σημειώσεων) όσο $(F, \|\ \|)$ διαχωρίσιμος χώρος

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

$\forall q \in \mathbb{Q}$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ βρίσκω (αν υπάρχει)

$y_{q,n} \in F$: $|y_{q,n} - q| < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ Θέτω A: το σύνολο αυτών

των y δηλ $A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y_{q,n} : |y_{q,n} - q| < \frac{1}{n}\}$: αριθμήσιμο

$\hookrightarrow y \in (q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n})$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x \in F$ $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ περιέχει ένα $q \in \mathbb{Q}$ και $\exists k \in \mathbb{N}$

: $(q - \frac{1}{k}, q + \frac{1}{k}) \subseteq (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ και $\exists y \in A$: $y \in (q - \frac{1}{k}, q + \frac{1}{k})$

$\Rightarrow A \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \neq \emptyset \Rightarrow A$: πυκνό στο F και αριθμήσιμο

$\Rightarrow F$: διαχωρίσιμος χώρος

Θέτω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τα στοιχεία του A και

$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\cdot \delta_{x_k}$$

δ_{x_k} : το μέτρο Dirac στο x_k

$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1, & x_k \in A \\ 0, & x_k \notin A \end{cases}$ για $A \subseteq \mathbb{R}$ τυχαίο

Δείξω μ: μέτρο στο $\mathbb{R}$ (δηλ. $\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$: χώρος μέτρου

- $\mu(\emptyset) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\delta_{x_k}(\emptyset) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\cdot 0 = 0$

- Έστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ξένα ανά 2

σ-προσθετ. του δ_{x_k} $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\delta_{x_k}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_{x_k}(B_n) =$$

αλλαγή άθροισης

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-k}\delta_{x_k}(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\delta_{x_k}(B_n) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \quad \checkmark$$

2.9 $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : B : \text{αριθμ. ή } \mathbb{R}\setminus B : \text{αριθμ.}\}$

- $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(\mathbb{R}) = 1$ (← αν δείξω κ την σ-προσθετ. θα είναι μέτρο πιθανότητας)

- Έστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ ξένα ανά 2

(Π1) $\forall n\in\mathbb{N}$ B_n : αριθμήσιμο $\Rightarrow \begin{cases} \mu(B_n) = 0 \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n : \text{αριθμήσιμο} \end{cases}$ (ως αριθμ. ένωση αριθμήσιμων)

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0$ και

σύμβαση

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \infty\cdot 0 = 0$

(Π2) $\exists\, k\in\mathbb{N}$: $\mathbb{R}\setminus B_k$ αριθμήσιμο. (δηλ. B_k : όχι αριθμ.)

$$\mathbb{R}\setminus B_k \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\setminus B_n) = \mathbb{R}\setminus\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \Rightarrow$$

$$\mu(\mathbb{R}\setminus B_k) = 0 \geq \mu\left(\mathbb{R}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\left(\mathbb{R}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0 \xRightarrow{\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ αριθμ.}} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

2.10

(a) (Βλ. Θεώρ. 3.5.7 Πραγματ. Ανάλυση σημειώσεις Π. Βαλέττα)

X: διαχωρίσιμος $\Rightarrow \exists\ D \subseteq X$ αριθμήσιμο & πυκνό ώστε $\overline{D} = X$

Θέτω $D = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\mathcal{E} = \{B(a_n, q) : q \in \mathbb{Q}^+, a_n \in D\}$

(που είναι αριθμήσιμη οικογ. ανοιχτών συνόλων)

Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Ν.δ.ο. το A είναι ένωση μπαλών της $\mathcal{E}$

έστω $x \in A$ $\forall q \in \mathbb{Q}_+$ (επειδή D: πυκνό)

$D \cap B(x, q) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ a_{n_q} \in D : a_{n_q} \in B(x, q) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in B(a_{n_q}, q)$

Επίσης επειδή A: ανοιχτό $\exists\ \varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$

Αν διαλέξω ένα $q_x \in \mathbb{Q}^+$ με $0 < q_x < \frac{\varepsilon_x}{2} \Rightarrow$

$B(x, q_x) \subseteq B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ και $\exists\ a^x_{n_q} : x \in B(a^x_{n_q}, q_x)$

(από πριν)

Αρκεί ν.δ.ο. $B(a^x_{n_q}, q) \subseteq A$ και θα έχω τελειώσει

(γιατί $A \subseteq \bigcup_{x \in A} (a^x_{n,q}, q_x)$ και οι μπάλες είναι αριθμήσιμες το πλήθος)

Έστω $y \in B(a^x_{n_q}, q) \overset{\text{έστω}}{\underset{\rho \text{ μετρική του } X}{\Rightarrow}} \rho(x, y) \leq \underbrace{\rho(x, a^x_{n_q}) + \rho(a^x_{n_q}, y)}_{< q_x + q_x < \varepsilon_x}$

$\Rightarrow y \in B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$

(β) W: ανοιχτό (ως ένωση ανοιχτών) υποσύνολο του $X \overset{\text{ερωτ.}}{\underset{(a)}{\Longrightarrow}}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση από μπάλες της οικογένειας $\mathcal{E}$

Πιο συγκεκριμένα $\forall x \in W$ $\exists\ V_x$: ανοιχτό, $\subseteq X$, $\mu(V_x) = 0$ και $x \in V_x$ με τη διαδικασία παραπάνω βρίσκω

$B(a^x_{n_q}, q_x) \subseteq V_x \subseteq W$ και $\mu(B(a^x_{n_q}, q)) = 0$ (ως υποσύνολο συνόλου με μηδενικό μέτρο). Οι μπάλες αυτές είναι το πολύ αριθμ. το πλήθος και τις θέτω $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \mu(W) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(U_i) = 0 \cdot \infty = 0$

(3.1) Θνδο • $X \in \mathcal{G}$ • αν $A, B \in \mathcal{G}$ κ $A \subseteq B \Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{G}$

• αν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολ. στην $\mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}$

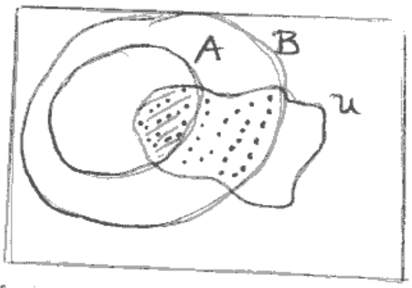
• $X \in \mathcal{A}$ και $P(X\cap \mathcal{U}) = P(\mathcal{U}) = \underbrace{P(X)}_{1}\cdot P(\mathcal{U}) \to X\in\mathcal{G}$

• $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow \begin{cases} P(A\cap\mathcal{U}) = P(A)\cdot P(\mathcal{U}) \\ P(B\cap\mathcal{U}) = P(B)\cdot P(\mathcal{U}) \end{cases}$

$$P(B\setminus A)\cdot P(\mathcal{U}) \overset{P(A)\le P(B)<\infty}{=} [P(B)-P(A)]\,P(\mathcal{U}) = P(B)\cdot P(\mathcal{U}) - P(A)\cdot P(\mathcal{U}) =$$

$$= P(B\cap\mathcal{U}) - P(A\cap\mathcal{U}) \underset{\text{με } P(A\cap\mathcal{U})<\infty}{\overset{B\cap\mathcal{U}\supseteq A\cap\mathcal{U}}{=}} P((B\cap\mathcal{U})\setminus(A\cap\mathcal{U})) =$$

$$= P((B\setminus A)\cap\mathcal{U}).$$



$(B\cap\mathcal{U})\setminus(A\cap\mathcal{U}) =$
$= (B\cap\mathcal{U})\cap(A^c\cup\mathcal{U}^c) =$
$= [(B\cap\mathcal{U})\cap A^c]\cup\underbrace{[(B\cap\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^c]}_{=\emptyset}$
$= [B\cap\mathcal{U}\cap A^c] =$
$= [B\cap A^c\cap\mathcal{U}] = (B\setminus A)\cap\mathcal{U}$

• $$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\cdot P(\mathcal{U}) = \Big[\lim_{n\to\infty} P(A_n)\Big]\cdot \underbrace{P(\mathcal{U})}_{\text{αριθμός}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(P(A_n)\cdot P(\mathcal{U})\big) \underset{\substack{A_n\in\mathcal{G} \\ \forall n\in\mathbb{N}}}{\overset{\text{υπόθεση}}{=}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n\cap\mathcal{U}) =$$

$(A_n\cap\mathcal{U})_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$

$$= P\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap\mathcal{U})\Big]$$

(3.2) ▸ Θνδο • $\Omega \in \mathcal{A}$ • αν $A, B\in\mathcal{A}$ με $A\subseteq B \Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{A}$ • αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$ στην $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

• $\Omega \in \mathcal{A}$

• $\{1,2,3,4\}\setminus\{1,2\} = \{3,4\} \in \mathcal{A}$ $\qquad \Omega\setminus\{1,4\} = \{2,3\}\in\mathcal{A}$

$\Omega\setminus\{2,3\} = \{1,4\}\in\mathcal{A}$ $\qquad \Omega\setminus\emptyset \in \mathcal{A}$

$\Omega\setminus\{3,4\} = \{1,2\}\in\mathcal{A}$ $\qquad \Omega\setminus\Omega \in\mathcal{A}$

και τα τετριμμένα → κάθε 2σύνολο πλην το κενό ανήκει στην $\mathcal{A}$

• οι αύξουσες ακολουθίες θα είναι της μορφής :

- $A_1 = \emptyset \subseteq A_2 = A \subseteq A_3 = \Omega$ με A: διάνυσμα ή $\emptyset$ ή Ω (17)
- $A_1 = A \subseteq A_2 = \Omega$ με A: —//— —//— —//—
- $A_1 = A$ με A: —//— (όχι Ω) —//—

και όλους τους υπόλοιπους όρους ίσους με Ω στις 2 πρώτες περιπτώσεις ή ίσους με A
Σε κάθε περίπτωση η ένωση ανήκει στην $\mathcal{A}$

- Όμως δεν είναι σ-άλγεβρα στο Ω
  Αν ήταν, θα ήταν και κλειστή στις πεπερασμ. τομές
  όμως $\{2,3\} \cap \{3,4\} = \{3\} \notin \mathcal{A}$ Άρα δεν είναι σ-άλγεβρα

(3.3) Αφού C_1 κλειστή στις πεπερασμένες τομές από θεώρημα π-λ $\delta(C_1) = \sigma(C_1)$ (*)

$$\left.\begin{cases} C_1 \subseteq C_2 \\ + \\ C_2 \text{ κλάση Dynkin} \end{cases}\right\} \Rightarrow \delta(C_1) \subseteq C_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} \sigma(C_1) \subseteq C_2$$

(3.4) (ισοδύναμος χαρακτηρισμός των κλάσεων Dynkin)
($\Leftarrow$) Αν για την $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ισχύει ότι
- $X \in \mathcal{A}$ • αν $B \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{A}$
- αν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. ξένων ανά 2 στοιχείων της $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$

τότε (ισχύουν οι 2 πρώτες συνθήκες του ορισμού) ελέγχω την 3^{η} συνθήκη του ορισμού. Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\nearrow$ ακολ. στην $\mathcal{A}$ θ.ν.δ.ο. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Θέτω $B_1 = A_1$ και $B_n = A_n \setminus \bigcup_{\kappa=1}^{n-1} A_\kappa$ με B_n: ξένα ανά 2 κ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (από άσκ. 1.6)

όμως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

($\Rightarrow$) (ομοίως ελέγχω μόνο την 3^{η} συνθήκη)
Έστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά 2 συνόλων της $\mathcal{A}$. Θέτω
$A_1 = B_1$ και $A_n = \bigcup_{\kappa=1}^{n} B_\kappa \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n) \nearrow$ ακολ. στην $\mathcal{A}$

με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Όμως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$

ΚΕΦ 4

4.1 (α) ⇒ (β) προφανές αφού τα ανοιχτά ανήκουν στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

(α) ⇒ (γ) προφανώς αφού κάθε $[a,b]$ ανήκει στα Borel (σύμφωνα με την υπόδειξη στο τέλος των σημειώσ.)

(β) ⇒ (α)

Θέτω $\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

η οποία είναι σ-άλγεβρα από άσκ 1.7 (α)

Επίσης αν $\mathcal{E}$ η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (δηλ. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \overset{\mathcal{D}: \sigma\text{-αλγ.}}{\Longrightarrow} \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}$ άρα $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(γ) ⇒ (α) Θέτω $\mathcal{K}$ την οικογένεια των $[a,b] : a < b \in \mathbb{R}$

$\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$ με $\mathcal{D}$ σ-άλγεβρα

$\Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{K})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{D}$ όμως $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

4.2 Τα σύνολα $\{-\infty\}, \{+\infty\}$ είναι κλειστά, η X είναι μετρήσιμη (αφού είναι τυχ. μετ/τη) $\Rightarrow \{-\infty\}, \{\infty\}$ ανήκουν στα Borel $\Rightarrow \{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}$

4.3 (⇐) Έστω a_i η τιμή που παίρνει σε κάθε σύνολο της διαμέρισης (όχι αναγκαία διαφορετικά)

$\Rightarrow$ αν $B \subseteq \{a_i : i \in I\} = E \quad f^{-1}(B) = \bigcup_{i\in B} f^{-1}(\{a_i\}) = \bigcup_{i\in B} A_i \in \underbrace{\sigma(\mathcal{C})}_{= \mathcal{F}}$

αφού B αριθμήσιμο

Επίσης αν $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τυχαίο τότε αν $\exists\, a_i \in E$ ώστε $a_i \in \Delta$

$\Rightarrow f^{-1}(B) = \bigcup_{a_i \in E \cap \Delta} A_i \in \sigma(\mathcal{C})$ αλλιώς $f^{-1}(B) = \emptyset \in \sigma(\mathcal{C})$

(⇒) $f : \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη. Έστω $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε

$f^{-1}(\Delta) = \bigcup_{i\in J} A_i$ για $J \subseteq I$ (ίσως και κενό)

Έστω ακόμη προς άτοπο ότι $\exists\, k \in I$ κ $a_k, b_k \in A_k$ (19)

ώστε $f(a_k) \neq f(b_k)$ τότε για $\Delta = \{f(a_k), f(b_k)\}$ ισχύει

ότι $f^{-1}(\Delta) = \{a_k, b_k\} \subseteq A_k$ και $a_k, b_k \notin A_j \quad \forall\, j \neq k \in I$

άτοπο αφού $\{a_k, b_k\} \notin \sigma(G)$. άρα f σταθερή

σε κάθε σύνολο της διαμέρισης

(4.4) (Βλ. κ βιντεοδιάλεξη 22/10/2020)

(α) Για $\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\}$

$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = -\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \quad X_n(\omega) < -M$

θέτω $B_{n,q} = [X_n < -q] \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}_{>0}$

$\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} B_{k,q}$

όμως X_n : μετρήσιμη ως τυχ. μετ/τη $\Rightarrow B_{k,q} \in \mathcal{F}$
$\forall\, k \in \mathbb{N}$,
$\forall\, q \in \mathbb{Q}_{>0}$

$\Rightarrow \{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\} \in \mathcal{F}$

Για $\{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\}$

$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \quad X_n(\omega) > M$

θέτω $C_{n,q} = [X_n > q] \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}_{>0}$

$\{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} C_{n,q} \in \mathcal{F}$ ομοίως με πριν

(β) Το ζητούμενο σύνολο είναι το

$\underbrace{\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει}\}} \cap \underbrace{\{\lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\}}$

$\underbrace{\{\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n\}} \cap \underbrace{\{\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\}}$

$\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ κ $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ μετρήσ.

$\underbrace{\{\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \{0\}\}}$

Άρα ανήκει στην $\mathcal{F}$

$\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και οι συν/σεις

$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ είναι μετρήσιμες

Άρα το σύνολο ανήκει στην $\mathcal{F}$

4.5 (Βλ. η βιντεοδιάλεξη 20/10/2020 $2^{η}$ ώρα)

Βλ $2^{η}$ λύση Πανεπ. Σεπτ. Τεσσ. 2016-17 μαθ 06-08 σελ 9

Υποθέτω ότι $f \nearrow$ (ομοίως για $f \searrow$).

Προσοχή f: όχι συνεχής.

Αρκεί νδο $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ από το πόρισμα 4.4. (για την ακρίβεια ότι είναι διάστημα)

Θυμίζω ότι:

- το $\emptyset$ είναι διάστημα (π.χ. (x,x))
- ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα αν $\forall \alpha, \beta \in I$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ ώστε $a < x < b$ ανήκει στο I

Θνδο δηλ. $I = f^{-1}((-\infty, x])$: διάστημα

~~• αν $I = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ είναι διάστημα~~

~~(αφήνω την τετριμμένη περίπτωση του μονοσυνόλου γιατί $f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } \nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \\ \{x\} & \text{αν } \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \end{cases}$)~~

~~• αν $I \neq \emptyset$ τότε για $a, b \in I$ με $a < b$ και $\forall y \in \mathbb{R}$: $a < y < b$ ισχύει ότι~~

Έστω $a, b \in I$ με $a < b$ τότε για $y \in (a, b)$

$$\xrightarrow{f \nearrow} f(a) \leq f(y) \leq f(b) \leq x \quad \left(\text{αφού } \ b \in f^{-1}((-\infty, x]) \Rightarrow f(b) \leq x \right)$$

4.6 (Βλ κεφ 5 §2 Θεωρ. μέτρου)

$$[f < g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\underbrace{[f < q]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cap \underbrace{[g > q]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\leftarrow$ αφού f, g μετρήσ.

$$[f \leq g] = \underbrace{[g < f]^c}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \longrightarrow \text{όπως παραπάνω } [g < f] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$[f = g] = [f \leq g] \setminus [f < g] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

4.7 Έστω $\omega \in \Omega$

(a) $T(\omega) = \infty \Leftrightarrow \forall n \geq 1 \quad X_n(\omega) \leq 2$ γιατί $T(\omega) = \infty \Leftrightarrow$

$\min\{n \geq 1 : X_n > 2\} = \infty \Leftrightarrow \{n \geq 1 : X_n > 2\} = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X_n \leq 2 \quad \forall n \geq 1$

Άρα $\{T = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{[X_n \leq 2]}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

γιατί X_n: μετρήσιμη

(β) τ = τυχ. μετ/τη $\Leftrightarrow$ τ: μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \tau \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \\ \cdot\ \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F} \end{array}\right\}$$ Αρκεί νδο $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\tau^{-1}\big((-\infty, x]\big) \in \mathcal{F}$ από πόρισμα 4.4

$$\tau^{-1}\big((-\infty, x]\big) = \begin{cases} \phi \in \mathcal{F} & \text{αν } x < 1 \\ \tau^{-1}\{(-\infty, x] \cap \mathbb{N}_{>0}\} & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\tau(\omega) = n \Leftrightarrow X_k \leq 2 \quad \forall\ k < n$$

Άρα $\tau^{-1}\{(-\infty, x] \cap \mathbb{N}_{>0}\} = \bigcup_{n \in (-\infty, x] \cap \mathbb{N}_{>0}} \ \bigcap_{1 \leq k \leq n-1} [X_k \leq 2] \in \mathcal{F}$

αν $x \geq 2$

και $[X_n > 2] \in \mathcal{F}$ αν $x = 1$

Άρα τ: τυχ. μετ/τη (βλ. και παράδ. 4.10)

(4.8) Αν $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ μετρήσιμη(*) τότε $Y = p(X)$ είναι μετρήσιμη (άρα τυχ. μετ/τη) ως σύνθεση μετρήσιμων (πρότ. 4.8)

(*) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-μετρήσιμη

Από την πρόταση 4.3 αρκεί νδο $p^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ A \in \mathcal{K}$ για

$\mathcal{K}$ = οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$

έστω $A \in \mathcal{K} \Rightarrow A = A_1 \times \dots \times A_k$ με A_i = ανοιχτά στο $\mathbb{R}$

$$p^{-1}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} X_{i_j} \in A_j \text{ για } i_j \in \{i_1, \dots, i_k\},\ X_j \in \mathbb{R} \text{ για } \\ i \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \end{array} \right\}$$

Αφού $A_j, \mathbb{R}$ ανοιχτά $\forall j \in [k] = \{1, \dots, k\}$ το καρτεσιανό τους είναι ανοιχτό άρα ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Άρα p: μετρήσιμη

4.9 Εξ ορισμού $\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\sigma(f_i)\right)$ είναι σ-άλγεβρα και $\sigma(f_i)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο Ω που κάνει την f_i μετρήσιμη. (Θέτω για συντομία $\mathcal{D}=\bigcup_{i\in I}\sigma(f_i)$). Γνωρίζω ότι

- $\sigma(f_i) \subseteq \sigma(\mathcal{D}) \quad \forall i \in I$

Έστω προς άτοπο ότι $\exists\ \mathcal{K} \subsetneq \sigma(\mathcal{D})$ σ-άλγεβρα που να κάνει όλες τις f_i μετρήσιμες δηλ. $\sigma(f_i) \subseteq \mathcal{K}$

$\Rightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathcal{K} \Rightarrow \sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{K} \subsetneq \sigma(\mathcal{D})$ άτοπο

Άρα $\sigma(\mathcal{D})$ είναι η ελάχιστη τέτοια σ-άλγεβρα

4.10 (Βλ. β' πανεπ. σημ. Τρέβεζας 2016-17 Μαθ 06-08 σελ 14 και σελ 5 πόρισμα)

(a) $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και f: συνεχής άρα

$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ από πρόταση 4.3 κ πόρισμα 4.5 (f: μετρήσιμη)

όμως αν $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοιχτών του $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{T})) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \llcorner \{f^{-1}(A) : A\in\sigma(\mathcal{T})\}$

- f: συνεχής $\rightarrow$ αντιστρέφει τα ανοιχτά σε ανοιχτά

Άρα $f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{T})) \subseteq \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{T}))$
(η επειδή το $f^{-1}(\sigma(\mathcal{T}))$ είναι σ-άλγ που περιέχει το $f^{-1}(\mathcal{T})$)

- f: 1-1, επί με συνεχή αντίστροφη $\rightarrow f$: ομοιομορφ.

(Από πρότ 4.3.9 Πραγμ. Ανάλ.)

$G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$ Άρα $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{T}))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\llcorner \mathcal{B}(\mathbb{R})$

όμως f: μετρήσιμη $\Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{T})) \subseteq \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{T}))$

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{T})) \underset{f:\text{ ομοιομορφ.}}{=} \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(β) (Βλ. πανεπ. σημ. 2017-18 Τρέβ. μαθ 09 σελ. 2)

$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Έστω $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ θέτω $B_+ = B\cap[0,\infty)$ και $B_- = B\cap(-\infty,0)$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{B_+ \cup B_-}_{\text{ξένα}}) = f^{-1}(B_+) \cup \underbrace{f^{-1}(B_-)}_{\emptyset} = f^{-1}(B_+)$$

$$= \underbrace{\{\sqrt{x} : x \in B_+\}}_{\sqrt{B_+}} \cup \underbrace{\{-\sqrt{x} : x \in B_+\}}_{-\sqrt{B_+}}$$

Συμβολίζω

$$\sigma(f) = \{\sqrt{B_+} \cup [-\sqrt{B_+}] : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

4.11 (Βλ. παν. σημ. 2017-18 Τρέβ. μαθ 09 και συντεοδιάλεξη 22/10/2020)

---

*Αυτή η άσκηση είναι σημαντική για τον εξής λόγο:

Αν έχω $\sum \frac{1}{n^{a_n}}$ με $a_n > 1$ ίσως συγκλίνει (Βλ. Ανει II ασκ 2.24(δ))

(αν π.χ. a_n πολύ κοντά στο 1 π.χ. $1+\frac{1}{n}$)

όμως αν για $a_n > 1+\varepsilon \to$ συγκλίνει. Μας δίνει δηλ. λίγο "χώρο" (μπορεί να μην μας αρκεί το $X>1$)

Λύση Χελιώτη

$$\{X>1\} = \bigcup_{n\geq 1} \{X > 1+\tfrac{1}{n}\} \implies \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : P(X > 1+\tfrac{1}{n_0}) > 0$$

μικρότερο του αρχικού αλλά μας κάνει

αν όλα είχαν πιθανότητα 0, από υποπροσθετικότητα $P(X>1) = 0$

Λύση Τρέβεζα

Έστω προς άτοπο ότι $\forall \varepsilon > 0$ $P(X > 1+\varepsilon) = 0$ τότε

για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ έχουμε $P(\underbrace{X > 1+\tfrac{1}{n}}_{A_n}) = 0$

Θέτω $A_n = [X > 1+\frac{1}{n}]$ όπου $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$ ακολ. συνόλων

$P(X>1) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$ αφού $\lim_{n\to\infty} \{X_n > 1+\frac{1}{n}\} = \{X>1\}$

(Από πρότ. 2.5 v) $\underbrace{\lim_{n\to\infty} P(A_n)}_{0} = P(\lim_n A_n)$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>

ΚΕΦ 5

5.1 (Βλ. 5 βιντεοδιάλεξη 27/10/2020)

$$1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \left(1 - 1_{A_1}(x)\right)\left(1 - 1_{A_2}(x)\right) \cdots \left(1 - 1_{A_n}(x)\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = E\left(1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)$$

Επίσης $1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{\text{κατηγοριοποιώ τα σύνολα ανά κ-άδες (ή μάλλον τις δείκτριες)}} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} 1_{A_{i_1}} \cdots 1_{A_n}\right]$ (*)

$\boxed{\text{Δείκτρια τομής = γινόμενο δεικτριών}}$

και έχω

$$1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}}\right] =$$

$$= 0 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}}$$

$$\Downarrow$$

$$E\left(1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}}\right) =$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} E\left(1_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}\right)$$

5.2 (Βλ. παν. σημ. τεύχ. α.ε. 2016-17 μαθ 11-13 σελ 1)

Σύμφωνα με την υπόδειξη θέτω $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$. Τότε

↳ αριθμεί σε πόσα σύνολα ανήκει ένα $\omega \in \Omega$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

και από υπόθεση $\boxed{E(X) > k-1}$

Έστω προς άτοπο ότι $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = 0$ $\forall$ κ-άδα από i_j. Παρατηρώ ότι

$$\{X > k-1\} = \{X \ge k\} = \bigcup_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right)$$

$$\Rightarrow P(\{X > k-1\}) \leq \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} 0 = 0$$ (25)

$\Downarrow$ $X \leq k-1$ μ.σ.

$$E(X)=\int X\,dP \leq \int k-1\,dP \leq k-1 \underbrace{\int dP}_{1} = k-1$$ <u>άτοπο</u>

Άρα υπάρχουν $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ με $P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})>0$

5.3 (Βλ. βιντεοδιάλεξη $29/10/2020$ 1η ώρα και απει II προτ. 8.4.1)

Ισοδύναμος ορισμός κυρτότητας
$$\boxed{\text{αν } x,y\in I,\ \lambda\in(0,1) \longrightarrow \phi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\phi(x)+(1-\lambda)\phi(y)}$$

Κανονικά πρέπει νδο $E(X)\in I$ και άρα ορίζεται το $\phi(E(X))$.

Έστω $t=E(X)$. Αν t: εσωτ. του I τότε (από θεωρ 8.2.5 Απει II) ϕ: συνεχής στο t. (όχι όμως αναγκαία παραγωγ.)

Από παρατ. 8.1.3 (a) στον Απει II προκύπτει ότι ισοδύναμο του ορισμού της κυρτότητας είναι το εξής:

αν $x\in I$

$\exists\, a\in\mathbb{R}$: $\phi(x)\geq\phi(t)+a(x-t)$

Θέτω όπου $x\longrightarrow X$ (την τυχ. μετ/τη)

$$\phi(X) \geq \underbrace{\phi(t)}_{\text{σταθ.}} + \underbrace{a}_{\text{σταθ}}(X-\underbrace{t}_{\text{σταθ}}) \xRightarrow{\text{μέση τιμή}}$$

$$E(\phi(X)) \geq \phi(t)+a\underbrace{(E(X)-t)}_{0} = \phi(t)=\phi(E(X))$$

Αν δούμε την παρατήρηση το δεύτερο μέλος έχει τον λόγο $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ανάλογα αν $x>t$ ή $x<t$ πάμε στο άλλο μέλος ή όχι

5.4 (Βλ. υπόδ. στο τέλος & ορισμός 8.1.2(δ) Απει II)

* Μια $f: I\to\mathbb{R}$ συν/ση λέγεται κοίλη αν $-f$: κυρτή

* $E(\log X)$ ορίζεται και είναι πραγματικός αριθμός άρα υποθέτω ότι $X(\omega)\neq 0$ $\forall\omega\in\Omega$

Χρησιμοποιώ την άσκ. 5.3 έχω ότι ισχύουν οι υποθέσεις

- X: τυχ. μετ/τη με τιμές στο $I=(0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$
- $\phi: (0,\infty)=I\longrightarrow\mathbb{R}$ με $\phi(x)=-\log$ είναι κυρτή συν/ση
- EX, $E\{\phi(X)\}$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί

Άρα $-\log(E(X))\leq E(-\log(X)) \Rightarrow$

$-\log(E(X))\leq -E(\log(X)) \Rightarrow$

$\log(E(X)) \geq E(\log(X))$

5.5 (βλ. 5 λύσεις Volteras)

Από την ανισότητα Markov $P(e^{aX} > e^{at}) \leq \dfrac{E(e^{aX})}{e^{at}}$

αφού e^{aX}: τυχ. μετ/τη με τιμές στο $[0,\infty]$

$$P(e^{aX} > e^{at}) \overset{\text{exp είναι αύξουσα}}{=} P(aX > at) \overset{a>0}{=} P(X>t) \leq \underbrace{E(e^{aX})}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^{-at}$$

και αφού $e^{aX} \in (0,\infty) \to E(e^{aX}) = c > 0$

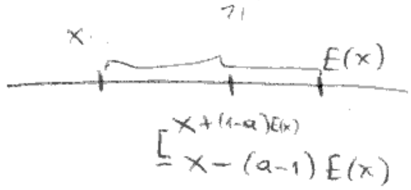
$$\Rightarrow P(X>t) \leq c\, e^{-at}$$

5.6 (βλ. βιντεοδιάλεξη 2η ώρα 29/10/2020) $\boxed{\text{ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ}}$

(α) $P(X \leq a\,EX) = P(X - E(X) \leq \overbrace{(a-1)}^{<0} EX) \overset{*}{\leq}$

$\leq P(|X - E(X)| \geq \overbrace{(1-a)}^{>0} E(X)) \overset{\text{Ανισότητα Chebyshev}}{\leq} \dfrac{Var(X)}{(1-a)^2 (E(X))^2}$

$*$



(β) $A = \{X > a\,EX\} \to$ (τα $\omega \in \Omega$ ώστε η X να παίρνει π.χ. τα $\frac{3}{4}$ της μέσης τιμής)

$$EX = E(X\mathbb{1}_A) + E(X\mathbb{1}_{A^c}) \leq$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz} + ✪}{\leq} [E(X^2)]^{1/2} [E(\mathbb{1}_A^2)]^{1/2} + a\,E(X)E(\mathbb{1}_{A^c})$$

$$\overset{P(A^c)\leq 1}{\leq} (E(X^2))^{1/2} \cdot (P(A))^{1/2} + a\,EX$$

$$\Rightarrow \underbrace{E(X) - a\,E(X)}_{=(1-a)E(X)} \leq P(A)^{1/2} [E(X^2)]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-a)^2 (E(X))^2}{E(X^2)} \leq P(A) = P(X > a\,EX)$$

✪

$E(X\mathbb{1}_{A^c}) = \int X \mathbb{1}_{A^c}\, dP$

$= \int_{A^c} X\, dP \overset{\text{στο } A^c:\ X \leq a E(X)}{\leq}$

$\leq \int_{A^c} a\, E(X)\, dP = a\,E(X) \cdot \int_{A^c} dP$

$= a\,E(X) \cdot E(\mathbb{1}_{A^c})$

5.7 (βλ. λύσεις Volterra σελ 7)

$X \cdot Y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{XY} \geq 1 \Rightarrow E(\sqrt{XY}) \geq 1$

Από Cauchy - Schwarz

$$\left| E(\sqrt{X} \cdot \sqrt{Y}) \right| \leq \| \sqrt{X} \|_2 \, \| \sqrt{Y} \|_2 = \left(E[(\sqrt{X})^2] \right)^{1/2} \left(E[(\sqrt{Y})^2] \right)^{1/2}$$

$$\underline{[} \, |E(\sqrt{XY})| \qquad = (E(X))^{1/2} \cdot (E(Y))^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad 1^2 \leq \left| E(\sqrt{XY}) \right|^2 \leq E(X) \cdot E(Y)$$

Αν θέσω όπου Y το $\frac{1}{X}$

$$\left| E\left(\sqrt{X \cdot \tfrac{1}{X}}\right) \right|^2 \leq E(X) \cdot E\left(\tfrac{1}{X}\right) \underset{\substack{\text{αφού} \\ X \in (0,\infty)}}{\overset{E(X)>0}{\Rightarrow}} E\left(\tfrac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{E(X)}$$

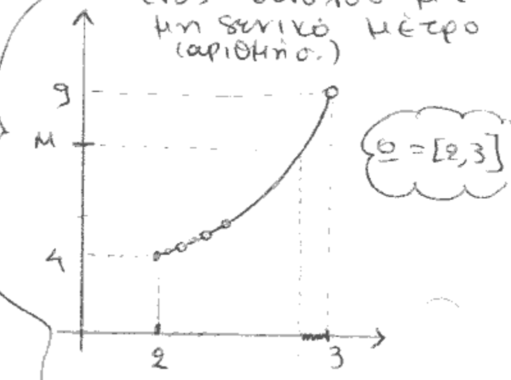
$$\underline{[} \; E(1) = \int 1 \, dP = 1$$

5.8 (βλ. διάλεξη 5/11/2020)

Παρατηρώ ότι $f\left(2 + \frac{1}{2n+1}\right) = -(2n+1) \xrightarrow{n \to \infty} -\infty \to \inf f$

$f\left(2 + \frac{1}{2n}\right) = 2n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \to \sup f$

Στην ουσία είναι η x^2 εκτός ενός συνόλου με μηδενικό μέτρο (αριθμήσιμο.)



όμως έχει "τρύπες" όπου παίρνει πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές. για $n \to \infty$

▸ Ποιό είναι το $\operatorname{ess\,sup} X$;

<u>Ελέγχω για $M \geq 9$</u> $P(f > M)$;

Θέτω $\left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = A$. Τότε έχω ότι

$\{x : f(x) > M\} \subseteq A \cup \{3\} \Rightarrow P(f > M) \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ή } A \cup \{3\}}}{\lambda(A)} = 0$

Άρα $P(f \leq M) = 1$

<u>Ελέγχω για $M < 9$</u>

$\underset{\substack{\| \\ x^2}}{[f > M]} \supseteq (\sqrt{M}, 3) \setminus A$ (βλ. σχήμα)

$\Rightarrow P(f > M) > 0 \Rightarrow P(f \leq M) < 1$

Άρα $\{M \in \mathbb{R} : P(X \leq M) = 1\} = [9, \infty)$ και $\operatorname{ess\,sup} X = 9$

▸ Ποιό είναι το $\operatorname{ess\,inf} X$; (όμοια διαδικασία)

<u>Ελέγχω για $M > 4$</u> $P(f < M) =$;

$\{x : f(x) < M\} \supseteq (2, \sqrt{M}) \setminus A \Rightarrow \quad P(f < M) > 0 \Rightarrow P(f \geq M) < 1$

Ελέγχω για $M \leq 4$

$\{x : f(x) < M\} \subseteq A \cup \{2\} \Rightarrow P(f < M) \leq \lambda(A) = 0$
↳ η $A \cup \{2\}$ (το ίσο γιατί $\lambda(\{2\}) = 0$)

$\Rightarrow P(f \geq M) = 1$

Άρα $\{M \in \mathbb{R} : P(f \geq M) = 1\} = (-\infty, 4] \Rightarrow \text{ess}\inf f = 4$

5.9 Θέτω (για ευκολία) $s = \text{ess}\sup X$

$P(X \leq s) = 1 \underset{\text{αύξουσα}}{\overset{\exp}{\Rightarrow}} P(e^{nX} \leq e^{ns}) = 1 \Rightarrow e^{nX} \leq e^{ns}$ P-σ.π. $\forall n \in \mathbb{N}$

$e^{nX} > 0$
$\Rightarrow 0 < E(e^{nX}) \leq E(\underbrace{e^{ns}}_{\text{σταθερά}}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow E(e^{nX}) \leq e^{ns} \Leftrightarrow (E(e^{nX}))^{1/n} \leq (e^{ns})^{1/n} = e^{s}$

όλες οι ρίζες είναι αύξουσες συν/σεις

Άρα ισχύει ότι και $\lim_{n\to\infty} E(e^{nX})^{1/n} \leq e^{s}$

Αν θέσω $0 < Y = e^{X}$ τότε $a_n = \|Y\|_n$ (αφού $n \geq 1$)
είναι αύξουσα ακολουθία. αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει στο supremum της. Η a_n δεν εξαρτάται από το $\omega \in \Omega$

Όμως αν $\exists\, a < e^{s} : a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}_+\}$ τότε $a > 0$

& για $b = n \log a < s \Rightarrow E(e^{nX}) \leq e^{b} < e^{ns} \Rightarrow E(e^{nX} - e^{b}) \leq 0$

$\Rightarrow \int (e^{nX} - e^{b})\, dP \leq 0 \Rightarrow e^{nX} - e^{b} \leq 0$ σ.π.

$\Rightarrow e^{nX} \leq e^{b} < e^{ns}$ σ.π. άτοπο από ορισμό s

Άρα $e^{s} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}_+\}$ και $\lim_{n\to\infty} E(e^{nX})^{1/n}$

5.10 (Βλ. & σημ. Ανδρέου-Παρασκευά σελ 22)

Θέτω $f_n = 1_{\{|X| > n\}}$ και (για ευκολία) $A_n = \{|X| > n\}$

Από υπόθεση η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ (δηλ. όχι $\pm\infty$)

Άρα $|X(\omega)| < +\infty \quad \forall \omega \in \Omega$. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο η X είναι τυχ. μετ/τη

(Από την εκφώνηση υποψιαζόμαστε ότι θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο οριακό θεώρημα π.χ. Μονότον. Σύγκλ, Κυριαρχ. Σύγκλ, Λήμμα Fatou, Beppo-Levi κτ.λ)

$|X(\omega)| < +\infty \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \forall \omega \in \Omega \quad \exists n_\omega \in \mathbb{N}: \ |X(\omega)| < n_\omega$

$\Rightarrow \forall \ n \geq n_\omega \quad f_n(\omega) = 0$ (αφού δεν ανήκει στα A_n για $n \geq n_\omega$)

$\Rightarrow f_n(\omega) \underset{\kappa.\sigma.}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0$

Επίσης $\forall \ \omega \in \Omega \quad |f_n(\omega)| \leq 1$ και $\int 1 \, dP = 1$

Άρα $\underbrace{\int f_n(\omega) dP}_{\overset{*}{=} P(A_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int 0 \, dP = 0$

$\boxed{\begin{aligned} &(*) \int f_n(\omega)\, dP = \\ &= \int 1_{A_n} dP = \\ &= E(1_{A_n}) = P(A_n) \end{aligned}}$

(5.11) (βλ. και βιντεοδιάλεξη 5/11/2020)

(α) $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{1+nx^3} \right| \leq \frac{1}{(1+nx^3)} \leq \frac{1}{x^3} = g(x)$ το οποίο

είναι ανεξάρτητο του $n \in \mathbb{N}$ άρα η f_n κυριαρχείται από τη g η οποία είναι μετρήσιμη ως συνεχής,

$\int_1^\infty g \, d = \int_1^\infty g(x)\, dx$ (αφού είναι και Riemann ολοκληρώσιμη)

$\left[\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{2 \cdot 1}\right) = \frac{1}{2} < \infty \right.$

Άρα αφού $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+nx^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$

Εφαρμόζω θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και

$$\lim_n \int_1^\infty f_n \, d\lambda = \int_1^\infty \lim f_n \, d\lambda = \int_1^\infty 0 \, d\lambda = 0$$

(βασικά θέτω $g_n = f_n \cdot 1_{[1,\infty)}$ και παίρνω $\lim_n \int g_n \, d\lambda =$
$= \int \lim g_n \, d\lambda = \int 0 \, d\lambda = 0$ αφού $\lim_n g_n = 0$)

και αφού $f_n(x)$: Riemann ολοκληρώσιμη, μετρήσιμη και $\mathcal{L}$-ολοκληρώσιμη $\int_1^\infty f_n \, d\lambda = \int_1^\infty f_n(x)\, dx$

Άρα $\lim_n \int_1^\infty f_n(x)\, dx = 0$

(β) $\int_1^\infty \frac{1}{1+nx} 1_{[1,e^n]}(x)\, dx = \int_1^{e^n} \frac{1}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \ln(1+nx) \Big|_1^{e^n} =$

$$= \frac{1}{n}\ln(1+ne^n) - \frac{1}{n}\ln(1+n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+ne^n}{1+n}\right) =$$ (30)

$$= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\frac{1}{n}+e^n}{\frac{1}{n}+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{*} 1$$

$$* \quad \frac{\ln\left(\frac{\frac{1}{n}+e^n}{\frac{1}{n}+1}\right)}{n} \overset{\text{DLH}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n}+e^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(Η άσκηση είναι λυμένη και στις λύσεις Αντωνίου - Παρασκευά σελ. 23)

(5.12) (Βλ. πανεπ. σημ. Τσέβ. μαθ 15 2018-19 σελ 6)

$\forall\, x \in [0,1)$ $\lim_{n\to\infty} n x^n f(x) = 0$ (γιατί θεωρώ το x σταθεροποιημένο όπως και το $f(x)$ και $x^n \to 0$. Επίσης

$$n x^n = \frac{n}{x^{-n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \frac{1}{-n x^{-n-1}} = \frac{-x^{n+1}}{n} \underset{\frac{0}{\infty}}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0 \Big)$$

Αν $x=1$ $\xrightarrow{*}$ αν $f(1)>0$ $\lim_{n\to\infty} n 1^n f(1) = \infty$

αν $f(1)<0$ $\lim_{n\to\infty} n 1^n f(1) = -\infty$

* προφανώς αν $f(1)=0$ $\lim_{n\to\infty} n f(1) = 0$

Παρατηρούμε ότι η $n x^n f(x)$ δεν μπορεί να κυριαρχηθεί όπως είναι. Κάνω λοιπόν αλλαγή μετ/της στο ολοκλήρωμα. $\boxed{u = x^n}$

$du = n x^{n-1} dx$

$$\int_0^1 n x^n f(x)\,dx \underset{\substack{du = n x^{n-1}dx \\ x = u^{1/n}}}{\overset{u=x^n}{=}} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,du$$ Θέτω $g_n(u) = u^{1/n} f(u^{\frac{1}{n}})$

Για $u=0$, $g_n(0) = 0\cdot f(0) = 0 \to 0$

Για $0<u\le 1$ $\lim_{n\to\infty} g_n(u) = \left(\lim_{n\to\infty} u^{1/n}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} f(u^{1/n})\right) \overset{f:\text{ συνεχής}}{=}$

$= 1 \cdot f(1) = f(1)$

Άρα $g_n(u) \to g(u) = \begin{cases} f(1), & \text{αν } u=(0,1] \\ 0, & u=0 \end{cases}$ η οποία είναι ίση με $f(1)$ σ.π.

Τώρα $|g_n(u)| \le M$ αφού $u^{1/n} \le 1$ $\forall\, u \in [0,1]$ και

f: συνεχής και συνεπώς παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0,1]$

Το $[0,1]$ είναι φραγμένο άρα θεωρώ τον περιορισμό του μέτρου Lebesgue στο $[0,1]$ (θα το συμβολίζω πάλι λ)

Άρα στον χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ από το θεώρ. φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_n \int n x^n f(x)\, d\lambda = \lim_n \int u^{1/n} f(u^{1/n})\,du = \int_0^1 g(u)\,du = f(1)$$

(5.13) (Βλ. βιντεοσιάλ 10/11/2020 1η ώρα)

ΚΑΠΟΙΑ σχόλια πρώτα

* Όσο το όριο μπαίνει μέσα όπως στα οριακά θεωρήματα κυριαρχημένης, φραγμένης σύγκλισης κτλ., ενώ δεν έχουμε ακολουθία (αριθμήσιμοι το πλήθος όροι) αλλά οικογένεια συν/σεων $(f_t)_{t\geq 0}$ υπεραριθμήσιμη ($\mathbb{R}_{\geq 0}$)
* Θα μπορούσε το σύνολο δεικτών να είναι και κάποιο άλλο υπεραριθμήσιμο σύνολο. (π.χ. $(0,1)$)
* Πήραμε $t\to\infty$. Θα μπορούσε να είναι π.χ. $t\to 0$.
* Η άσκηση είναι παράδειγμα για το πως επεκτείνεται το παράδειγμα κυριαρχημένης σύγκλισης και για άλλα σύνολα δεικτών.
* Αργότερα θα τη χρειαστούμε

(a) Παίρνουμε "υπακολουθία" δηλ. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (περιορίζω στην ουσία στους φυσικούς) και αφού $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n: μετρήσιμη, το όριο είναι μετρήσιμη ($\underline{\lim}=\overline{\lim}$)

(β) Για $t\to\infty$ προκύπτει ότι ισχύει και $|f(x)|\leq g(x)$ $\forall x\in X$ και επειδή $\int g(x)\,d\mu(x)<\infty$ ισχύει ότι

$\int|f(x)|\,d\mu(x)<\infty$

SOS (γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του ορίου με ακολουθίες (αυτό είναι το κρίσιμο σημείο για την απόδειξη)

Έστω $(t_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στο $(0,\infty)$ με $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$

Αρκεί να ισχύει $\lim\int f_{t_n}(x)\,d\mu(x)=\int f(x)\,d\mu(x)$

(και επειδή είναι τυχαία η ακολουθία θα ισχύει για κάθε τέτοια ακολουθία)

Όμως έχω
- f_{t_n}: μετρήσιμη $\forall n\in\mathbb{N}$ ($f_{t_n}:X\to\mathbb{R}$)
- $\lim\limits_{n} f_{t_n}=f(x)$
- $|f_{t_n}(x)|\leq g(x)$ $\forall x\in X$ με $\int g(x)\,d\mu(x)<\infty$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρ. κυριαρχ. σύγκλ.

και

$\lim\limits_{n}\int f_{t_n}\,d\mu(x)=\int f\,d\mu(x)$

(5.14) (βλ. η βιντεοδιάλεξη 5/11/2020)

sos

$X \in \mathcal{L}^1(P) \Rightarrow E|X| < \infty$

ΣΚΕΨΕΙΣ

να κάνω ανισότητα Markov;

- $P(E_n) = P(|X| \geq n) \leq \frac{E|X|}{n} \Rightarrow P(E_n) \to 0$

και $n P(E_n) \leq E|X|$ (δεν μας αρκεί)

- Να χρησιμοποιήσω αλλιώς τη Markov, δηλ. με άλλη τυχαία μετ/τη;

$$P(|X| \geq n) = P(\underbrace{|X| \cdot 1_{|X|\geq n} \geq n}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{1}{n} E(|X| \cdot 1_{|X| \geq n}) \quad (*)$$

ισχύει γιατί αν $|X| \geq n \to 1_{|X|\geq n} = 1$

(αλλιώς γίνεται χρησιμοποιώντας την απόδειξη της Markov και νδο ισχύει η παραπάνω η ανισότητα)

$(*) \Rightarrow n P(E_n) \leq E(|X| \cdot 1_{|X| \geq n})$ Θέτω $f_n(\omega) = |X| \cdot 1_{|X|\geq n}$

Η δείκτρια $1_{|X| \geq n}$ είναι τελικά 0 άρα $f_n(\omega)$: τελικά σταθερή αφού $E|X| < \infty$ (και συνεπώς $A = \{\omega \in \Omega : |X| = \infty\}$ έχει $P(A) = 0$).

Συνεπώς $\lim_n f_n(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A$ (δηλ. P-σ.π.)

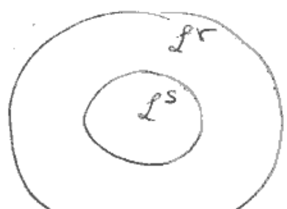
Όμως $|f_n(\omega)| \leq |X(\omega)| \quad \forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$ και

$E|X| < \infty$

Άρα από θεώρ. κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\lim_n E(f_n) = E(\lim_n f_n) = 0$$

$\Rightarrow n P(E_n) \to 0$



(5.15) $X \in \mathcal{L}^r \Rightarrow \{E|X^r|\}^{1/r} < \infty$

Σημείωση: η $X_n = X \cdot 1_{|X| \leq n}$ λέγεται περικοπή της X (truncation)

$|X_n(\omega)| \leq n \quad \forall \omega \in \Omega$ (όταν πάει πιο πάνω από το n X θέτουμε 0 στην X_n) $\Rightarrow E|X_n| \leq n \Rightarrow E|X_n|^s \leq n^s < \infty$

$\Rightarrow X_n \in \mathcal{L}^s$

Επίσης $\lim_n X_n = X$ με πιθανότ. 1 (δηλαδή σ.π)

$E|X|^r < \infty \Rightarrow P(|X| = \infty) = 0$

Άρα αν $X(\omega) \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$ (γιατί αφού είναι πεπερασμένο θα είναι μικρότερο από κάποιο n_0 $\Rightarrow$ τελικά η $1_{|X| \leq n}$ θα είναι 1) (σε $\omega \notin [|X| = \infty]$)

(θα κάνω θεωρ. κυριαρχ. σύγκλ.)

$|X_n - X|^r \leq |X|^r$ με $E|X|^r < \infty$

↳ γιατί $\begin{cases} \text{αν } X > n & X_n = 0 \\ \text{αν } X \leq n & X_n = X \end{cases}$

Άρα από θεώρ. κυριαρχ. σύγκλ.

$\lim_{n \to \infty} E\left(|X_n - X|^r\right) = E\left(\lim |X|^r\right) = 0$

* Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά, δηλ. χρησιμοποιούμε φραγμένες για να προσεγγίσουμε μη φραγμένη σ.ω/ση

5.16 (Βλ. κ παρ. σημ. Τεύχ. 2016-17 μαθ 11-13 σελ 2)

(a) $\frac{1}{\varepsilon} E(X; X < \varepsilon) = E\left(\frac{X \, 1_{\{X<\varepsilon\}}}{\varepsilon}\right)$ Θέτω $X_\varepsilon = \frac{X \cdot 1_{\{X<\varepsilon\}}}{\varepsilon}$

(αν $X \geq \varepsilon \rightarrow X_\varepsilon = 0$. Άρα $X < \varepsilon \Rightarrow \frac{X}{\varepsilon} < 1$)

(i) $0 \leq X_\varepsilon \leq 1_{\{0 < X < \varepsilon\}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 1_\emptyset = 0$

(ii) $X_\varepsilon \leq 1_{\{0 < X < \varepsilon\}} \leq 1$ (Σκέφτομαι το θεωρ. φραγμ. σύγκλισης)

<u>Υπενθύμιση</u>

$E(X_\varepsilon) = \int X_\varepsilon \, dP$ (αν θεωρήσω P: το μέτρο πιθανότητας που έχω)

έστω ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ με $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ κ $\varepsilon_n \geq 0 \;\forall n \geq 1$

- $X_{\varepsilon_n} : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_n X_{\varepsilon_n} = 0$ και $|X_{\varepsilon_n}| \leq 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$ σ.π.

Άρα από θεωρ. φραγμ. σύγκλ. $\lim_n \int f_{\varepsilon_n} dP = 0$

και αφού ισχύει για τυχαία ακολ. $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ $\lim_{\varepsilon \to 0^+} E(X_\varepsilon) = 0$

(όπως στην άσκ 5.13)

~~Θέτουμε αν $(M_n)_{n\geq 1}$ ακολ. με $M_n \geq 0$ κ $M_n \to \infty$~~

~~• $X_{M_n}: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$~~

~~• $\lim_n X_{M_n}$~~

(β) $\frac{1}{M} E(X; X<M) = E\left(\frac{X \mathbb{1}\{X<M\}}{M}\right)$

Θέτω $X_M = \frac{X \cdot \mathbb{1}\{X<M\}}{M}$

(i) $X_M(\omega) = \frac{X(\omega) \cdot \mathbb{1}\{X(\omega)<M\}}{M} \xrightarrow{M\to\infty} 0$ γιατί

αν $X(\omega) < M \Rightarrow X_M = \frac{X(\omega)}{M} < 1$ και αν $M \to +\infty$ $X_M(\omega) \to 0$

αν $X(\omega) \geq M \Rightarrow X_M(\omega) = 0 \xrightarrow{M\to\infty} 0$ για $\omega \in \{X<+\infty\}$

Άρα $X_M \to 0$

(ii) $|X_M| = \frac{X \mathbb{1}\{X<M\}}{M} \leq \frac{M}{M} \cdot \mathbb{1}\{X<M\} \leq 1$

Έστω τυχ. $(M_n)_{n\geq 1}$ ακολ. με $M_n \geq 0$ κ $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

• $X_{M_n}: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$

• $\lim_{n\to\infty} X_{M_n} = 0$ κ $|X_{M_n}| \leq 1$ με $\int 1 \, dP = 1 < \infty$

Άρα από θεωρ. φραγμ. σύγκλ. $\lim_n \int f_{M_n} \, dP = 0$

και αφού ισχύει για τυχαία ακολ. $(M_n)_{n\geq 1}$

$\lim_{M\to\infty} E(X_M) = 0$

5.17 $X \neq \pm\infty$ αφού $X \in \mathbb{R}$.

Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο δουλεύουμε

$\forall \omega \in \Omega \quad \exists M_\omega > 0 : |X(\omega)| \leq M_\omega$ (αφού $X \in \mathbb{R}$)

Άρα για $M \to \infty$ $\mathbb{1}_{|X|\leq M} \to 1$ $\forall \omega \in \Omega$

και $\mathbb{1}_{|X|>M} \to 0$ $\forall \omega \in \Omega$

Θέτω (για ευκολία) $X \cdot \mathbb{1}_{|X|\leq M} = X_M$ $\forall M > 0$

και $A_M = [|X| \leq M]$

Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim_{n\to\infty} \frac{[E(X_M)]^2}{E(X_M^2)}$

$\hookrightarrow \mathbb{1}_{|X|\leq M} = \mathbb{1}^2_{|X|\leq M}$

Έστω $N \in \mathbb{N}$ και παίρνω τον αριθμητή

$$\left[E(X_M)\right]^2 = \left[E\left(X_M \cdot 1_{A_N} + X_M \cdot 1_{A_N^c}\right)\right]^2 \underset{\text{γραμμικότητα}}{=} \left[E(X_M \cdot 1_{A_N}) + E(X_M \cdot 1_{A_N^c})\right]^2 =$$

ταυτότητα

$$= \left[E(X_M \cdot 1_{A_N})\right]^2 + \underbrace{\left[E(X_M \cdot 1_{A_N^c})\right]^2}_{(*)} + 2\, E(X_M \cdot 1_{A_N}) \cdot \underbrace{E(X_M \cdot 1_{A_N^c})}_{(**)} \quad (\star)$$

Θα εφαρμόσω Cauchy-Schwarz στην $(*)$ (κ; την $(**)$ κατά συνέπεια)

$$\left[E(X_M \cdot 1_{A_N^c})\right]^2 \leq \|X_M\|_2^2 \, \|1_{A_N^c}\|_2^2 = E(X_M^2) \cdot (1_{A_N^c}^2)$$

$$1 \cdot P(1_{A_N^c}^2 = 1) = 1 \cdot P(1_A = 1)$$

$$= \underset{\geq 0}{E(X_M^2)} \cdot \underset{\geq 0}{P(A_N^c)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|E(X_M \cdot 1_{A_N^c})\right| \leq \sqrt{E(X_M^2)}\,\sqrt{P(A_N^c)}$$

Άρα

$$(\star) \leq \left[E(X_M \cdot 1_{A_N})\right]^2 + E(X_M^2) \cdot P(A_N^c) + 2\, E(X_M \cdot 1_{A_N}) \cdot \sqrt{E(X_M^2)}\,\sqrt{P(A_N^c)}$$

και άρα ο λόγος

$$\frac{\left[E(X_M)\right]^2}{E(X_M^2)} \leq \frac{\left[E(X_M \cdot 1_{A_N})\right]^2}{E(X_M^2)} + P(A_N^c) + \frac{2\, E(X_M \cdot 1_{A_N})\sqrt{P(A_N^c)}}{\sqrt{E(X_M^2)}}$$

Αν $M \to \infty$ τότε $E(X_M^2) \longrightarrow E(X^2)$ και

$E(X_M \cdot 1_{A_N}) \longrightarrow E(X_N)$ (αφού $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| < \infty$)

Όμως $E(X^2) = \infty$

$$\text{Άρα } \frac{\left[E(X_M)\right]^2}{E(X_M^2)} \leq \frac{\overset{\in \mathbb{R}}{\left[E(X_N)\right]^2}}{E(X^2)} + \underset{\in \mathbb{R}}{P(A_N^c)} + \frac{\overset{\in \mathbb{R}}{2\, E(X_N)\sqrt{P(A_N^c)}}}{\sqrt{E(X^2)}}$$

$= P(A_N^c)$ και αν $N \to \infty$ $P(A_N^c) \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{M \to \infty} \frac{\left[E(X_M)\right]^2}{E(X_M^2)} = 0$$

5.18 (Βλ. η διάλεξη 10/11/2020) ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ

$\boxed{\text{* Τέτοιες X είναι π.χ. όσες ακολουθούν την Poisson}}$

Παρατηρώ ότι $X = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{X \geq k}$ $\left(= \sum_{k=1}^{X} 1\right)$ και εφαρμόζω Beppo-Levi

$$EX = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{X\geq k}\right) \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} E(1_{X\geq k}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

5.19 (Βλ. λύσεις Volteras σελ 8 ή Αττρέου-Παπ. σελ 26)

Ισχύει ότι $[X] \leq X \leq [X]+1$ με πιθανότητα 1 (σ.π.)

με $[X]$ το ακέραιο μέρος του X

$\boxed{[X] : \text{ο μεγαλύτερος ακέραιος που όμως } \underline{\text{δεν}} \text{ υπερβαίνει τον } X \in \mathbb{R}}$

Η τ.μ. $Y = [X]$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω την 5.18

$\Rightarrow E([X]) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$. Από τη μονοτονία της μέσης τιμής.

$$E([X]) \leq E(X) \leq E([X])+1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k) \leq E(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) + 1$$

(Βλ. σημ. Πιθανοτ. I Hoel, Port, Stone σελ. 209-210 άσκ 18, σελ. 101 θεώρ. 5 για άσκ 5.18)

* Από πιθανότητες I θυμόμαστε ότι αν X: μη αρνητ. $\underline{\text{συνεχής}}$ τ.μ. $E(X) < \infty \Leftrightarrow \underbrace{\int_0^{\infty} P(X \geq x)\,dx}_{= E(X)} < \infty$

↳ δεν το έχω εδώ

5.20 * Σκέφτομαι την ανισότητα Markov

$$P(X \geq c^k) \leq \frac{E(X)}{c^k} \overset{\Sigma}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq c^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{E(X)}{c^k}\right) = E(X) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^k}_{<\infty \text{ (γεωμ. σειρά)}}$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq c^k)\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty} c^k\right] \leq E(X) < \infty$$

Όμως $\sum_{k=1}^{\infty} c^k P(X \geq c^k) \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq c^k)\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty} c^k\right]$

γιατί όλοι οι όροι είναι μη-αρνητικοί (≥ 0) (δεν το αποδεικνύω εδώ)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c^k P(X \geq c^k) < \infty$$

5.21 (Βλ. βιντεοδιάλεξη 29/10/2020)

* Η Άσκηση αποδεικνύει ότι αν η μέση τιμή της X υπολογίζεται ίση με 0 για κάθε σύνολο της σ-άλγεβρας τότε είναι σ.π 0.

$$x=0 \text{ με πιθαν. } 1 \Leftrightarrow P(x=0)=1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} P(x>0)=0 \\ \text{και} \\ P(x<0)=0 \end{array} \right\}$$

θέτω $\{x>0\}=A \Rightarrow 0=E(x\mathbb{1}_A) \underset{x\mathbb{1}_A \geq 0}{\Rightarrow} P(x\mathbb{1}_A>0)=0$

Όμως $\{\omega\in\Omega : X(\omega)\cdot \underbrace{\mathbb{1}_A(\omega)}_{\text{ελέγχει αν το } \omega \text{ κάνει την } X>0} >0\} = [X\cdot \mathbb{1}_A>0]$

$\Rightarrow P(A)=0$

Ομοίως για $\{x<0\}=B$ $\quad P(B)=0 \rightarrow P(X=0)=1$

5.22 (Βλ. Θεωρ. 6.3.8, άσκ 6.24 Θεωρ. μέτρου, έγκειται σε αρχείο μαθ 21/1/2021)

<u>Σημείωση για την αντίστροφη κατεύθυνση</u> $(\Leftarrow)$

Στο λήμμα Scheffe συνήθως υποθέτουμε ότι $f_n, f\in\mathbb{R}$ και θυσο $\lim_{n\to\infty}|f_n-f|\,d\mu=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int|f_n|\,d\mu=\int|f|\,d\mu$.

όπως στην άσκ. 6.24 της Θεωρ. μέτρου.

Εδώ η υπόθεση ότι $f_n\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ δίνει ότι και $f\geq 0$ και άρα τα απόλυτα δεν χρειάζονται.

$(\Rightarrow)$ $\int|f_n-f|\,d\mu \longrightarrow 0$

Επίσης από πρότ. 5.7 (iv)

$$\left|\int(f_n-f)\,d\mu\right| \leq \int|f_n-f|\,d\mu \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \left|\int(f_n-f)\,d\mu\right| \to 0 \Rightarrow \int(f_n-f)\,d\mu \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int f_n\,d\mu \longrightarrow \int f\,d\mu$$

$(\Leftarrow)$ Παρατηρώ ότι $|x|=2x^+-x$ και το εφαρμόζω για x το $f(x)-f_n(x)$ δηλ. έχω

$$|f(x)-f_n(x)| = 2\left[f(x)-f_n(x)\right]^+ - \left[f(x)-f_n(x)\right] \quad (*)$$

Επίσης $0\leq\left[f(x)-f_n(x)\right]^+\leq f$ γιατί $f_n\geq 0\ \forall x\in X$

Από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης αφού $(f-f_n)^+\longrightarrow 0$

$\int 2[f-f_n]\, dP - \int f - f_n \, d\mu \longrightarrow 0 - 0 = 0$ (38)

$\Rightarrow \int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$

5.23

(a) $(\Rightarrow)$ $E|X| < \infty \Rightarrow \int |X| \, dP < \infty$

θέτω $A_n = [|X| > n]$ και $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ τον χώρο πιθανότητας στον οποίο δουλεύω

$\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n \subseteq \Omega \Rightarrow \int_{A_n} |X| \, dP \leq \int |X| \, dP < \infty$

Όμως $\int_{A_n} |X| \, dP = \int |X| \cdot 1_{A_n} \, dP = E(|X| \cdot 1_{A_n})$ ✓

$(\Leftarrow)$ Αν $\exists k \in \mathbb{N}$: $E(|X| \cdot 1_{A_k}) < \infty$

$E(|X|) = \int \left(|X| \cdot 1_{A_k} + |X| \cdot 1_{A_k^c} \right) dP =$

$|X| < k$ για $\omega \in A_k^c$

$= \underbrace{\int |X| \cdot 1_{A_k} \, dP}_{\parallel} + \int |X| \cdot 1_{A_k^c} \, dP \leq$

$\leq E(|X| \cdot 1_{A_k}) + \int k \, dP = E(|X| \cdot 1_{A_k}) + k < \infty$ ✓

(β)

(Π1) Αν $E(|X|) = \infty \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $E(|X| \cdot 1_{A_n}) = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} E(|X| \cdot 1_{A_n}) = \infty$

(Π2) Αν $E|X| < \infty$ τότε από (α) $\exists k \in \mathbb{N}$: $E(|X| \cdot 1_{A_k}) < \infty$

και $\forall n \geq k$ $A_n \subseteq A_k \Rightarrow 0 \leq \int |X| \cdot 1_{A_n} \, dP = \int |X| \underbrace{1_{A_n} \cdot 1_{A_k}}_{\text{δείκτρια της τομής όμως } A_n \subseteq A_k} \, dP \leq$

$\leq E(|X| \cdot 1_{A_k}) < \infty$

Επίσης $X \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \omega \in \Omega$ $\exists k_\omega \in \mathbb{N}$: $|X(\omega)| \leq k_\omega$

Άρα $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \xrightarrow{A_{n+1} \subseteq A_n} A_n \xrightarrow{n \to \infty} \emptyset$

Άρα αν θέσω $a_n = E(|X| \cdot 1_{A_n})$ $a_n \searrow$ και συγκλίνει στο 0 (είναι και κάτω φραγμένη)

* Μια δεύτερη λύση για την (5.22) (την (⇐) μόνο)

Αφού $f_n, f \geq 0$ (είναι μετ γιατί $f \geq 0$)

$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| = f_n + f \Rightarrow f_n + f - |f_n - f| \geq 0$

και εφαρμόζω το λήμμα Fatou

$$\int \liminf (f_n + f - |f_n - f|)\, d\mu \leq \liminf \int [f_n + f - |f_n - f|]\, d\mu$$

• Το δεξί μέλος είναι ίσο με:

$$\liminf \int f_n d\mu + \int f\, d\mu + \liminf \int [-|f_n - f|]\, d\mu =$$

$$= \int f d\mu + \int f d\mu - \limsup \int |f_n - f| d\mu = 2\int f d\mu - \limsup \int |f_n - f|\, d\mu$$

• Το αριστερό μέλος είναι ίσο με:

$$\int \{\liminf (f_n) + f + \liminf [-|f_n - f|]\} d\mu =$$

$$= \int \{2f - \underbrace{\limsup |f_n - f|}_{0}\}\, d\mu = \int 2f\, d\mu - \int 0\, d\mu = 2\int f\, d\mu$$

Άρα $\int 2f\, d\mu \leq \int 2f\, d\mu - \limsup \int |f_n - f|\, d\mu \Rightarrow$

$0 \leq \liminf \int |f_n - f|\, d\mu \leq \limsup \int |f_n - f|\, d\mu \leq 0 \rightarrow$

$\int |f_n - f|\, d\mu \longrightarrow 0$

(5.24) $E(e^{tx}) = \int e^{tx}\, dP$ αν θεωρήσω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ τον χώρο πιθανότητας στον οποίο εργάζομαι.

Θέτω $\Phi(t) = \log M_x(t) = \log \int e^{tx}\, dP \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Αρκεί νδο αν $\lambda \in (0,1)$

$$\underbrace{\Phi((1-\lambda)a + \lambda b)}_{(*)} \leq (1-\lambda)\Phi(a) + \lambda \Phi(b)$$

$$(*) = \log \int \exp\{[(1-\lambda)a + \lambda b]\, x\}\, dP = \log \int \underbrace{\exp\{(1-\lambda)ax\}}_{(e^{ax})^{1-\lambda}} \underbrace{\exp\{\lambda b x\}}_{(e^{bx})^{\lambda}} dP =$$

Αν $p = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{1-\lambda}$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $p, q \in (1, \infty)$

Μπορώ να εφαρμόσω την ανισότητα Hölder

$$E\left((e^{ax})^{1-\lambda}\cdot(e^{bx})^{\lambda}\right) \le \left\|(e^{ax})^{1-\lambda}\right\|_{1/1-\lambda} \left\|(e^{bx})^{\lambda}\right\|_{1/\lambda} =$$

$$= \left(E\left\{(e^{ax})^{\frac{1-\lambda}{1-\lambda}}\right\}\right)^{1-\lambda}\left(E\left(e^{bx\cdot\frac{\lambda}{\lambda}}\right)\right)^{\lambda} = \left[E(e^{ax})\right]^{1-\lambda}\left[E(e^{bx})\right]^{\lambda}$$

Επειδή $\log (\equiv \ln) \nearrow$ προκύπτει ότι (αν εφαρμόσω στην παραπάνω ανισότητα)

$$\phi((1-\lambda)a+\lambda b) \le (1-\lambda)\phi(a)+\lambda\phi(b)$$

(5.25) Από πρόταση 5.22 $\|x\|_n \le \|x\|_{n+1} \Rightarrow$

$$\underset{|x|=x}{\overset{x\ge 0}{\Rightarrow}} 1 \le \frac{[E(x^{n+1})]^{1/n+1}}{[E(x^n)]^{1/n}} \underset{\text{εις την } n+1}{\overset{\text{υψώνω}}{\Longrightarrow}} 1^{n+1} \le \frac{E(x^{n+1})}{[E(x^n)]^{1+\frac{1}{n}}} \Rightarrow$$

$$[E(x^n)]^{1/n} \le \frac{E(x^{n+1})}{E(x^n)} \Rightarrow \|x\|_n \le \frac{E(x^{n+1})}{E(x^n)}$$

Από άσκ. 5.9 αν θέσω όπου X την τ.μ. $\ln X$ (που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty}[E(x^n)]^{1/n} = e^{\text{ess sup} \ln X}$$

$$\text{ess sup} \ln X = \inf\{M\in\mathbb{R} : P(\ln x \le M)=1\} = \quad \ln\lambda$$

$$= \inf\{M\in\mathbb{R} : P(x\le e^M)=1\} =$$

$$= \begin{cases} \ln(\text{ess sup} X) & \text{αν } \text{ess sup} X < \infty \\ \infty & \text{αν } \text{ess sup} X = \infty \end{cases}$$

(π1) Αν $\text{ess sup} X = S = \infty \Rightarrow X$: όχι φραγμένη σ.π

$$\Rightarrow \|X\|_n \to \infty = \|X\|_\infty = S \Rightarrow \frac{E(x^{n+1})}{E(x^n)} \longrightarrow \infty$$

(π2) Αν X: φραγμένη σ.π $\Rightarrow \|X\|_\infty = S \in \mathbb{R}_{>0}$ $\left(\overset{1-P(X>0)}{P(X=0)} < 1 \Rightarrow 0 \ne S\right)$

και $|X| \underset{(X\ge 0)}{=} X \le S$ σπ Άρα $\int x^{n+1}dP = \int x\cdot x^n dP \underset{\substack{x\le S\\ \sigma.\pi.}}{\le} \int S x^n dP =$

$$= S\,E(x^n) \Rightarrow E(x^{n+1}) \le \|X\|_\infty E(x^n) \Rightarrow \frac{E(x^{n+1})}{E(x^n)} \le \|X\|_\infty$$

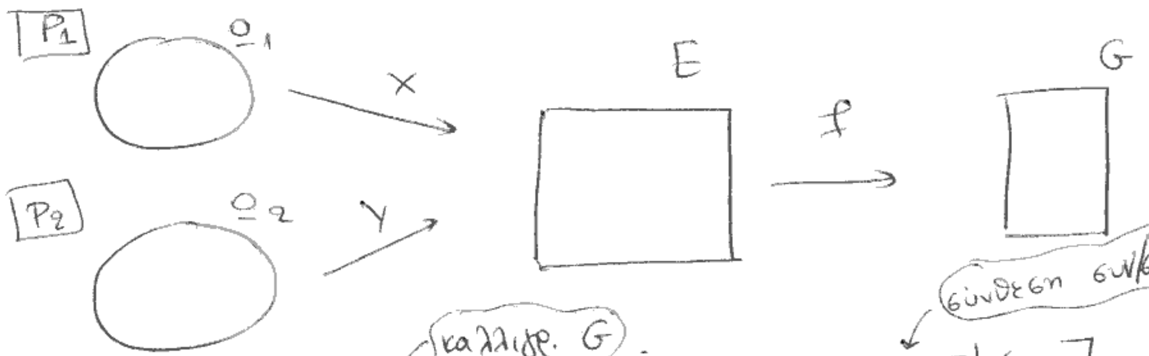
Αφού $\operatorname{ess\,sup} \ln X = \ln(s) \quad (s>0)$

$$\lim_n \|X\|_n = e^{\ln(s)} = s = \|X\|_\infty \Rightarrow \underset{\downarrow\; \|X\|_\infty}{\|X\|_n} \le \frac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} \le \|X\|_\infty$$

ισοσυγκλίν. $\Rightarrow \dfrac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} \longrightarrow \|X\|_\infty$

ΚΕΦ 6

6.1 (Βλ. διάλεξη 10/11/2020)



καλλιγρ. G

σύνθεση συν/σεων

Για $\Delta \in \mathcal{G}$ $\quad P^{f(X)}(\Delta) = P_1\left[(f(X))^{-1}(\Delta)\right] =$

$$= P(X^{-1}(\underbrace{f^{-1}(\Delta)}_{\in\,\mathcal{E}})) = P^X(f^{-1}(\Delta)) = P^Y(f^{-1}(\Delta)) = P(Y^{-1}(f^{-1}(\Delta))) =$$

$$= P_2\left[(f(Y))^{-1}(\Delta)\right] = P^{f(Y)}(\Delta)$$

6.2 (Βλ. Volteras σελ 9)

Σύμφωνα με την υπόδειξη παίρνουμε $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (E, \mathcal{E}, \nu)$

(θέλω $P^X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X\in B) \quad \forall B \in \mathcal{E}$)

Αν $X : (E,\mathcal{E}) \to (E,\mathcal{E}) \qquad X^{-1}(B) = B \in \mathcal{E} \quad \forall B\in \mathcal{E}$

$\qquad y \longmapsto y$

είναι μετρήσιμη $\to$ τ.μ. και $P^X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X\in B) =$

$= \nu(X\in B) \Rightarrow \nu$: κατανομή της X

6.3 (Βλ. Volteras σελ 9) την γνωρίζω από προτ. 6.2

Όντως $E_P\{h(X)\} = E_{P^X}(h) = \int_{\mathbb{R}} t \, dP^{h(X)}(t)$

$\int h(X(\omega))\, dP(\omega) = \int h(x)\, dP^X(x)$ με $h : E \to [0,\infty]$ όπως

στην πρόταση 6.2 (μετρήσιμη)

σύνθεση συν/σεων, άρα $h\circ X$ ως μετρήσιμη συν/ση σε χώρο πιθ.

Θέτω $Y = h(X)$ η οποία είναι τ.μ.

και g την ταυτοτική $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $g(h(X)) = g(Y) = Y = h(X)$

$$E_P\{h(X)\} = \int_\Omega h(X(\omega))\, dP(\omega) = \int_\Omega g(\overbrace{h(X(\omega))}^{(h\circ X)(\omega)})\, dP(\omega) =$$

$$= \int_\Omega g(\underbrace{Y(\omega)}_{t\in\overline{\mathbb{R}}})\, dP^Y(\omega) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} g(t)\, dP^Y(t) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} t\, dP^Y(t) =$$

$$= \int_{\overline{\mathbb{R}}} t\, dP^{h(X)}(t)$$

(6.4) (Βλ. απόδειξη τέλος σημειώσεων)

Έχω ότι $X:\Omega\to[0,\infty]$ τ.μ. (η αντίστοιχη f στο παράδ. 5.33) και $Q:(\Omega,\mathcal{F})\to[0,\infty]$ μέτρο (το αντίστοιχο του ν στο παράδ. 5.33) με $Q(A) = \int_A X\, dP = \int X 1_A\, dP$

Σημείωση

- Το Q: όχι μέτρο πιθανότητας άρα η ποσότητα $\int Y\, dQ$ δεν είναι μέση τιμή.

Η απόδειξη θα γίνει με τυπική μηχανή

$\boxed{B_1}$ Αν $Y = 1_A$ για $A\in\mathcal{F}$

$$\int Y\, dQ = \int 1_A\, dQ \overset{\text{όχι μέση τιμή}}{=} Q(A) = \int_A X\, dP = \int X 1_A\, dP = \int X\cdot \underset{\text{μετατίθενται}}{Y}\, dP$$

$$= \int Y\cdot X\, dP = E_P(Y\cdot X)$$

$\boxed{B_2}$ Αν $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \geq 0$ απλή και μετρήσιμη

Λόγω της γραμμικότητας βγαίνει ότι

$$\int Y\, dQ = \int \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}\, dQ = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\int 1_{A_i}\, dQ\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\, Q(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int X\cdot 1_{A_i}\, dP = \int \sum_{i=1}^{n} a_i X\cdot 1_{A_i}\, dP =$$

$$= \int X\cdot Y\, dP = E_P(X\cdot Y)$$

$\boxed{B_3}$ Αν $Y\geq 0$ μετρήσιμη

Τότε υπάρχει από πρόταση 4.12 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολ. μη αρνητ., απλών, μετρήσιμων συν/σεων με $s_n:\Omega\to[0,\infty)$ $\forall\, n\geq 1$: $s_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} Y$ και από θεωρ. μονότ. σύγκλ.

$$\int Y\, dQ = \lim_n \int s_n\, dQ \overset{\boxed{B_2}}{=} \lim_n \int s_n X\, dP = \int Y\cdot X\, dP =$$

$$= E_P(Y\cdot X)$$

$\boxed{B_4}$ Αν $Y \in \mathbb{R}$ μετρήσιμη (και ένα από τα 2 μέλη της $\int Y\,dQ = E_P(Y \cdot X)$ ορίζεται)

$$\left.\begin{aligned} \int Y^+ dQ &\overset{\boxed{B_3}}{=} E_P(Y^+ \cdot X) \\ \int Y^- dQ &\overset{\boxed{B_3}}{=} E_P(Y^- \cdot X) \end{aligned}\right\} \overset{Y = Y^+ - Y^-}{\Longrightarrow} \int Y\,dQ = \int Y^+ dQ - \int Y^- dQ =$$

$$= E_P(Y^+ \cdot X) - E_P(Y^- \cdot X) =$$

γραμμικότητα

$$= E_P(Y^+ \cdot X - Y^- \cdot X) = E_P(Y \cdot X)$$

✓

(6.5) $P(X>x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x)$ με F_X: σ.κ της X
(Σύμφωνα με την υπόδειξη στο τέλος των σημειώσεων)

$P(X>x)$: παραγωγίσιμη με παράγωγο $-f_X(x)$
$\left(f_X : \text{σ.π.π της } X \text{ κ } f_X(x) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \right)$

Η παράγωγος της $P(X>x)$ είναι <0 $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

$\Rightarrow P(X>x) \searrow$

Θέτω $S(x) = P(X>x) - \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

θν δο
$S(x) \geq 0$

Σημείωση: Οι παρατηρήσεις προέκυψαν ύστερα από λύση στο πρόχειρο και βλέποντας τι χρειαζόμαστε ως δεδομένα

Παρατηρώ ότι:

- S: παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$
χρειαστεί
- $P(X>x) = 1 - F_X(x)$

- (S παραγωγίσιμη) F_X: παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
F_X: συνεχής

$$S'(x) = -f_X(x) - \frac{(x^2+1 - x \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} - \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-x^2/2}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{-f_X(x)} \left(1 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{x^2+1} \right) =$$

$$= -\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{x^2+1} \right) = \frac{-e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(x^2+1)} \left(2 - \frac{2x^2}{x^2+1} \right)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}(x^2+1)} e^{-x^2/2}\left(1-\frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\frac{1}{(x^2+1)^2} < 0$$ (44)

$$\Rightarrow S \searrow \overset{x>0}{\Rightarrow} S(x) \geq \lim_{x\to\infty} S(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{1-F_X(x)}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\substack{\| \\ \frac{1/x}{x+1/x} \\ \downarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\downarrow\, 0}\Big) = 0$$

Άρα $S(x) \geq 0$

Θέτω $G(x) = P(X>x) - \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = 1-F_X(x) - \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$G'(x) = -f_X(x) + \frac{1}{x^2} f_X(x) - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-x^2/2} =$$

$$= -f_X(x) + \frac{1}{x^2} f_X(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{x^2} f_X(x) > 0$$

$$\Rightarrow G \nearrow \overset{x>0}{\Rightarrow} G(x) \leq \lim_{x\to+\infty} G(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{1-F_X(x)}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\downarrow\, 0}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow G(x) \leq 0 \Rightarrow P(X>x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

6.6 (Βλ. διάλεξη 12/11/2020) (μόνο το (a))

Έστω f η πυκνότητα της X $\left(f(x) = f(-x)\right)$

$\boxed{* \ f: \text{Borel-μετρήσιμη}}$

(a) (Για h: Borel-μετρήσιμη άρτια)

$$E(h(X)) = \int h(x) f(x)\, d\lambda(x) = \underbrace{\int_{(-\infty,0)} h(x) f(x)\, d\lambda(x)}_{I} + \int_{(0,\infty)} h(x) f(x)\, d\lambda(x)$$

Θέτω $Y: (-\infty,0) \to (0,\infty)$ με $Y(r) = -r$

$$I = \int_{(-\infty,0)} h(-Y(r))\, f(-Y(r))\, d\lambda(r) \overset{\lambda^Y = \lambda|_{(0,\infty)}}{=} \int_{(0,\infty)} h(-y)\, f(-y)\, d\lambda^Y(y)$$

$$= \int_{(0,\infty)} h(y)\, f(y)\, d\lambda^Y(y)$$

h: άρτια, f: άρτια

$$\Rightarrow E(h(X)) = 2I = 2E(h(X)\cdot 1_{X>0})$$

(6) $$E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\lambda(x) = \underbrace{\int_{(-\infty,0)} h(x)\, d\lambda(x)}_{I} + \int_{(0,\infty)} h(x)\, d\lambda(x)$$

Y: όπως πριν
$Y: (-\infty,0) \to (0,\infty)$
$x \longmapsto -x$

$$I = \int_{(-\infty,0)} h(-Y(x))\, d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)} h(-y)\, d\lambda^Y(y) = \int_{(0,\infty)} -h(y)\, d\lambda^Y(y) = -\int_{(0,\infty)} h(y)\, d\lambda(y)$$

$h(-y)=-h(y)$ αφού h: περιττή

$$\Rightarrow E(h(X)) = I - I$$

6.7 (βλ. διάλεξη 12/11/2020)

(Σημείωση: f: Borel-μετρήσιμη)

Θέτω $A = [f=0] = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P=\lambda$

$$\Rightarrow P(f(X)=0) = P(X\in A) = \int_A f(t)\, \lambda^X(t) = \int_A 0\; \lambda^X(t) = 0$$

f=0 στο A

f: πυκνότητα της X
$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda^X(x) = 1$
$\lambda^X(A) = \lambda(X\in A)$
$\int_A f(x)\, d\lambda^X(x) = \lambda^X(A)$

Αν π.χ. $f(x) = e^{-x} 1_{x\ge 0}$ και X ακολουθεί αυτή την κατανομή
$f(X)=0$ δεν γίνεται γιατί το X θα είναι (σ.π.) ένας αριθμός ($\forall \omega\in\Omega$) εδώ κάνει την $1_{x\ge 0} = 1$

Αν f είναι

το να διαλέξω την κουκίδα (ή ένα σημείο όπου f=0) έχει πιθαν. 0

6.8 $E|X| = \infty$; → Δεν γίνεται γιατί τότε $P(\underbrace{|X|=\infty}_{X=\pm\infty}) = 1 \Rightarrow E(X^2) = \infty$ (άτοπο από υπόθεση)

Άρα $E|X| < \infty \Rightarrow E(X) < \infty$

$$0 \le E\{\underbrace{(X-a)^2}_{\ge 0}\} = E\{X^2 - 2Xa + a^2\} = \underbrace{E(X^2) - 2aE(X) + a^2}_{(*)}$$

$\Rightarrow$ (αν θεωρήσω την τελική ποσότητα ως τριώνυμο ως προς a) Για να είναι η (*) ≥ 0 $\forall a\in\mathbb{R}$

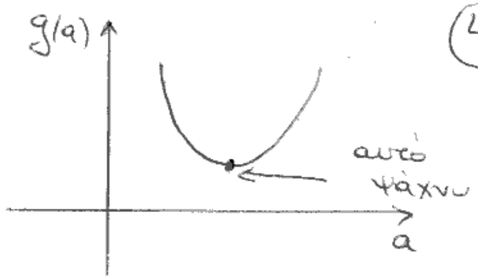
Θέτω $c = E(X^2) < \infty$, $d = E(X) < \infty$

$g' = 2a - 2d = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{a = d}$

για $a > d = E(x) \to g'(a) > 0$

για $a < d = E(x) \to g'(a) < 0$



περίπου έτσι είναι η g

a		d	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα στο $d = E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο

ΚΕΦ 7 (Σύμφωνα με την υπόδειξη)

7.1 (α) $P(\{x\}) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x-\frac{1}{n}, x]\right) = \lim_{n\to\infty} P(x-\frac{1}{n}, x] =$ "συνέχεια" μέτρου

$= \lim_{n\to\infty} \left(F(x) - F(x-\frac{1}{n})\right) = F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x-\frac{1}{n}) =$

$x-\frac{1}{n}$ x

το όριο υπάρχει γιατί $F \nearrow$

$= F(x) - F(x^-)$

(β) $P([x,y]) = P(\{x\}) + P((x,y]) = F(x) - F(x^-) + F(y) - F(x) =$ ερωτ. (α) + σχέση (7.1)

$= F(y) - F(x^-)$

(γ) $P([x,y)) = P([x,y]) - P(\{y\}) = F(y) - F(x^-) - (F(y) - F(y^-)) =$ (β) + (α)

$= F(y^-) - F(x^-)$

(δ) $P((x,y)) = P([x,y)) - P(\{x\}) = F(y^-) - F(x^-) - (F(x) - F(x^-)) =$ (γ) + (α)

$= F(y^-) - F(x)$

7.2 (Σύμφωνα με την υπόδειξη)

Θέτω $A(F) = \{x \in \mathbb{R} : F: \text{ασυνεχής στο } x\}$.

$F \nearrow \Rightarrow$ σε κάθε σημείο ασυνέχειας η F έχει άλμα προς τα πάνω δηλ $F(x^-) < F(x^+) = F(x)$

$\forall x \in A(F)$ επιλέγουμε $q_x \in (F(x^-), F(x^+)) \cap \mathbb{Q}$ επειδή

$F \nearrow$ η $h: A(F) \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto q_x$ είναι 1-1 συν/ση $\Rightarrow$

$A(F) \leq_c \mathbb{Q}$ (μικρότερο ή ίσο ως προς το πλήθος)

$\Rightarrow A(F)$: αριθμήσιμο

7.3

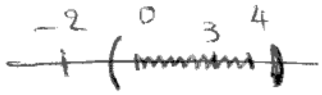
(Σύμφωνα με την υπόδειξη)

Αφού $P_2(\{-2\}) = \frac{1}{2} = P_2(\{3\})$ και $P(\mathbb{R}) = 1 \to$

$P(\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}) = 0$ όπως και $\forall A \subseteq \mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$ $P_2(A) = 0$

(α) $P_1((0,4)) = \int_{(0,4)} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{(0,4)} e^{-x} \cdot 1_{x>0}\, d\lambda(x) \underset{\uparrow}{=} \int_0^4 e^{-x}\, d\lambda(x) =$

$= \int_0^4 e^{-x}\, dx = (-e^{-x})\Big|_0^4 =$



$= (-1 + e^{-4}) = (e^{-4} - 1)$

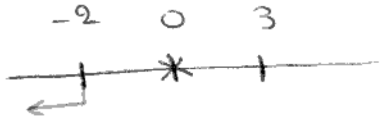
$P((0,3)) = 0 = P((3,4))$

$P_2((0,4)) \overset{3\in(0,4)}{=\!=} P_2(\{3\} \cup (0,3) \cup (3,4)\} = P_2(\{3\}) = \frac{1}{2}$

$P((0,4)) = \lambda P_1((0,4)) + (1-\lambda) P_2((0,4)) = \lambda(e^{-4} - 1) + (1-\lambda)\cdot\frac{1}{2} =$

$= \lambda\left(e^{-4} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}$

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$



$$P((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ (1-\lambda)\frac{1}{2} & -2 \le x \le 0 \\ a & 0 < x < 3 \\ b & x \geq 3 \end{cases}$$

$a = \lambda(P_1((-\infty, x])) + (1-\lambda)\cdot\frac{1}{2} = \lambda(P_1((0,x])) + (1-\lambda)\frac{1}{2} =$

όπως στο (α) $= \lambda(e^{-x} - 1) + (1-\lambda)\cdot\frac{1}{2}$

$b = \lambda(P_1(-\infty, x]) + (1-\lambda) = \lambda(e^{-x} - 1) + (1-\lambda) = \lambda(e^{-x} - 2) + 1$

όπως πριν

7.4 (F: ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$)

συνεχής η $\sqrt{x}$

(α) $F(-1) = \lim_{x\to 1^{-}} \frac{1}{3}\sqrt{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$

$F(1) = F(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^+} x = \frac{1}{2}\cdot 1$

συνεχής η x

Για $F(3)$

$F(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\lim_{x\to 2^-} x = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

x: συνεχής

$F(3) = P(X \le 3) = 1$ γιατί $[X \le 2] \subseteq [X \le 3]$

και $P(X \le 2) = 1$

(β) $P(X<1)=F(1^-)=\frac{1}{3}$ (4B)

$P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

άσκ 7.1 (α)

$P(0,25<X<1,5)=\underbrace{F(1,5^-)}_{\text{άσκ 7.1 (δ)}}-F(0,25)=\lim_{x\to 1,5^-}F(x)-F(0,25)=$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1,5^-}x-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{4}}\overset{x:\text{ συνεχής}}{=}\frac{1}{2}\cdot 1,5-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9-2}{12}=$

$=\frac{7}{12}$

7.5 Υπόθεση : $F\nearrow$, συνεχής, $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$

(Αν αντί για τυχ. μέτρο πιθαν. έχω το Lebesgue βλ παρατ. 4.2.7 (α) πραγμ. ανάλ. ή άσκ. 3.6(α) σημ. εσκεμένη)

Παραπομπές από πραγμ. Ανάλ.
[1] Ορσ 4.2.1
[2] Θεωρ. 2.1.13

Από [1] F ομοιόμ. συνεχής $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: αν $(\forall)\,x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$

Έστω προς άτοπο ότι F : όχι ομοιόμ. συνεχ.

~~$(-\infty,y]=(-\infty,x]\cup[x,y]$ ... $(-\infty,x]\subseteq(-\infty,$~~

~~$\Rightarrow P((-\infty,y])=P((-\infty,x])+P([x,y])$~~

τότε $\exists\,\varepsilon>0$: $\forall\,\delta>0$ $\exists\,x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ και

$|F(x)-F(y)|\geq\varepsilon$ (*)

Παίρνω για $\delta_n=\frac{1}{n}$ $x_n,y_n\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (*)

Άρα $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $|x_n-y_n|\to 0$

και $|F(x_n)-F(y_n)|\geq\varepsilon$ $\forall n\in\mathbb{N}$

(Π1) Αν $x_n\to\infty$ $\Rightarrow$ $y_n\to\infty$ $\overset{F:\text{ συνεχής}}{\Rightarrow}$ $|F(x_n)-F(y_n)|\to|F(\infty)-F(\infty)|=0$ άτοπο

(Π2) Αν $x_n\to-\infty$ $\to$ $y_n\to-\infty$ έχω ομοίως άτοπο

(Π3) Άρα x_n : φραγμένη ($\exists\,M>0$: $|x_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$) και

Άρα y_n : φραγμένη. Από [2] (έχω ευκλείδ. χώρο)

$\exists\ x_{n_k}$ υπακολ. : $x_{n_k}\to t$ για κάποιο $t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$y_{n_k}\to t\in\mathbb{R}$

$\overset{F:\text{ συνεχής}}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}F(x_n)\to F(t)\\F(y_n)\to F(t)\end{array}\right\}$ $|F(x_n)-F(y_n)|\to 0$ άτοπο

Άρα F : ομοιόμ. συνεχής

7.6 $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$

Έστω $w \in (0,1)$ (αριθμός), $Q_1, Q_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$ οι συν/σεις ποσοστημορίων των X_1, X_2 αντίστοιχα κ $x \in \mathbb{R}$. Θέτω

F_1, F_2 : συν/σεις κατανομής των X_1, X_2 αντίστ.

$$\left.\begin{array}{lll} F_1(x) \geq w & \Leftrightarrow & x \geq Q_1(w) \\ F_2(x) \leq w & \Leftrightarrow & x \leq Q_2(w) \end{array}\right\} \begin{array}{c} F_1(x) \geq F_2(x) \\ \Updownarrow \\ Q_1(w) \leq Q_2(w) \end{array}$$

Παίρνω U τ.μ. σε χώρο πιθανότ. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ που ακολουθεί την $Uni((0,1))$ τότε

$Q_1(U) \leq Q_2(U)$ (δηλ. $(Q_1 \circ U)(w) \leq (Q_2 \circ U)(w)$ $\forall w \in \Omega$)

Θέτω $Y_1 = Q_1(U)$, $Y_2 = Q_2(U)$ οι οποίες είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (κοινός) με $Y_1 \overset{d}{=} X_1$, $Y_2 \overset{d}{=} X_2$ από πρότ. 7.10. Αφού $Y_1 \leq Y_2$ ($\forall w \in \Omega$ δηλ $Y_1(w) \leq Y_2(w)$)

$P(Y_1 \leq Y_2) = 1$

$\boxed{(b) \Rightarrow (\delta)}$ $P(Y_1 \leq Y_2) = 1 \Rightarrow Y_1 \leq Y_2$ σ.π. στο Ω (αν έχω χώρο πιθανότ. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: $Y_2, Y_1 : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$). Έστω $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα

$\overset{h \nearrow}{\Longrightarrow} h(Y_1) \leq h(Y_2)$ σ.π. στο Ω ($h \circ Y_1$: τ.μ. με $h \circ Y_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ ομοίως κ η $h \circ Y_2$)

$\Rightarrow E_P(h(Y_1)) \leq E_P(h(Y_2)) \overset{\text{Παρατ.}}{\underset{6.5}{\Longrightarrow}} E_{P_1}\{h(X_1)\} = E_{P_2}\{h(X_2)\}$

$\boxed{(\delta) \Rightarrow (a)}$ Όπως πριν Q_1, Q_2 οι συν/σεις ποσοστ., $U \sim Uni((0,1))$ στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$E_P(h(\underbrace{Y_1}_{Q_1(U) \overset{d}{=} X_1})) \overset{(*)}{=} E_{P_1}(h(X_1)) \leq E_{P_2}(h(X_2)) \overset{(*)}{=} E_P(h(\underbrace{Y_2}_{X_2 \overset{d}{=} Q_2(U)}))$$

(*) Παρατηρ. 6.5

Έστω $x \in \mathbb{R}$. $\underbrace{\{w \in \Omega : x < Y_1(w)\}}_{[Y_1 > x]} \subseteq [Y_2 > x]$ γιατί αν

$w \in [Y_1 > x] \to x < Y_1(w) \leq Y_2(w) \Rightarrow Y_2(w) > x \Rightarrow w \in [Y_2 > x]$

$\Rightarrow \underbrace{P(Y_1 > x)}_{P_1(X_1 > x)} \leq P(Y_2 > x) = P_2(X_2 > x) \to X_1 \leq_{st} X_2$

7.7 (Βλ. διάλεξη 19/11/2020 & 24/11/2020)

(α) (X^*: size bias version of X)

Θέτω $g(x) = \frac{1}{\mu} E(X \cdot 1_{X \le x})$

Σημείωση για (β): Δηλ. ορίζεται ένα από τα 2 μέτρα

- $g \uparrow$ γιατί αν $x_1 \le x_2 \Rightarrow$ (ελέγξτε το)

$X \cdot 1_{X \le x_1} \le X \cdot 1_{X \le x_2}$

$\Rightarrow E(X \cdot 1_{X \le x_1}) \le E(X \cdot 1_{X \le x_2}) \Rightarrow g(x_1) \le g(x_2)$

Άρα ισχύει και

- g: δεξιά συνεχής (αφού $g \uparrow$) αφού

$g(x_0^+) = \lim_n g(x_0 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\mu} \lim_n E(\underbrace{X \cdot 1_{X \le x_0 + \frac{1}{n}}}_{X_n})$ (*)

Μπορώ να εφαρμόσω θεώρ. κυριαρχ. σύγκλισης (το όριο μπαίνει στη μέση τιμή) ($X_n \to X_0$)

(*) $= \frac{1}{\mu} E(\lim_n X_n) = \frac{1}{\mu} E(X \cdot 1_{X \le x_0}) = g(x_0)$

Η X^* δεν έχει την ίδια πιθανότ. να πάρει μια τιμή με τη X δηλ. $P(X=a) \neq P(X^*=a)$

$P(X^*=a) = a P(X=a)$ δηλ. δίνω μεγαλύτερη πιθανότ. στις μεγαλύτερες τιμές

~~$g(-\infty) = \lim_n g(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu} E(X \cdot 1_{X \le -n})$~~

$g(x) = 0 \quad \forall x < 0 \Rightarrow g(-\infty) = 0$ (γιατί $X \in [0, \infty)$)

$g(\infty) = \lim_n \frac{1}{\mu} E(\underbrace{X \cdot 1_{X \le n}}_{\text{αύξουσα θετ. ακολ.}}) \overset{\circledast}{=} \frac{1}{\mu} E(X) \underset{\mu = E(X)}{=} 1$

$\circledast$ εφαρμόζω θεώρ. μονότ. σύγκλισης (ή κυριαρχημένης) στην $Y_n = X \cdot 1_{X \le n}$ με $Y_n \to X$. Το όριο μπαίνει στην μέση τιμή

Από θεώρ. 7.8 $\exists$ X^* τ.μ. ώστε

g: συν/ση κατανομής της X^*

(β) (Με τυπική μηχανή)

$\boxed{B_1}$ Αν $h = 1_A \; \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (μετρήσιμη) (σύνθεση $1_A \circ X^*$)

Έστω τα μέτρα • $\mu(A) = P(1_A(X^*)) = P(X^* \in A)$ (σύνθεση)

(που είναι μέτρο πιθανότητας) και • $\nu(A) = \frac{1}{\mu} E(X \cdot 1_A(X))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Όπου το $\nu(A)$ είναι μέτρο πιθανότητας

- $\nu(\mathbb{R}) = \frac{1}{\mu} E(X) \underset{E(X)=\mu}{=} 1$ ✓

Για $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}$. Άρα

από πόρισμα 3.7 $\quad \mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Συνεπώς:

$E(h(X^*)) = \frac{1}{\mu} E(X \cdot h(X)) \quad (h = 1_A \text{ για } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(το ξέραμε για $1_{(-\infty, x]}$)

$\boxed{B_2}$ Για $h = \sum_{k=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ απλή ⊕ μετρήσιμη

γραμμικότητα, $\boxed{B_1}$

$$E(h(x^*)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x^*)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_i E(1_{A_i}(x^*)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_i \frac{1}{\mu} E(x \cdot 1_{A_i}(x)) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} a_i E(x \cdot 1_{A_i}(x)) =$$

$$= \frac{1}{\mu} E\left(x \cdot \sum_{k=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)\right) = \frac{1}{\mu} E(x \cdot h(x))$$

γραμμ.

$\boxed{B_3}$ για $h \geq 0$ μετρήσιμη βρίσκω $S_n \nearrow$ (από πρότ. 4.12) μη αρνητ. απλών μετρήσ. συν/σεων, $S_n : \Omega \to [0,\infty)$ με $S_n \xrightarrow{\text{κ.σ}} h$ και από θεωρ. μονότονης σύγκλ.

$$\lim_n \int S_n \, dP = \int h \, dP \Rightarrow \lim_n E(S_n) = \int \underbrace{(\lim_n S_n)}_{h} dP$$

$$\Rightarrow \lim_n E(S_n(x^*)) = \int \underbrace{\lim_n S_n(x^*)}_{h \circ x^*} dP = E(h \circ x^*)$$

Επίσης αφ' $x \in [0,\infty)$ $x \cdot S_n \xrightarrow{\text{κ.σ}} x \cdot h$, $x \cdot S_n \nearrow$ (Β από θεωρ. μονότονης σύγκλ.)

$$\lim_n \int x \cdot S_n \, dP = \int x \cdot h \, dP \Rightarrow \lim_n \underbrace{\int X \cdot S_n(x) \, dP}_{E(X \cdot S_n(x))} = \int x \cdot h(x) \, dP = E(x \cdot h(x))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \lim E(x \cdot S_n(x)) = \frac{1}{\mu} E(x \cdot h(x))$$

όμως από $\boxed{B_2}$ $E(S_n(x^*)) = \frac{1}{\mu} E(x \cdot S_n(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_n E(S_n(x^*)) = \lim_n \frac{1}{\mu} E(x \cdot S_n(x)) = \frac{1}{\mu} E(x \cdot h(x))$$

$$E(h \circ x^*)$$

$\boxed{B_4}$ Για $h \in \mathbb{R}$ μετρήσιμη $h = h^+ - h^-$

$$E(h(x^*)) = E(h^+(x^*) - h^-(x^*)) = E(h^+(x^*)) - E(h^-(x^*)) =$$

$$= \frac{1}{\mu} E(x \cdot h^+(x)) - \frac{1}{\mu} E(x \cdot h^-(x)) = \frac{1}{\mu} E(x \cdot [h^+(x) - h^-(x)]) =$$

$\boxed{B_3}$

$$= \frac{1}{\mu} E(X \cdot h(x))$$

(24/11/2020)

(δ) Έστω $S = X(\Omega) \subseteq [0,\infty)$

Για $a\in\mathbb{R}$, $h = 1_{\{a\}}$ η (7.6) (δηλ. το (6)) δίνει

$$\underbrace{E\{1_{\{a\}}(X^*)\}}_{P(X^*=a)} = \frac{1}{\mu}\underbrace{E(X\cdot 1_{\{a\}}(X))}_{\circledast}$$

$\circledast$ $X\cdot 1_{\{a\}}(X) = \begin{cases} a & \text{αν } X(\omega)=a \\ 0 & \text{αν } X(\omega)\neq a\end{cases} = a\cdot 1_{\{X=a\}}$

$$\Rightarrow P(X^*=a) = \frac{1}{\mu}\cdot E(a\cdot 1_{\{X=a\}}) = \frac{1}{\mu}\cdot a\cdot P(X=a) \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

συνάρτηση πιθαν. της X^*

Παρατηρώ ότι: X^* διακριτή γιατί $P(X^*\in S) =$

$$= \sum_{a\in S}\frac{1}{\mu}aP(X=a) = \frac{1}{\mu}\sum_{a\in S} a P(X=a) \overset{(6.10)}{=} \frac{1}{\mu}E(X) = 1$$

$$\Rightarrow f_{X^*}(a) = \frac{1}{\mu}a\, f_X(x) \quad (\text{και } X\text{: διακριτή})$$

(ε) Έστω $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Από σχ.(7.6) $P(X^*\in A) = E(1_A(X^*)) \overset{(7.6)}{=}$

$$= \frac{1}{\mu}E(X 1_A(X)) \underset{\text{προτ. }(6.9)}{=} \frac{1}{\mu}\int x\cdot 1_A(x)\cdot f_X(x)\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_A \underbrace{\frac{1}{\mu}x\cdot f_X(x)}_{g(x)}\, d\lambda(x)$$

(πάντα αν καταφέρω να το φτάσω σε τέτοια μορφή g: πυκνότητα της μετ/τής (εδώ X^*))

$$\Rightarrow f_{X^*}(x) = g(x)$$

(I.B) Το σύνολο του Cantor προκύπτει ως εξής (βλ. 5 Σημ. Εσκ. § 4.4.1) (53)

Θέτω $C_0 = [0,1]$ το χωρίζω σε 3 ίσα διαστήματα και παίρνω αφαιρώ το ανοιχτό μεσαίο $(1/3, 2/3)$

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

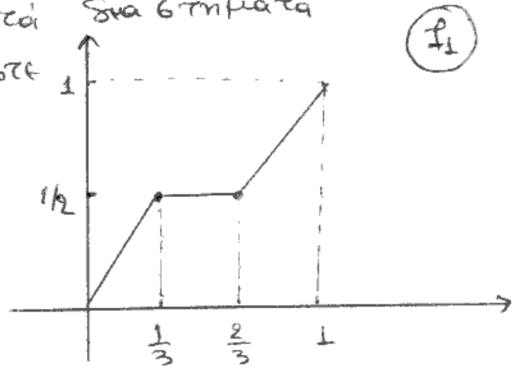
το ίδιο κάνω σε καθένα από τα $[0,1/3]$, $[2/3,1]$ (προκύπτει δηλ.

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]\ )$$

Θέτω $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ το σύνολο του Cantor
(Βλ. για τα επόμενα § 4.4.2 σημ. Εσκενάζη)

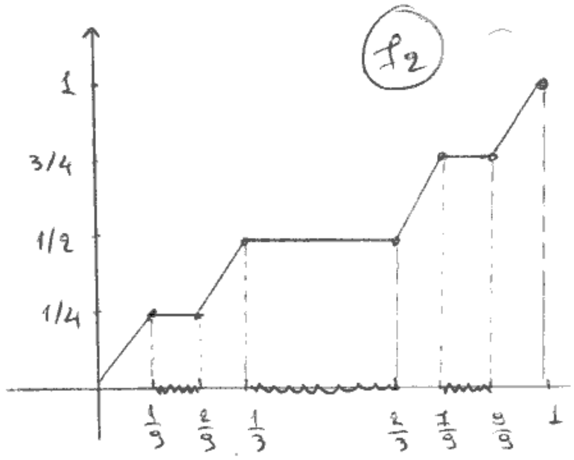
Στο n-οστό βήμα θέτω $J_1^n, \dots, J_{2^n-1}^n$ τα διαδοχ. ανοιχτά διαστήματα που φτιάχνουν το $[0,1]\setminus C_n$ (όχι μόνο αυτά που έβγαλα στο n-οστό βήμα δηλ αλλά και τα προηγούμενα)

Θέτω $f_n : [0,1] \to [0,1]$: $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ $\forall x \in J_k^n$ και επεκτείνω σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n γραμμικά ώστε να προκύψει συνεχής συν/ση



$\boxed{\text{Θα θέσω } \phi \text{ το όριο } \lim_n f_n \quad (\text{δηλ. } \phi(x) = \lim_n f_n(x))}$

Από την κατασκευή της $f_n \nearrow$ $\forall n$ (δηλ. αν $x < y \in [0,1]$ $f_n(x) \le f_n(y)$) και συνεχής



$\forall\ J_k^n$ $\quad f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \dots$
στο J_k^n

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$$\|f_m - f_n\|_\infty \le \sum_{k=n}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Από Κεφ 8 Πραγμ. Αναλ.

$(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ πλήρης άρα αφού δ.ο. f_n : βασική ακολουθία $f_n \to \phi$ για $\phi \in C[0,1]$ (οι συνεχείς συν/σεις του $[0,1]$) και αφού $f_n \nearrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi \nearrow$ και συνεχής

Αφού είναι σταθερή για κάθε J_n^k ($f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \dots$

άρα $\phi \equiv f_n$ στο J_k^n) $\Rightarrow \phi'(x)=0$ στο $[0,1]\setminus C_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$[0,1]\setminus C = [0,1]\setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{[0,1]\setminus C_n\}$ άρα $\phi'(x)=0$

$\forall x\in[0,1]\setminus C$

ϕ: επί του $[0,1]$ αφού στο συμπλήρωμα του C

παίρνει όλες τις τιμές εκτός των $\frac{k}{2^n}$ τις οποίες

όμως τις παίρνει στα άκρα των ανοιχτών διαστημάτων

(δ) Έστω $x\in\mathbb{R}$ $\mu((-\infty,x]) = \phi(x)$. $\mu([0,1]) = 1$ $\mu(C) = ;$

Η εικόνα του C μέσω της ϕ είναι το $[0,1]$ αφού

παίρνει τις τιμές $\frac{k}{2^n}$ στα άκρα των ανοιχτών διαστημάτων

που ανήκουν στο C άρα (αφού ϕ: συνεχής, είναι μετρήσιμη)

$\mu([0,1]\setminus C) = \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]\setminus C_n}\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu([0,1]\setminus C_n) =$

$= \sum_n \big(\mu([0,1]) - \mu(C_n)\big) = \sum_n \big(F(1)-F(0)-\mu(C_n)\big)$

$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(1)-\phi(0^-) - \mu(I_n)(2)^n \underset{\phi:\text{ συνεχής}}{=} 1 - 0 - 1 = 0$

$\hookrightarrow \mu([0,1]\setminus C)=0$

Αν $I_n \subseteq C_n$ ένα κλειστό διάστημα του n-οστού βήματος με $I_n=[a_n,b_n]$

$\mu(C_n) = (2)^n \mu(I_n)$

ένωση 2^n ($I_n=[a_n,b_n]$) διαστημάτων μήκους

$\mu(I_n) = F(b_n)-F(a_n) = \phi(b_n)-\phi(a_n) = 1/2^n$

(ε) $\mu(\{x\}) = \phi(x)-\phi(x^-) = \phi(x) - \lim_{y\to x^-}\phi(y) \underset{\phi:\text{ συνεχής}}{=} \phi(x) - \lim_{y\to x}\phi(y) =$

$\overset{\phi:\text{ συνεχής}}{=} \phi(x)-\phi(x) = 0$

(Βλ. Παρατηρήσεις μετά το παραδ. 7.5)

Αν έχει πυκνότητα $\Rightarrow \mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow F$: συνεχής

(Ισχύει δεν ισχύει το αντίστροφο/αντίστροφο)

Έστω προς άτοπο ότι $\exists$ $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ Lebesgue μετρήσ.

ώστε

$\int_A f(x)\,d\lambda(x) = \mu(A)$ (δηλ. f: πυκνότητα του μ)

τότε $\mu([0,1]\setminus C) = 0 = \int_{[0,1]\setminus C} f(x)\,d\lambda(x) \Rightarrow f(x)\cdot 1_{[0,1]\setminus C}(x) = 0$ λ-σ.π. στο $\mathbb{R}$

Όμως

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x) = \mu(\mathbb{R}) = F(+\infty) = 1 \Rightarrow f\neq 0$ λ-σ.π. στο $\mathbb{R}$

και $\lambda([0,1]\setminus C) = 1$ $\quad (\lambda(C)=0) \Rightarrow 1_{[0,1]\setminus C} \neq 0$ λ-σ.π. στο $\mathbb{R}$

άτοπο Άρα $\nexists$ τέτοια f.

ΚΕΦ 8

8.1 (Βλ. Αντωνίου + Παρασκ. σελ 26 η υπόδειξη στο τέλος)

(a) $\Rightarrow$ (b)

$P(\lim_n X_n = 0) = 1$

Αν $\omega \in \limsup_n A_n^\varepsilon \Rightarrow |X_n(\omega)| \geq \varepsilon$ για άπειρα n

(άρα $X_n(\omega)$ δεν συγκλίνει στο 0)

$\Rightarrow \omega \notin [\lim_n X_n = 0] \Rightarrow \limsup_n A_n^\varepsilon \subseteq \Omega \setminus [\lim_n X_n = 0]$

$\Rightarrow P(\limsup_n A_n^\varepsilon) \leq P(\Omega) - P(\lim_n X_n = 0) = 1 - 1 = 0$

(για $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ο χώρος πιθανότητας που έχω)

(b) $\Rightarrow$ (a)

Αν $\omega \in [\lim_n X_n = 0]$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \ |X_n(\omega)| < \varepsilon$ $\Rightarrow \omega \notin \limsup_n A_n^\varepsilon \Rightarrow \omega \in \Omega \setminus [\limsup_n A_n^\varepsilon]$

$\Rightarrow \omega \notin A_n^\varepsilon \quad \forall n \geq k \quad \Rightarrow \omega \notin \limsup_n A_n^\varepsilon$

$\Rightarrow [\lim_n X_n = 0] \subseteq \Omega \setminus \limsup_n A_n^\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\lim_n X_n = 0) \leq P(\Omega) - P(\limsup_n A_n^\varepsilon) = 1 - 0 = 1$

8.2 (Βλ. διάλεξη 1/12/2020 & ασκ. 1.4 Πραγμ. Ανάλ.)

(a) (Ουσ. δηλ. ότι μοιάζει με μετρική)

(i) $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E\left\{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right\} = 0 \Leftrightarrow$ προτ. 5.14 i

$P\left(\underbrace{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} = 0}\right) = 1$ (δηλ. $\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} = 0$ P-σ.π.) $\Leftrightarrow$

$\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} = 0 \Leftrightarrow |X-Y| = 0 \Leftrightarrow X = Y$

$\Leftrightarrow P(X=Y) = 1$ (δηλ. $X = Y$ P-σ.π.)

(ii) $d(X,Y) = E\left\{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right\} = E\left\{\frac{|Y-X|}{1+|Y-X|}\right\} = d(Y,X)$

$|X-Y| = |Y-X|$

(iii) $d(X,Z) = E\left\{\frac{|X-Z|}{1+|X-Z|}\right\}$

Θέτω $\rho(x,y) = |x-y|$ για $x,y \in \mathbb{R}$ (αριθμοί) (ρ: μετρική γνωστό) (56)

& $\sigma(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ και δν/δο αν $z \in \mathbb{R}$

$\sigma(x,y) \le \sigma(x,z) + \sigma(z,y)$. Θέτω ακόμη $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ για $t \in [0,\infty)$

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \underset{f\nearrow}{\le} \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$f'(t) = \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

$\hookrightarrow f \nearrow$

Αρκεί ν/δο $\dfrac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} \le \sigma(x,z) + \sigma(z,y)$

Αν $t, s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$f(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \le \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = f(t) + f(s)$$

μικρότερος παρονομαστής

Άρα για $t = \sigma(x,z)$, $s = \sigma(z,y)$ ισχύει το ζητούμενο

$$\Rightarrow \quad \sigma(X,Z) \le \sigma(X,Y) + \sigma(Y,Z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\sigma(X,Z)) \le E(\sigma(X,Y) + \sigma(Y,Z)) \overset{\text{γραμμικότ.}}{=} E(\sigma(X,Y)) + E(\sigma(Y,Z)) \quad ✓$$

(Β) ~~$(\Rightarrow)$ $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \lim_n (P(|X_n - X| > \varepsilon)) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$~~

~~$\Rightarrow \lim_n [P(\Omega) - \underbrace{P(|X_n - X| > \varepsilon)}_{\le \varepsilon}] = P(\Omega) - 0 = 1$~~ ~~$\forall \varepsilon > 0$~~

~~$\lim_n (P(\Omega \setminus [|X_n - X| > \varepsilon])) = \lim_n P([|X_n - X| \le \varepsilon])$~~

$\Rightarrow$ 1ος τρόπος

ΓΕΝΙΚΑ $\boxed{d(X_n, X) \to 0 \iff X_n \to X}$

Αν $X_n \xrightarrow{P} X$ ν/δο $d(X_n, X) \to 0$

Έστω προς άτοπο ότι $d(X_n, X) \not\to 0$. Άρα

$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \exists\, k_n > n$ με $d(X_{k_n}, X) \ge \varepsilon$

$\Rightarrow \exists$ υπακολ. $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$: $d(X_{k_n}, X) \ge \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$X_{k_n} \xrightarrow{P} X \underset{\text{Θ.Μ.}}{\overset{\text{Θεωρ}}{\Longrightarrow}} \exists$ υπακολ. $(X_{k_{n_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$: $X_{k_{n_\ell}} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\lim_\ell X_{k_{n_\ell}} = X) = 1 \Rightarrow f_\ell(\omega) = |X_{k_{n_\ell}} - X| \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$ με πιθ 1

$$\Rightarrow \underbrace{E\left(\frac{f_\ell(\omega)}{1+f_\ell(\omega)}\right)}_{d(X_{k_{n_\ell}}, X)} \xrightarrow{\ell \to \infty} E(0) = 0$$ άτοπο γιατί $d(X_{k_n}, X) \ge \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

8.3 Για όλη την άσκηση

Θέτω $Y_n = \begin{cases} |X_n| & \text{αν } |X_n| \le 1 \\ 1 & \text{αν } |X_n| > 1 \end{cases} = |X_n| \wedge 1$

και $A_n^\varepsilon = [|X_n| > \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$

$(\Rightarrow)$ $X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow P(A_n^\varepsilon) \to 0 \Rightarrow P(A_n^1) \to 0$

$$E(Y_n) = \underbrace{E(|X_n| \cdot 1_{|X_n| \le 1})}_{;} + \underbrace{E(1_{|X_n|>1})}_{P(A_n^1) \to 0}$$

Έστω ότι $E(|X_n| \cdot 1_{|X_n| \le 1}) \not\to 0 \Rightarrow \exists X_{k_n}$ υπακολ. την X_n : $E(|X_{k_n}| \cdot 1_{|X_{k_n}| \le 1}) \ge \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και κάποιο $\varepsilon > 0$

(παίρνω την άρνηση του ορισμού του ορίου
($\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} : \;\; \forall n > k \;\; E(|X_n| \cdot 1_{|X_n| \le 1}) < \varepsilon$)
$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists k_n > n \;\; E(|X_{k_n}| \cdot 1_{|X_{k_n}| \le 1}) \ge \varepsilon$)

[Θα χρησιμοποιήσω το αποτέλεσμα:
$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \forall X_{k_n} \xrightarrow{P} X \quad \forall X_{k_n}$: υπακολ. της X_n
θα το αποδείξω στο τέλος της άσκησης]

$|X_{k_n}| \xrightarrow{P} 0 \overset{\text{Θεωρ.}}{\underset{8.4}{\Longrightarrow}} \exists X_{k_{n_\ell}}$ υπακολ. της X_{k_n} ώστε $X_{k_{n_\ell}} \xrightarrow[\ell \to \infty]{\sigma.\beta} 0$ (δηλ. σχεδόν $\forall \omega \in \Omega$)

Άρα $|X_{k_{n_\ell}}| \cdot 1_{|X_{k_{n_\ell}}| \le 1} \to 0$ σ.π. Επίσης
$\left| |X_{k_{n_\ell}}| \cdot 1_{|X_{k_{n_\ell}}| \le 1} \right| \le 1$. Από Θεωρ. φραγμένης σύγκλ.

$E(|X_{k_{n_\ell}}| \cdot 1_{|X_{k_{n_\ell}}| \le 1}) \to 0$ άτοπο. Άρα $E(Y_n) \to 0$

$(\Leftarrow)$

$$E(Y_n) = E(|X_n| \cdot 1_{|X_n| \le 1}) + E(|X_n| \cdot 1_{|X_n| > 1}) \to 0$$

και αφού είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων και οι 2 όροι συγκλίνουν στο 0

Όμως $P(A_n^{\varepsilon}) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Αν $\varepsilon = 1 \qquad P(|X_n| > \varepsilon) = E(1_{|X_n|>1}) \to 0$

Αν $\varepsilon > 1 \qquad P(\underbrace{|X_n| > \varepsilon}_{\subseteq [|X_n|>1]}) \leq P(|X_n| > 1) \to 0$

Αν $\varepsilon < 1 \qquad P(|X_n| > \varepsilon) = P(1 \geq |X_n| > \varepsilon) + \underbrace{P(|X_n| > 1)}_{E(1_{|X_n|>1}) \to 0}$

Έστω ότι $P(\varepsilon < |X_n| \leq 1) \not\to 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n > n$ με $P(\varepsilon < |X_{k_n}| \leq 1) \geq \delta$

$\Rightarrow P(|X_{k_n}| > 1) + P(|X_{k_n}| \leq \varepsilon) \leq 1 - \delta$

συμπλήρωμα του $[\varepsilon < |X_{k_n}| \leq 1]$ κ ξένα

$\Rightarrow P(|X_{k_n}| > 1) < 1$ άτοπο άρα $P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$

και $X_n \xrightarrow{P} 0$

Απόδειξη του $\boxed{X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall X_{k_n} \xrightarrow{P} X}$ $\forall X_{k_n}$: υπακολ. της X_n

$(\Leftarrow)$ προφανές (παίρνω για υπακολουθία της $X_{k_n} = X_n$)

$(\Rightarrow) \quad X_n \xrightarrow{P} X \overset{\text{άσκ } 8.2(β)}{\iff} d(X_n, X) \to 0$

Έστω X_{k_n} υπακολουθία της X_n $(k_n \geq n)$

$d(X_n, X) \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \quad d(X_n, X) < \varepsilon$

αφού $k_n \geq n \quad d(X_{k_n}, X) < \varepsilon \iff X_{k_n} \xrightarrow{P} X$

8.4 (βλ. διαλ. 1/12/2020 ή Volterras σελ 10)

Έστω $\varepsilon > 0$. Θ.δ.ο. $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 0$. (Προσέξτε ότι οι X_n είναι ΙΣΟΝΟΜΕΣ)

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P(|X_n| > n\varepsilon) =$$

$$= P(|X_1| > n\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [|X_1| > n\varepsilon]\right) =$$

$$= P(|X_1| = \infty) = 0$$

($X_1 \in \mathbb{R}$)

Αν $E(X_n)$ (άρα και των άλλων X_i) είναι $<\infty$ τότε θα μπορούσα να κάνω ανισ. Markov. Αλλά ισχύει κ χωρίς αυτή την υπόθεση.

8.5 (βλ. διαλ 1/12/2020 ή Αντρέου-Παρασκ. σελ 28)

1ος τρόπος

$X_n \xrightarrow{P} X \underset{8.4}{\overset{\text{θεωρ}}{\Longrightarrow}} \exists (X_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολ. : $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta} X$

$X_n \xrightarrow{P} Y$ άρα $\cancel{X_{k_n}}\ X_{k_n} \xrightarrow{P} Y$ Άρα από θεωρ. 8.4

$\exists (X_{k_{n_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}} : X_{k_{n_\ell}} \xrightarrow{\sigma.\beta} Y$

Θέτω $A = \{\omega\in\Omega : X_{n_k}(\omega) \xrightarrow{\sigma.\beta} X(\omega)\}$

$B = \{\omega\in\Omega : X_{n_{k_\ell}}(\omega) \xrightarrow{\sigma.\beta} Y(\omega)\}$

$P(A\cap B) = 1$ γιατί $\begin{cases} P(B) = 1 \\ P(A) = 1 \end{cases}$ (ορισμός $\xrightarrow{\sigma.\beta}$)

έχω 2 σύνολα που είναι σχεδόν όλο το Ω ⇒ η τομή τους είναι σχεδόν όλο το Ω

Αν $\omega \in A\cap B \Rightarrow X_{k_{n_\ell}}(\omega) \begin{cases} \xrightarrow{\sigma.\beta} X(\omega) \\ \xrightarrow{\sigma.\beta} Y(\omega) \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = Y(\omega)$

$\Rightarrow A\cap B \subseteq \{X = Y\} \Rightarrow \underbrace{P(A\cap B)}_{1} \leq P(X=Y) \to P(X=Y) = 1$

Η σημασία της 8.5 είναι ότι δεν γίνεται το όριο να είναι διαφορετικό (με την έννοια της σ.π. διαφορετικότητας).

(*) Δεν γίνεται το όριο της σύγκλισης κ.π. (κατά πιθανότ.) να είναι διαφορετ. της $\xrightarrow{\sigma.\beta}$

8.6 (β) $\|X_n - X\|_r \leq \|X_n - X\|_s$ από πρoτ. 5.22

όμως $E|X_n - X|^s \xrightarrow{n\to\infty} 0 \to \|X_n - X\|_s = \left(E|X_n - X|^s\right)^{1/s} \to 0$

$\Rightarrow \|X_n - X\|_r \to 0 \to E(|X_n - X|^r) \to 0 \to X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$

(a) Θα αποδείξω μετά την ανισότητα Minkowski η οποία λέει ότι αν $X, Y \in \mathcal{L}^p$, $1 < p < \infty$ $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$

$\|X_n\|_s = \|X_n - X + X\|_s \underset{\text{Minkowski}}{\leq} \|X_n - X\|_s + \|X\|_s \to \|X_n\|_s - \|X\|_s \leq \underbrace{\|X_n - X\|_s}_{0}$

$\Rightarrow \quad \|X_n\|_s - \|X\|_s \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \|X_n\|_s \longrightarrow \|X\|_s$

$\Rightarrow \left[E(|X_n|^s)\right]^{1/s} \longrightarrow \left(E|X|^s\right)^{1/s} \Rightarrow E|X_n|^s \longrightarrow E|X|^s$

Απόδειξη της ανισότητας Minkowski
(μπορούσα να την χρησιμοποιήσω γιατί εξ ορισμού για να είναι $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X$ $\quad X_n, X \in \mathcal{L}^s$)

τριγωνική
$|X+Y| \leq |X| + |Y|$

$\|X+Y\|_p^p = E|X+Y|^p = E\left[|X+Y|\,|X+Y|^{p-1}\right] \leq$

$\leq E\left[(|X|+|Y|)\,|X+Y|^{p-1}\right] \leq \left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right) \|(X+Y)\|_q^{p/q} =$

Hölder (*) $p-1 = \frac{p}{q}$ $\left(1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$

$= \left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)\left(E|X+Y|^p\right)^{1/q = 1 - 1/p}$

$\Rightarrow \left(E|X+Y|^p\right)^{1/p} \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$ (κάναμε "χιαστί")

οπότε πριν θέσαμε $p = s$, $X \to X_n - X$, $Y \to X$

(8.7) (a) (Βλ. διάλεξη 1/12/2020) (είχε μπει θέμα εξετάσεων στο παρελθόν)

Θ δο $X_n \xrightarrow{P} 1$

Έστω $\varepsilon > 0$ $\quad P\left(|X_n - 1| > \varepsilon\right) \leq 2\varepsilon_n$ (αν $\varepsilon < 1$ έχω "=")

$\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(β) Αν $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ πρέπει $X = 1$ (για να συμφωνεί με την κατά πιθανότητα σύγκλιση αφού την συνεπάγεται)

$$E|X_n - 1| = \underbrace{\varepsilon_n\,|0-1|}_{\varepsilon_n \to 0} + \underbrace{(1-2\varepsilon_n)}_{\to 1}\cdot 0 + \varepsilon_n\,|n^2 - 1| \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\varepsilon_n \cdot (n^2 - 1) = \frac{1}{2n^2}(n^2-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

Άρα $X_n \stackrel{\mathcal{L}^1}{\not\to} X$

κεφ 9 (βλ. υπόδ.)

(9.1)

$$\int_0^1 f(x)\,d\lambda(x) = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x) \overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{n\geq 1}\int_0^1 \frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x)$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x)}_{I_n} \qquad \text{Θέτω } I_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x)$$

$$I_n = \int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x) + \int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}\,d\lambda(x) =$$

$$\overset{\text{Riemann}}{=} \underbrace{\int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{q_n - x}}\,dx}_{A_n} + \underbrace{\int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x-q_n}}\,dx}_{B_n}$$

$$A_n \overset{y = q_n - x}{=} \int_{q_n}^0 \frac{-1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^{q_n}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$B_n \overset{x - q_n = y}{=} \int_0^{1-q_n}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$\Rightarrow I_n \leq 2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy}_{2\sqrt{y}\,\big|_0^1 = 2} \rightarrow \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x) \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\cdot\left(2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right)$$

$$\leq 4\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = 4\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow \quad E_\lambda\left(f(x) 1_{(0,1)}(x)\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot 1_{(0,1)}(x) \neq \infty \quad \lambda\text{-σ.π.}$

9.2 (Βλ. ιστεύ. 2016-17 μαθ 16-21 σελ 5)

(α) $1^{ος}$ τρόπος

$$\int_0^\infty g'(t)\, P(x>t)\, dt = \int_0^\infty g'(t)\, P(x>t)\, d\lambda(t) = \int_0^\infty g'(t)\, E(1_{x>t})\, d\lambda(t)$$

$$= \int_0^\infty g'(t) \cdot \left(\int_\Omega 1_{x>t}\, dP(\omega)\right) d\lambda(t) = \int_0^\infty \left(\int_\Omega g'(t)\, 1_{x>t}\, dP(\omega)\right) d\lambda(t)$$

Tonelli

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g'(t)\, \underbrace{1_{x>t}}_{\substack{x:\ \text{σταθ. στο μέσα ολοκλήρ} \\ t:\ \text{μετ/τη} \ -//-}}\, d\lambda(t)\right) dP(\omega) = \int_\Omega \underbrace{\int_0^x g'(t)\, d\lambda(t)}_{\overset{\text{Riem}}{=} \int_0^x g'(t)\, dt \,=\, g(x)-g(0)}\, dP(\omega) =$$

$g' \geq 0 \Rightarrow g \uparrow \Rightarrow g(x) \geq g(0)$

$$\underset{\substack{\text{ορίζεται} \\ \text{το} \\ \text{ολοκλήρωμα}}}{=} \int_\Omega g(x)\, dP(\omega) - \int_\Omega g(0)\, dP(\omega) = E_P(g(x)) - g(0)$$

$2^{ος}$ τρόπος

Από θεμελ. θεωρ. Ολοκλ. Λογ.

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\, dt \qquad \forall\, x \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow g(X) = g(0) + \int_0^X g'(t)\, dt$$

$X(\omega) \in [0,\infty) \quad \forall\, \omega \in \Omega$ (έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ο χώρος πιθανοτ.)

$$\Rightarrow E(g(X)) = E\left(g(0) + \int_0^X g'(t)\, dt\right) = g(0) + E\left(\int_0^X g'(t)\, dt\right) =$$

το κάνω Lebesgue

$$= g(0) + \int_\Omega \int_0^X g'(t)\, d\lambda(t) = g(0) + \int_\Omega \left(\int_0^\infty g'(t)\, \underbrace{1_{t<X(\omega)}}_{\substack{t:\ \text{μετ/τη} \\ x:\ \text{σταθ.}}}\, d\lambda(t)\right) dP(\omega)$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} g(0) + \int_0^\infty \left(\int_\Omega g'(t)\, \underbrace{1_{t<X(\omega)}}_{\substack{x:\ \text{μετ/τη} \\ t:\ \text{σταθ}}}\, dP(\omega)\right) d\lambda(t) = g(0) + \int_0^\infty g'(t) \left(\int_\Omega 1_{x>t}\, dP(\omega)\right) d\lambda(t)$$

$$= g(0) + \int_0^\infty g'(t) \cdot P(x>t)\, d\lambda(t) = g(0) + \int_0^\infty g'(t)\, P(x>t)\, dt$$

το κάνω Riemann

(β) (i) θέτω $g(x) = x^p \longrightarrow$ συνεχώς παρ/μη $\forall\, p>0$

$g'(x) = p\, x^{p-1}$ Άρα από (α)

$$E(X^p) = p \int_0^\infty t^{p-1} P(x>t)\, dt$$

(ii) ~~ανά μια~~ ~~θα πάρω το αριθμητικό~~

~~μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$~~

$\boxed{B_1}$ $X \geq 0$

$$E(X) = \int_0^\infty x \, dP^X(x) = \int_0^\infty \left(\int_{[0,x]} 1(t) \, d\lambda(t) \right) dP^X(x) =$$

Ίσως σημ. Αντρέου - Παρασκευά έχει 1 μικρό τυπογραφικό. Γράφουμε είτε $\int_\Omega X(\omega) \, dP(\omega)$ είτε $\int_0^\infty x \, dP^X(x)$ από πρόταση 6.2

Tonelli

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} \underbrace{1_{[0,x]}(t)}_{\text{μετ/τη } x \text{ σταθ } t} \, dP^X(x) \right) d\lambda(t) =$$

$$= \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} 1_{t \leq x} \, dP^X(x) \right) d\lambda(t) =$$

$$= \int_{[0,\infty)} P^X([t,\infty)) \, d\lambda(t) \stackrel{\text{Riemann}}{=} \int_0^\infty P(X \geq t) \, dt$$

$\boxed{B_2}$ $X \in \mathbb{R}$ (η τ.μ.)

$$X = X^+ - X^-, \quad X^+, X^- \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \stackrel{\boxed{B_1}}{=} \int_0^\infty P(\underbrace{X^+ \geq t}_{X \geq t}) - \overbrace{\int_0^\infty P(X^- \geq t) \, dt}^{I}$$

αφού είμαστε στο $[0,\infty)$

κάνω αλλαγή μετ/της στο I ώστε $u = -t$

$$\int_0^{-\infty} P(-X \leq u)(-1) \, du = \int_{-\infty}^0 P(X \leq u) \, du = \int_{-\infty}^0 P(X \leq t) \, dt$$

Αποδείχθηκε η 1η ισότητα

1) $$\int_{-\infty}^0 P(X \leq t) \, dt = \int_{-\infty}^0 \left(P(X=t) + P(X<t) \right) dt \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left(1 - P(X \geq t) \right) \cdot 1_{t \leq 0} \, dt =$$

$1_{t=0} = 0$ λ-σπ

$$= \int_{-\infty}^\infty \left(1 - P(X \geq t) \right) \cdot 1_{t<0} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^0 P(X=t) \, dt = \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} 1_{x=t}(x) \, dP^X(x) \, d\lambda(t) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \underbrace{1_{x=t}(x)}_{0 \text{ λ-σπ}} \, d\lambda(t) \, dP^X(x) = 0$$

Αθροίζω και βγαίνει η ζητούμενη ισότητα αφού $\int_0^\infty P(X \geq t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} P(X \geq t) \cdot 1_{t \geq 0} \, dt$

9.4 (α) (Βλ. κ άσκ. 3.6. σημ. Εσκεν.)

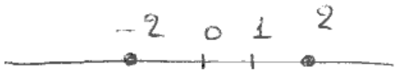
Από άσκ 7.5 η $f(m)=\nu((-\infty,m])$ είναι ομοιόμ. συνεχής $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{: συνεχής} \\ \text{κ } f(\mathbb{R})=[0,1]\ni\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ (από θεωρ. ενδ. τιμής) $m\in\mathbb{R}: \ f(m)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \nu((-\infty,m])=\frac{1}{2} \ \left(\geq\frac{1}{2}\right)$ και $\nu([m,\infty))=1-\nu((-\infty,m))$

$(-\infty,m)\subseteq(-\infty,m] \Rightarrow f(m)\geq\nu((-\infty,m)) \Rightarrow \nu([m,\infty))\geq\frac{1}{2}$ ✓

Για $\nu:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to[0,1]$ μέτρο με

$\nu(\{-2\})=\nu(\{2\})=\frac{1}{2}$ $m=1$, $k=0$ είναι διάμεσοι



γιατί $\nu((-\infty,1])=\nu([1,\infty))=\frac{1}{2}=$

$=\nu((-\infty,0])=\nu([0,\infty))$ ✓

(β) Θέτω $F(m)$ τη συν/ση κατανομής της X

$$f(a)=E|X-a| \overset{\text{παρασ. 9.7}}{=} \int_{[0,\infty)} P(|X-a|\geq t)\, d\lambda(t) =$$

$$= \int_{[0,\infty)} \left[P(X-a\geq t)+P(X-a\leq -t)\right] d\lambda(t) \overset{\text{Riem}}{=}$$

$$= \int_{[0,\infty)} P(X\geq a+t)\,dt + \int_{[0,\infty)} P(X\leq a-t)\,dt \overset{\substack{a+t=s\\ a-t=r}}{=}$$

$$= \int_a^{\infty} P(X\geq s)\,ds + \int_a^{-\infty} P(X\leq r)\,(-dr) \overset{\substack{\text{βλ. σχόλιο}\\ \text{παρασ. 9.7}}}{=}$$

$$= \int_a^{\infty} P(X\geq s)\,ds + \int_{-\infty}^{a} F(r)\,dr =$$

$$= \int_a^{\infty} (1-F(s))\,ds + \int_{-\infty}^{a} F(r)\,dr$$

(*) Σχόλιο
Το παράδειγμα μπορούμε να το χρησιμοποιούμε ως θεωρία και (στο παράδ.) εννοείται
$\int_{\mathbb{R}} P(|X-a|\geq t)\,d\lambda(t)$
Αλλά $P(|X-a|\geq t)$ μονότονη $\Rightarrow$ μετρήσιμη (Lebesgue) $\Rightarrow$ Riemann-ολοκληρώσιμη
Αναλυτικότερα βλ. θεωρ. μέτρου

Αν $m\in\mathbb{R}$ διάμεσος της X τότε

$F(m)\geq\frac{1}{2}$ κ $\underbrace{1-\lim_{x\to m^-}F(x)}_{F(m^-)=F(m)}\geq\frac{1}{2} \rightarrow F(m)\leq\frac{1}{2}$

συνεχής F

Άρα $F(m)=\frac{1}{2}$

Άρα $f(a) \geq f(m)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ / Γενικά $f(a) \geq 0$ ως μέση τιμή ≥ 0 τ.μ.)

$$f(a) = \left[\int_a^\infty (1-F(s))\,ds + \int_{-\infty}^a F(r)\,dr \right] =$$

έστω τυχόντα σταθερά $d \in (a, \infty)$, $k \in (-\infty, a)$

$$= \int_a^d (1-F(s))\,ds + \underbrace{\int_d^\infty (1-F(s))\,ds}_{\text{σταθερά}} + \underbrace{\int_{-\infty}^k F(r)\,dr}_{\text{σταθερά}} + \int_k^a F(r)\,dr$$

$$f'(a) = \left[-\int_d^a (1-F(s))\,ds \right]' + \left[\int_k^a F(r)\,dr \right]' =$$

a: μεταβλητή της συνάρτησης ολοκλήρ.

$$= -[1-F(a)] + F(a) = 2F(a) - 1$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2F(a) = 1 \Leftrightarrow F(a) = \frac{1}{2}$$

Για $k > m$ (άλλο από πριν) $\underset{F \nearrow}{\Rightarrow}$ $F(k) \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f'(k) \geq 0$

$k < m$ $\Rightarrow$ $F(k) \leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f'(k) \leq 0$

m: ολικό ελάχιστο ($f \searrow$ $f \nearrow$, $f(m)$)

$$\boxed{f(a) \geq f(m)}$$

(δ) Από (β) $f(m) \leq f(\mu)$

$[E|x-m| \leq E|x-\mu|$ (1)

Από Cauchy–Schwarz

$$\sigma = \sqrt{E|x-\underbrace{\mu}_{E(x)}|^2}\,\sqrt{E(1^2)} \geq E(|x-\mu|\cdot 1) = E|x-\mu| \quad (**)$$

και από πρότ. 5.7 (iv) $E|x-m| \geq |E(x-m)| =$

$= |E(x) - m| = |\mu - m| = |m-\mu|$ $(*)$

$$\overset{(1),(*)}{\underset{(**)}{\Rightarrow}} \quad |m-\mu| \leq E|x-m| \leq E|x-\mu| \leq \sigma \quad \checkmark$$

(α) $\boxed{B_1}$ $g = 1_A$ για A: μετρήσ. ορθογ. στον $\mathbb{R}^n$ (δηλ. $A = A_1 \times \dots \times A_n$ για $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Έστω $x \in \mathbb{R}$: Αρκεί (από προτ. 4.3) ν.δ.ο.

για $h = g(f_1, \dots, f_n)$ $\quad h^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Θέτω $a(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$

$$h^{-1}((-\infty, x]) = a^{-1}(g^{-1}(-\infty, x]) = (*)$$

$$\underbrace{1_A^{-1}}_{g^{-1}}((-\infty, x]) = \begin{cases} \overbrace{\emptyset \times \dots \times \emptyset}^{n\text{-φορές}} & x < 0 \\ (\Omega \setminus A)^n & 0 \le x < 1 \\ (\Omega)^n & x \ge 1 \end{cases}$$

$(\Omega \setminus A)^n \overset{\text{συμβ}}{=} (\Omega \setminus A) \times \dots \times (\Omega \setminus A)$

$\Omega^n = \Omega \times \dots \times \Omega$

$\Rightarrow$ τα οποία ανήκουν στα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\left.\begin{aligned} a^{-1}(\emptyset^n) &= \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ a^{-1}((\Omega \setminus A)^n) &= \Omega \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ a^{-1}(\Omega^n) &= \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \rightarrow h \text{ : μετρήσιμη}$$

$\boxed{B_2}$ $g = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_{j_i}} \ge 0$ απλή μετρήσιμη με A_{j_i}: μετρήσ. ορθογώνια στον $\mathbb{R}^n$

$h^{-1}((-\infty, x]) = a^{-1}(g^{-1}(-\infty, x])$

όπου A_{j_i} αριθμημένα ώστε $a_1 \le \dots \le a_n$ (χ.β.τ.γ.)

$$g^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} (\Omega)^n & x \ge \sum_{i=1}^{n} a_i \\ A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} & \sum_{i=1}^{k} a_i \le x < \sum_{i=1}^{k+1} a_i \quad \text{για } 1 \le k \le n-1 \\ (\emptyset)^n & x < a_1 \end{cases}$$

όλα ανήκουν στα Borel

$a^{-1}(\Omega^n) = \Omega$, $a^{-1}(\emptyset^n) = \emptyset$, $a^{-1}(\underbrace{A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}}_{D}) =$

$= f_1^{-1}(D) \cap f_2^{-1}(D) \cap \dots \cap f_n^{-1}(D) \in \mathcal{F}$

$\boxed{B_3}$ $g \ge 0$ μετρήσιμη

Αρκεί ν.δ.ο. $K(\omega)=(f_1,\dots,f_n)(\omega)$ μετρήσιμη στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$

έστω A : μετρήσ. ορθογ. $\overset{\text{μετρ.}}{\text{στον}}$ $\mathbb{R}^n$ $(A=A_1\times\dots\times A_n)$ 67

$K^{-1}(A)=f_1^{-1}(A_1)\cap f_2^{-1}(A_2)\cap\dots\cap f_n^{-1}(A_n)\in\mathcal{F}$

$\Rightarrow$ για $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\dots\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $K^{-1}(A)\in\mathcal{F}$

Άρα από πρότ. 4.3 αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\dots\times\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $K^{-1}(A)\in\mathcal{F}$

μετά από πρόταση 4.8. $g\circ K$: μετρήσιμη

Κεφ 10

10.1 (βλ. volter. σελ 11 ή υπόδ. στο τέλος)

Αν $A\in\mathcal{F}_1$, $B\in\mathcal{F}_2$ τότε ν.δ.ο. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ και θα έχει αποδειχθεί το ζητούμενο

$$P(A)=\begin{cases}0 & (\pi_1)\\ 1 & (\pi_2)\end{cases}$$

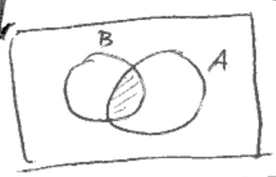
(π_1) $P(A)\cdot P(B)=0$ όμως $A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)=0$

$\Rightarrow P(A\cap B)=0$ ✓

(π_2) $P(A)\cdot P(B)=P(B)=P((A\cap B)\cup(A^c\cap B))=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

$P(A^c\cap B)\le P(A^c)=0\Rightarrow P(A^c\cap B)=0\rightarrow P(B)=P(A\cap B)$ ✓

10.2 (Διάλεξη 4/12/2020 ή υπόδειξη στο τέλος)



(α⇒β)
Έστω $A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ν.δ.ο. $P(f(X)\in A, g(Y)\in B)=$
$=P(f(X)\in A)\,P(g(Y)\in B)$

$P(f(X)\in A, g(Y)\in B)=P(X\in \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in\,\mathcal{E}}, Y\in \underbrace{g^{-1}(B)}_{\in\,\mathcal{G}})=$

έχω $(E,\mathcal{E})$, $(G,\mathcal{G})$ με $\mathcal{E},\mathcal{G}$: σ-άλγεβρες

X,Y: αν/τες

$=P(X\in f^{-1}(A))\,P(Y\in g^{-1}(B))$ ✓

(β⇒α) Έστω $A\in\mathcal{E}$, $B\in\mathcal{G}$ $P(f(X)\in A, g(Y)\in B)=P(f(X)\in A)\cdot P(g(Y)\in B)$

για $f=1_A$, $g=1_B$ έχω ότι

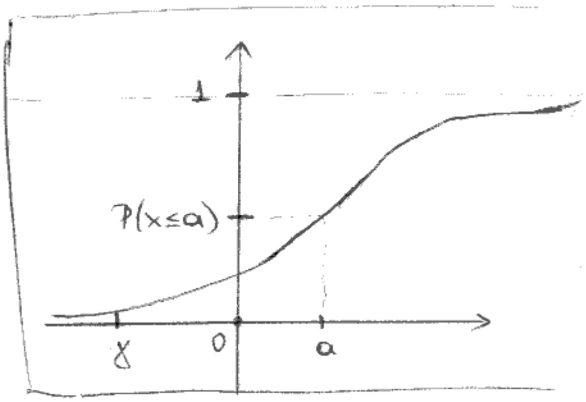
$P(X\in A, Y\in B)=P(\underbrace{f(X)\in\{1\}}_{1_A(X)=1\ \Leftrightarrow\ X\in A}, g(Y)\in\{1\})=P(f(X)\in\{1\})\,P(g(Y)\in\{1\})=$

$=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$

(1η ώρα)

(10.3) (βλ. διάλεξη 8/12/2020 ή Τρεβ. 2016-17 σελ 16 μαθ 16-21 ή Volter σελ 12 ή υπόδ. στο τέλος)

Έστω ότι ∄ τέτοιο c. Τότε $\exists\, a\in\mathbb{R}$ ώστε



$F_X(a) = P(X\le a) \in (0,1)$

[Αν ∄ $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο τότε

$F_X(a)\in\{0,1\}$ $\forall a\in\mathbb{R}$

Θέτουμε $\gamma = \sup\{a\in\mathbb{R} : F_X(a)=0\}$

το οποίο υπάρχει γιατί $F_X \nearrow$ και $F_X(\infty)=1$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \forall a<\gamma \\ 1 & \forall a>\gamma \end{cases}$$ όμως ~~άτοπο~~ ~~ότι δεν υπάρχει c∈ℝ~~

$P(X=\gamma) = F_X(\gamma) - F_X(\gamma^-) = 1$ άτοπο (γιατί υποθέσαμε προς άτοπο ότι ∄ τέτοιο γ]

τότε $P(X\le a, Y>a) \le P(X\ne Y) = 0$

$\llcorner P(X\le a)\,P(Y>a) \overset{(*)}{=} P(X\le a)\,P(X>a)$

$= F_X(a)\,(1-F_X(a)) > 0$ άτοπο

(*) $P(X=Y)=1$
$E(1_{Y>a}) = E(1_{X>a})$
$\Rightarrow P(Y>a) =$
$P(Y>a, X=Y) +$
$P(Y>a, X\ne Y) =$
$= P(X>a, X=X)$

(10.4) (βλ Volteras σελ 12)

$$E\left(\frac{(X-Y)^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2)\right\} \overset{\text{θεωρ. 10.8}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{E(X^2) - 2E(X)\cdot E(Y) + E(Y^2)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sigma^2-\mu^2 - 2\mu^2 + \sigma^2-\mu^2\right\} = \sigma^2$$

$E(X)=E(Y)=\mu$
$Var(X)=Var(Y)=\sigma^2$
$E(X^2) = \sigma^2 - (E(X))^2 =$
$= \sigma^2 - \mu^2 = E(Y^2)$

(10.5) (βλ Volteras σελ 12)

Αφού $E(X^2), E(Y^2) < \infty \Rightarrow E|X|, E|Y| < \infty \xrightarrow{\text{θεωρ. 10.8}}$

$$\left.\begin{aligned} E(X, X-Y) &= E(X)\cdot E(X-Y) \\ E(Y, X-Y) &= E(Y)\cdot E(X-Y) \end{aligned}\right\} (*)$$

Αφού $Y = X-(X-Y) \Rightarrow E(Y)\,E(X-Y) = E(X-(X-Y))\,E(X-Y) =$
$= [E(X) - E(X-Y)]\,E(X-Y) = E(X)\,E(X-Y) - [E(X-Y)]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [E(X-Y)]^2 = [E(X) - E(Y)]\,E(X-Y) = E(X-Y)\,E(X-Y) = [E(X-Y)]^2$

Αν $E(X-Y)=0 \Rightarrow P(X-Y=0)=1$ και το ζητούμενο c είναι το $c=0$

Αν $E(X-Y) \neq 0$

$$E(Y)\,E(X-Y) = E(X)\,E(X-Y) - [E(X-Y)]^2 \xrightarrow{(*)}$$

$$E(Y(X-Y)) = E(X(X-Y)) - (E(X-Y))^2 \Rightarrow$$

$$E(YX - Y^2) = E(X^2 - XY) - [E(X-Y)]^2 \rightarrow$$

$$[E(X-Y)]^2 = E(X^2) - E(XY) - (E(YX) - E(Y^2)) =$$

$$= E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) \Rightarrow$$

$$[E(X-Y)]^2 = E[(X-Y)^2] \Rightarrow Var(X-Y) = E[(X-Y)^2] - [E(X-Y)]^2 = 0$$

παρατήρ μετά τον ορσ 5.15

$$\Rightarrow P(X-Y=c) = 1 \quad \text{για κάποιο } c \in \mathbb{R}$$

$c = E(X-Y)$

10.6 (Βλ. διάλεξη 8/12/2020 ή Ζερβ 2016-17 σελ 11 μαθ 16-21 ή Volter σελ 12 ή υπόδ. στο τέλος)

$$E|X+Y| = \int |x+y| \, dP^{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y| \, d(P^X \otimes P^Y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |x+y| \, dP^X(x) \right)}_{h(y)} dP^Y(y) = (*)$$

$$E|X+Y| < \infty \Rightarrow P^Y(\{y \in \mathbb{R} : h(y) < \infty\}) = 1$$

$$\Rightarrow \exists\, y_0 \in \mathbb{R} : h(y_0) < \infty \quad \text{δηλ.}$$

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} |x+y_0| \, dP^X(x) = E|X+y_0|$$

$$E|X| = E|X + y_0 - y_0| \leq E|X+y_0| + |y_0| < \infty$$

ομοίως για $E|Y|$

<u>Σχόλιο</u> Γίνεται $E|X|, E|Y| = \infty$ και $E|X+Y| < \infty$;

ΝΑΙ για $Y = -X$ αλλά είναι εξαρτημένες

$\hookrightarrow X+Y = X+(-X)$

2η ώρα

10.7 (Βλ. Volteras σελ. 13 ή διάλεξη 8/12/2020)

<u>Σχόλιο</u>: σημαίνει ότι η συνδιακύμανση $f(X), g(X)$ είναι ≥ 0 ή $f(X), g(X)$: θετ. συσχετισμένες

<u>Τεχ</u> Φτιάχνω αντίγραφα της X (ισοκατανεμημένες Y, Z)

Υπάρχει χώρος πιθανότητας Ω_1 κ τ.μ. (70)

$Y, Z: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ ώστε Y, Z: ανεξάρτητες κ

$P^Y = P^Z = P^X$ τότε $\forall \omega \in \Omega_1$ ισχύει

είτε $Y \geq Z$ ή $Y \leq Z$

$\Rightarrow \begin{cases} f(Y) \geq f(Z) \\ g(Y) \geq g(Z) \end{cases}$ ή $\begin{cases} f(Y) \leq f(Z) \\ g(Y) \leq g(Z) \end{cases}$ $\Rightarrow$ πάντα $(f(Y)-f(Z))(g(Y)-g(Z)) \geq 0$

$[f(Y)\cdot g(Y) - f(Y)\cdot g(Z) - f(Z)\cdot g(Y) + f(Z)\cdot g(Z)$

$\Rightarrow 0 \leq E(f(Y)\cdot g(Y)) - E(f(Y)\cdot g(Z)) - E(f(Z)\cdot g(Y)) +$

$+ E(f(Z)\cdot g(Z)) =$

$f(Y), g(Z)$ ανεξάρτ.

$= E\{f(Y)\ g(Y)\} - E(f(Y))\ Eg(Z) - E f(Z) \cdot E(g(Y)) + E\{f(Z) \cdot g(Z)\} =$

άσκ 10.2 κ κάθε αύξουσα μετρήσ. άσκ 4.5

$\underset{P^Y = P^Z = P^X}{=} E\{f(X) \cdot g(X)\} - E f(X)\ E g(X) - E f(X) \cdot E(g(X)) + E\{f(X) \cdot g(X)\}$

$= 2 E\{f(X)\cdot g(X)\} - 2 E f(X) \cdot E g(X) \Rightarrow$

$E\{f(X) \cdot g(X)\} \geq E f(X) \cdot E g(X)$

Οι μέσες τιμές υπάρχουν γιατί

$E(f(Y)\cdot g(Y)) < \infty \Leftrightarrow E(f(X)\cdot g(X)) < \infty$

Σημείωση για 10.8 Αν είχα διακριτές θα έβρισκα την f_X ή F_X ← έχει πάντα

(10.8) (Βλ. διάλεξη 8/12/2020 2η ώρα)

όλες οι X_i είναι συνεχείς → άρα η m ακολουθεί

συνεχή κατανομή → άρα έχω F_{m_n}

Θέτω $m_n = m = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ (δηλ $m_n(\omega) = m(\omega)$)

(Π1) Αν $x > 0$

$F_{m_n}(x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x\} =$

$= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x\} =$

δηλ όλες να είναι μεγαλύτερες αφού είναι η min → τομή

ανεξάρτητες οι X_i

$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) =$

$= 1 - P(X_1 > x)\ P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) =$

Βλ. από πιθανότ. I

$= 1 - e^{-a_1 x}\ e^{-a_2 x} \cdots e^{-a_n x} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} a_i) x}$

(Π2) Αν $x \leq 0$ $\quad F_{m_n}(x) = 0$ γιατί $F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-a_i x} & x > 0 \end{cases}$

Σχόλιο Βλ. αρχείο πυκνότητες για παράξενες συνήθεις τιτλος στο e-class (Πυκνότητα συνεχούς τ. μ.)

(10.9) οπωσδήποτε (είναι βασική άσκηση) Σ1

(βλ. Volteras σελ 13 για (α) και απόδειξη στο τέλος για (δ))

(α) Γνωρίζουμε ότι $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$: ισόνομες → $E(X_i)=0 \quad \forall i\in\mathbb{N}$

$$E(S_n^2) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] = (*)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{k<i} X_k X_i \quad \xRightarrow[\text{της } E]{\text{γραμμικότ.}}$$

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2\sum_{k<i} \underbrace{E(X_k X_i)}_{\llcorner\, E(X_k)E(X_i) = 0\cdot 0} = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

X_k, X_i: ανεξάρτ

(β)

*Υπάρχει θεώρημα (multinomial theorem) που λέει

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\dots,k_m} \left(\prod_{t=1}^{m} a_t^{k_t}\right)$$

εδώ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \dots$ (το βρίσκω στο wikipedia)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \sum_{i=1}^{n} \frac{4!}{4!\,0!\dots0!} x_i^4 + \sum_{i\neq j} \left(\frac{4!}{3!\,1!\,0!\dots0!} x_i^3 x_j\right)$$

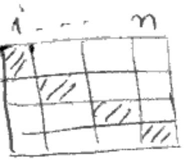
όλοι οι μη-μηδεν εκθέτες = 4

οι μη-μηδεν. = 3 ή 1

$$+ \sum_{i<j} \frac{4!}{2!\,2!\,0!\dots0!} x_i^2 x_j^2 + \sum_{i<j<k<l} \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!\,0!\dots0!} x_i x_j x_k x_l$$

οι μη-μηδεν = 2

οι μη-μηδεν. = 1



1 ... n

τα ζεύγη $i<j$ είναι $\frac{n^2-n}{2}$ ← διαγώνιος

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i\neq j} 4 x_i^3 x_j + \sum_{i<j} 6 x_i^2 x_j^2 + \sum_{i<j<k<l} 4!\, x_i x_j x_k x_l$$

Θεωρ. 10.8

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4\right] = \sum_{i=1}^{n} E(x_i^4) + 4\sum_{i\neq j} E(x_i^3)\underbrace{E(X_j)}_{0} + 6\sum_{i<j} E(x_i^2)E(x_j^2) +$$

$$+ 4!\sum_{i<j<k<l} \underbrace{E(x_i)\cdot E(x_j)E(x_k)E(x_l)}_{=0} =$$

ανεξάρτ + ισόνομες

$$= n\cdot c + 6\cdot \frac{n(n-1)}{2}\cdot 1\cdot 1 = n\cdot c + 3n(n-1)$$

(δ) θνδο

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

Αν πάω στην απόδειξη της Markov μπορώ νδο

$P(X>a) \le \frac{E(X)}{a}$ ΠΡΟΣΟΧΗ! Η Markov ισχύει για $X: \Omega \to [0,\infty]$ εδώ δεν έχω τέτοιες τ. μετ/τες

Έστω $\varepsilon > 0$

$S_n^2 \geq 0$ Markov

$$P(|S_n| > n\varepsilon) = P(S_n^2 > n^2\varepsilon^2) \leq \frac{E(S_n^2)}{n^2\varepsilon^2} \overset{(a)}{=} \frac{n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon = \sigma\tau\alpha\theta]{n\to\infty} 0$$

10.10 (Βλ. διάλεξη 8/12/2020)

* Όσο επιλέγω περισσότερους αριθμούς πλησιάζω τα άκρα

Έστω $\varepsilon > 0$ (α) $P(|m_n| > \varepsilon) \underset{m_n \geq 0}{=} P(m_n > \varepsilon) =$ αφού είναι η μικρότερη είναι όλες

$= P(X_1 > \varepsilon, X_2 > \varepsilon, \dots, X_n > \varepsilon) \underset{\text{ανεξαρ}}{=} P(X_1 > \varepsilon) \dots P(X_n > \varepsilon) \underset{\text{ισόνομες}}{=} (P(X_1 > \varepsilon))^n =$

$= \begin{cases} (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ 0 \longrightarrow 0 \end{cases}$

$P(X_1 > \varepsilon) =$

$= 1 - F_{X_1}(\varepsilon) =$

$= \begin{cases} 1 - 1 & \varepsilon \geq 1 \\ 1 - \varepsilon & 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$

(β) $P(|M_n - 1| > \varepsilon) = \underbrace{P(M_n > 1 + \varepsilon)}_{0} + P(M_n < 1 - \varepsilon) =$ ($M_n \leq 1$)

η μεγαλυτ. μικρότερη → όλες μικρότερες

$= P(M_n < 1 - \varepsilon) = P(X_1 < 1-\varepsilon, \dots, X_n < 1-\varepsilon) =$

ανεξ.

$= P(X_1 < 1-\varepsilon) \dots P(X_n < 1-\varepsilon) = [P(X_1 < 1-\varepsilon)]^n =$

$= \begin{cases} (1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow 0 \end{cases}$

συνεχ.

$P(X_1 < 1-\varepsilon) = P(X_1 \leq 1-\varepsilon) =$

$= \begin{cases} 0 & \varepsilon > 1,\ 1-\varepsilon < 0 \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \leq 1,\ 1-\varepsilon \geq 0 \end{cases}$

* Η άσκηση 10.10 είναι SOS για τις εξετάσεις

10.11

$B = c_{ij} = u_{i,j}\sqrt{a_{i,j}}$

$B^2 = (d_{ij})_{i,j} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k}^{n} c_{ik} c_{kj}}_{d_{i,j}} = \sum_k u_{i,k}\sqrt{a_{i,k}}\sqrt{a_{k,j}}\, u_{k,j}$

ανεξαρτ. αν δεν είναι διαγώνια

$\det B^2 = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot d_{1,\pi(1)}\cdots d_{n,\pi(n)} =$

$E(\det B^2)' = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\; E\left(d_{1,\pi(1)}\cdots d_{n,\pi(n)}\right) (**)$

$E\left(d_{1,\pi(1)}\cdots d_{n,\pi(n)}\right)$

$d_{i,\pi(i)}$: ανεξάρτητα μεταξύ τους γιατί δεν εμφανίζονται τα ίδια $u_{i,k}\, u_{k,j}$ 2η φορά δηλ. σε κάποιο άλλο $d_{j,\pi(j)}$

$\Rightarrow E\left(d_{1,\pi(1)},\dots,d_{n,\pi(n)}\right) = E\left(d_{1,\pi(1)}\right)\cdots E\left(d_{n,\pi(n)}\right) \quad (*)$

- $E\left(d_{i,\pi(i)}\right) = \sum_{k=1}^{n} E(u_{i,k})\sqrt{a_{i,k}}\sqrt{a_{k,j}}\,E(u_{k,j}) = 0$ αν $d_{i,\pi(i)}$: όχι διαγώνιο

$u_{i,k}, u_{k,i}$ ανεξ.   με $j=\pi(i)$

- $E(d_{i,i}) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_{i,k}}\sqrt{a_{k,i}}\,E(u_{i,k}\cdot u_{k,i}) =$

$= \sum_{k\neq i}\sqrt{a_{i,k}}\sqrt{a_{k,i}}\,\boxed{\underbrace{E(u_{i,k})}_{0}\cdot\underbrace{E(u_{k,i})}_{0}} + E(u_{i,i}^2)\,a_{i,i} =$

$= a_{ii}\left[\operatorname{Var}(u_{i,i}) + [\overset{0}{E(u_{i,i})}]^2\right] = 1\cdot a_{ii} = a_{ii}$

Άρα στην (**) "επιζούν" οι μεταθέσεις που είναι της μορφής $\pi(1)=1,\dots,\pi(n)=n$ δηλαδή 1 μόνο μετάθεση με πρόσημο 1 αφού είναι άρτια (δηλ. είναι γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων αφού $\pi = (1\,2)(2\,1)\cdots(n\ n-1)(n-1\ n)$)

τελικά $E(\det B^2) = \operatorname{per}(A)$

10.12

74

(α) ~~Θέτω~~ Έστω $Y_1, \dots, Y_n$ ανεξάρτ. κ ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την Bernoulli (p) και θέτω

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \underset{\text{υπόθεση}}{\sim} X_2 \qquad S_m = \sum_{k=1}^{m} Y_k \sim X_1$$

$Y_k \in \{0,1\} \Rightarrow S_n \geq S_m$. Θέτω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τον χώρο πιθανότητας όπου δουλεύω.

Έστω $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$
$$\begin{cases} \text{αν } S_m(\omega) > x \Rightarrow S_n(\omega) > x \\ \text{αν } S_n(\omega) > x \Rightarrow S_m(\omega) \leq x \text{ ή } S_m(\omega) > x \end{cases}$$

Άρα $[S_m > x] \subseteq [S_n > x] \Rightarrow P(S_m > x) \leq P(S_n > x)$

$\overset{\text{ισόνομες}}{\Rightarrow} P(X_1 > x) \leq P(X_2 > x) \Rightarrow X_1 \leq_{st} X_2$

(γ) Έστω $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y_2 \sim \text{Poisson}(\mu - \lambda)$

$Y_1 + Y_2 \sim \text{Poisson}(\mu)$ $\qquad Y_1 \overset{d}{=} X_1$, $Y_1 + Y_2 \overset{d}{=} X_2$

$Y_1(\omega), Y_2(\omega) \in \mathbb{N} \Rightarrow Y_1 \leq Y_1 + Y_2 \ \forall \omega \in \Omega$. Αν $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$

- $Y_1(\omega) > x \Rightarrow (Y_1 + Y_2)(\omega) > x$
- $(Y_1 + Y_2)(\omega) > x \Rightarrow Y_1(\omega) \geq x$ ή $Y_1(\omega) \leq x$

$\Rightarrow [Y_1 > x] \subseteq [Y_1 + Y_2 > x] \Rightarrow P(Y_1 > x) \leq P(Y_1 + Y_2 > x)$

$\overset{\text{ισόνομες}}{\Rightarrow} P(X_1 > x) \leq P(X_2 > x) \Rightarrow X_1 \leq_{st} X_2$

(β) Με επαγωγή έστω

$Y_1, \dots, Y_n \sim Bern(p_1)$ ανεξάρτ. κ ισόνομες τ.μ

$Z_1, \dots, Z_n \sim Bern(p_2)$ —//— —//—

στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{=} X_1 \qquad Z_1 + \dots + Z_n \stackrel{d}{=} X_2$

Έστω ακόμη $x \in \mathbb{R}$,

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

$$P(Y_1 > x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ p_1 & 1 \ge x > 0 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$P(Z_1 > x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ p_2 & 1 \ge x > 0 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(Y_1 > x) \le P(Z_1 > x) \xrightarrow{\text{ισον}} P(X_1 > x) \le P(X_2 > x)$$

$\Rightarrow X_1 \le_{st} X_2$

ΕΠΑΓ. ΒΗΜΑ Έστω ότι ισχύει για $k \le n-1$ Θα δο ισχύει για $k+1$ δηλ

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i > x\right) \le P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i > x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Αν $\omega \in \left[\sum_{i=1}^{k} Y_i > x\right] \Rightarrow \omega \in \left[\sum_{i=1}^{k+1} Y_i > x\right]$

$$\sum_{i=1}^{k+1} Y_i > x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} Y_i + Y_{i+1} > x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} Y_i > x-1$$

ομοίως για τα Z_i

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i > x-1\right) \le P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i > x-1\right) \Rightarrow$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i > x-1\right) \le P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i > x-1\right) \Rightarrow$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} Y_i > x\right) \le P\left(\sum_{i=1}^{k+1} Z_i > x\right) \Rightarrow \forall k \le n$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i > x\right) \le P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i > x\right) \xrightarrow{\text{ισόνομες}} P(X_1 > x) \le P(X_2 > x)$$

Άρα $X_1 \le_{st} X_2$

(Βλ. στο διαδίκτυο Arratia, Goldstein, Kochman "size bias for one & all") (I6)

(10.13) Θέτω $g(x) = 1_{x>t}$, $x \in \mathbb{R}$ για $t \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο και χρησιμοποιώ την άσκ 7.7 (β)

$$\underbrace{E(g(x^*))}_{P(x^*>t)} = \frac{1}{\mu} E(x \cdot g(x)) \underset{\text{άσκ 10.7}}{\geq} \frac{1}{\mu} \underbrace{E(x)}_{\mu} \cdot E(g(x)) = E(1_{x>t}) = P(x>t)$$

(Η άσκηση (10.14) έχει λυθεί αργότερα με άλλο τρόπο. Αυτός ίσως είναι λάθος. Βλ τέλος κεφ 15)

(10.14) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ο χώρος πιθανότητας όπου δουλεύω κ $x \in \mathbb{R}$

$$P(X=x)\, P(Y=x) \overset{\text{ανεξάρτητες}}{=} P(X\in\{x\}, Y\in\{x\}) = P(X=Y=x)$$

Θέτω $A_x = \{\omega \in \Omega : X=Y=x\}$ και από υπόθεση $A = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x$ είναι αριθμήσιμο

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} P(X=Y=x) = \sum_{x\in A} P(X=Y=x) = \sum_{x\in A} P(X=Y, Y=x) =$$

ξένα τα $\{x\} \subseteq A$ και σχηματίζουν το A

$$= P(X=Y)$$ (Βλ. κ μαθ 21/4/2021 αρχείο)

ΚΕΦ 11

5ος ΚΕΦΑΛΑΙΟ (Θυμηθείτε την άσκ 1.9)

(11.1) Έστω προς άτοπο ότι $\sum_{n\geq1} P(A_n) < \infty \overset{\text{1ο λήμμα B-C}}{\Longrightarrow}$

$$P(\limsup_{n\geq1} A_n) = 0 \Rightarrow P(\liminf_{n\geq1} A_n^c) = P\Big(\bigcup_{n\geq1}\bigcap_{k\geq n} A_n^c\Big) = 1 \quad (*)$$

Θέτω $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k^c$ ($\nearrow$ ακολουθ. ενδεχομένων)

$$(*) \overset{\text{ΠΡΟΤ 2.5}}{\Rightarrow} \lim_n P(B_n) = P\Big(\bigcup_{n\geq1} B_n\Big) = 1 \Rightarrow P(B_n) \leq 1$$

Όσο αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (όχι της εκφώνησης) ανεξάρτ ενδεχόμ.

τότε $P(\bigcap_{n\geq1} A_n) = \prod_{n\geq1} P(A_n)$

$$P\Big(\bigcap_{n\geq1} A_n\Big) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\Big) \overset{\text{ανεξαρτησία για πεπερασμ}}{=} \lim_k P(A_1)\cdots P(A_k) = \prod_{i\geq1} P(A_i)$$

Από λήμμα 11.3 $(A_k^c)_{k\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτ., $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n\geq k} A_n \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon<1$ διαλέγω) $\exists k\in\mathbb{N}$: $|P(B_k) - 1| < \varepsilon \Rightarrow$

$P(B_k) > 1-\varepsilon > 0$, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 0$ (το συμπλήρωμα του $\bigcup_{n\geq1} A_n$)

Άρα

$$0 = \prod_{n\geq1} P(A_n^c) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big) \leq P\Big(\overbrace{\bigcap_{n\geq k} A_n^c}^{B_k}\Big) = \prod_{n\geq k} P(A_n^c) \overset{P(B_k)>0}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow 0 = P(A_1^c)\cdots P(A_{k-1}^c)$ όμως $P(A_n^c) > 0$ αφού $P(A_n) < 1$

κ άρα $P(A_1^c)\cdots P(A_{k-1}^c) > 0$ άτοπο

(Βλ. Volteras σελ 14,16)

11.2 Θέτω $A_n = [X_n = 0]$ θν δο $P(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_n) = 1$

Αρκεί ν δο $P(\limsup_{n\geq 1} A_n^c) = 0$

$\sum_{n\geq 1} P(A_n^c) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$. Εφαρμόζω 1° Λήμμα B-C

$P(\limsup_{n\geq 1} A_n^c) = 0 \xrightarrow{\text{άσκ } 8.1} X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0 \xrightarrow{\text{Θεωρ } 8.2} X_n \xrightarrow{P} 0$

11.3 Για M_r (σύμφωνα με υπόδειξη στο τέλος)

$P(\lim M_r \to 1) \leq 1$ Αρκεί ν δο $P(\lim M_r \to 1) \geq 1$

Θέτω $A_n^\varepsilon = [M_n \leq 1-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$

$$P(A_n^\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon > 1 \ (\text{ή } 1-\varepsilon < 0) \\ (1-\varepsilon)^n < 1 & \varepsilon \leq 1 \to 1-\varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

γεωμετρική

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} P(A_n^\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow[B-C]{1^\circ \text{ Λήμμα}}$

$P(\limsup_{n\geq 1} A_n^\varepsilon) = 0 \Rightarrow$ ~~τελικά η M_n είναι $> 1-\varepsilon$ με πιθ~~

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} (A_n^\varepsilon)^c\right) = 1 \Rightarrow$ τελικά η M_n είναι $> 1-\varepsilon$ με πιθανότ. 1 $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow B_\varepsilon = \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \geq 1-\varepsilon\}$ έχει πιθανότ. 1

$\Rightarrow P(\underbrace{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{1/k}}_{\{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \geq 1\}}) = 1$ και αφού $M_n \leq 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} M_n \leq 1$

Άρα $P(\lim_n M_n = 1) = 1$

Για m_r

Πάλι αρκεί νδο $P(\lim m_r \to 0) \geq 1$ (1ο/2ο Λ B-C: 1ο/2ο Λήμμα Borel-Cantelli)

Θέτω $A_n^\varepsilon = [m_n > \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$

$$P(A_n^\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon > 1 \\ (1-\varepsilon)^n < 1 & \varepsilon \leq 1 \end{cases} \to 0 \ \text{ κ } \sum_{n\geq 1} P(A_n^\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\xRightarrow{1^\circ \Lambda\ B\text{-}C} P(\limsup A_n^\varepsilon) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{n\geq k}(A_n^\varepsilon)^c\right) = 1$

$\Rightarrow$ τελικά $m_n \leq \varepsilon$ με πιθαν. 1 $\quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow B_\varepsilon = \{\overline{\lim_{n\to\infty}} m_n \leq \varepsilon\}$ έχει πιθαν. 1

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{1/k}\right) = 1 \Rightarrow P(\overline{\lim_n} m_n \leq 0) = 1$

και επειδή $m_n \geq 0 \Rightarrow \lim_n m_n = 0 \Rightarrow P(\lim_n m_n = 0) = 1$

(11.4) (Βλ. Τεέβ. 2016-17 σελ 18 και θ 16-21)

(a) Έστω $\varepsilon > 0$ $\quad P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = 1) = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

δεν παίρνει άλλες τιμές εκτός από 0, 1

Άρα $X_n \xrightarrow{P} 0$

(β) Θέτω $A_n = [X_n = 1]$. Επειδή $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτ.

$\Rightarrow (A_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτ. ακολ. ενδεχομένων

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty \xRightarrow[B\text{-}C]{2^\circ \text{ Λήμμα}} P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$$

$$\Rightarrow P\left(\limsup_{n\geq 1}\{X_n = 1\}\right) = 1 \Rightarrow P\Big[\underbrace{\left(\limsup_{n\geq 1}\{X_n = 1\}\right)^c}\Big] = 0$$

όμως

$$\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{X_n = 1\}^c = \bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{X_n = 0\}$$

$\{\lim_n X_n = 0\} \subseteq (\limsup A_n)^c \Rightarrow P(\lim X_n = 0) = 0$

(11.5) (Βλ. διάλεξη 10/12/2020 2η ώρα)

Αφού $P(X_1 > 0) = \varepsilon > 0$ κ X_i: ισόνομες (άρα $P(X_i > 0) = \varepsilon$)

$\sum_{n\geq 1} P(X_n > 0) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon = \varepsilon \sum_{n\geq 1} 1 = \infty \quad$ Θέτω $A_n = [X_n > 0]$

και $B_k = [X_1 > \frac{1}{k}]$ $\qquad B_k \nearrow$ ακολ. ενδεχομένων

$$0 < P(X_1 > 0) = P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \overset{\text{προτ. 2.5}}{=} \lim_{k\to\infty} P(B_k) \xRightarrow{\text{ορισμό ορίου}} \exists\ k \geq 1: P(B_k) > 0$$

Θέτω $C_n = [X_n > \frac{1}{k}]$. Αφού X_n: ανεξάρτ. από θεωρ. 10.6 C_n: ανεξάρτητα. Άρα εφαρμόζω το

2° Λήμμα B-C αφού $\sum P(C_n) = \sum_{n\geq 1} P(X_1 > \frac{1}{k}) = \infty$ (79)

$P(\limsup_{n\geq 1} C_n) = 1 \Rightarrow$ Για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ $X_n(\omega) > \frac{1}{k}$
(για $\omega \in \limsup_{n\geq 1} C_n$)

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} X_n > \sum_{n\geq 1} \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\cdot\infty = \infty$ για $\omega \in \limsup_{n\geq 1} C_n$ άρα
με πιθανότητα 1

(11.6) (Βλ. Volteras σελ. 16) $X_n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$ $\exists M_n \in \mathbb{R}_{>0}$: $|X_n| \leq M_n$
με πιθανότ. 1. Για ευκολία θέτω $A_n = [|M_n| \leq M_n]$
$P(A_n) = 1 \Rightarrow P(A_n^c) = 0$. Μπορώ να γράψω $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$P(A_n^c) = P(|X_n| > M_n) \leq \frac{1}{n^2}$ $(*)$

$P(|X_n| > M_n) \overset{M_n \in \mathbb{R}_{>0}}{=} P\left(\frac{|X_n|}{M_n} > 1\right) = P\left(\frac{|X_n|}{n M_n} > \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ και

θέτω $a_n = n M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$ και $B_n = \left\{\frac{|X_n|}{n M_n} > \frac{1}{n}\right\} =$

$= \left\{\frac{|X_n|}{a_n} > \frac{1}{n}\right\}$ τότε

$$\sum_{n\geq 1} P(B_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \xrightarrow[B-C]{1^\circ \text{ Λήμμα}} P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\left(\limsup_{n\geq 1} B_n\right)^c\right) = 1 \Rightarrow P(\liminf_{n\geq 1} A_n^c) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\liminf \left\{\frac{|X_n|}{a_n} > \frac{1}{n}\right\}^c\right) = 1 \Rightarrow P\left(\liminf_{n\geq 1} \left\{\frac{|X_n|}{a_n} \leq \frac{1}{n}\right\}\right) = 1$$

$\Rightarrow P\left(\liminf \left\{\frac{X_n}{a_n} \leq \frac{1}{n}\right\}\right) = 1$. δηλ. $\frac{X_n}{a_n} \leq \frac{1}{n}$ τελικά
με πιθανότητα 1

Όμως $\liminf \left\{\frac{X_n}{a_n} \leq \frac{1}{n}\right\} = \left[\frac{X_n}{a_n} < \frac{1}{n} \text{ τελικά } \forall n \geq 1\right] =$

$= \left[\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{X_n}{a_n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0\right] = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} = 0\right]$

Άρα $P\left(\lim_n \frac{X_n}{a_n} = 0\right) = 1$

(βλ Volterras σελ 17) (να γίνει οπωσδήποτε)

11.7 ($\Rightarrow$) Έστω ότι $P(X^* < \infty) = 1$ και έστω προς άτοπο ότι $\forall M \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \geq 1} P(X_n > M) = \infty$$

Θέτω $A_n^k = [X_n > k]$ $\forall$ $k \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$

Έστω $k \in \mathbb{R}$. Από 2° Λήμμα B-C

$P(\limsup_{n \geq 1} A_n^k) = 1$ (*) αφού X_n: ανεξάρτητες

Από Θεωρ. 10.6. A_n^k: ανεξάρτητα

(*) $\Rightarrow$ $X_n > k$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}_+$ με πιθανότητα 1

$\Rightarrow$ $X^* = \sup_n X_n \geq k$ με πιθανότ. 1 $\Rightarrow$ $P(X^* \geq k) = 1$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(\underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} X^* \geq k}_{[X^* = \infty]}) = 1$ $\Rightarrow$ $P(X^* = \infty) = 1$ άτοπο αφού $P(X^* < \infty) = 1$ Άρα $\exists$ τέτοιο $M \in \mathbb{R}$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists M \in \mathbb{R}$: $\sum_{n \geq 1} P(X_n > M) < \infty$

Από 1° Λήμμα B-C (αν $A_n = [X_n > M]$)

$P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$ $\Rightarrow$ $P(\liminf_{n \geq 1} A_n^c) = 1$

$\Rightarrow$ τελικά $X_n \leq M$ με πιθανότητα 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$: $X_n \leq M$ $\forall n \geq n_0$ με πιθανότ. 1.

$\Rightarrow$ $X^* = \sup_{n \geq 1} X_n \leq \max\{X_1, \dots, X_{n_0 - 1}, M\}$ με πιθ 1

$\Rightarrow$ $P(X^* < \infty) = 1$

11.8 (βλ κ υπόδειξη στο τέλος)

ανό χαρ/κό limsup = x Ανει II (ακολουθία)

Θνδο για άπειρα $n \in \mathbb{N}_+$ $\frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} > 1 - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Θέτω $A_n^\varepsilon = \left[\frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} > 1 - \varepsilon\right]$ $\forall \varepsilon > 0$

Άρα Θνδο $P\left(\limsup_{n \geq 1} A_n^\varepsilon\right) = 1$. Έστω $\varepsilon > 0$.

$(A_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$: ανεξάρτητα αφού X_n: ανεξάρτητες. Από άσκηση 6.5 αν θεωρήσω αντί για X την $X_n / \sqrt{2 \log n}$ κ αντί για x

το 1-ε (: σταθεροποιημένο) → σταθερά

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n^{\varepsilon}) \geq \sum_{n\geq 1} \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1-\varepsilon)^2/2} = \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} P(A_n^{\varepsilon}) = \infty$$

Από 2° Λήμμα B-C $P(\limsup_{n\geq 1} A_n^{\varepsilon}) = 1$

~~11.9 (Βλ. κ διάλεξη 10/12/2020 1η ώρα για παράδ. 11.8)~~

~~Σχόλιο: αν $X_n \sim Exp(1)$ θα είχα $\frac{M_n}{\log n}$~~

~~Έστω ε>0 και θέτω $A_n = \left[\frac{M_n}{\log n} \geq 1+\varepsilon\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$~~

~~$P(A_n) = P(M_n \geq (1+\varepsilon)\log n) = 1 - P(M_n \leq (1+\varepsilon)\log n) =$~~

~~$= 1 - P(X_1 < (1+\varepsilon)\log n, \ldots, X_n < (1+\varepsilon)\log n) =$~~ ανεξάρτ.

το $M_n \geq X_i$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$

~~$= 1 - [P(X_1 < (1+\varepsilon)\log n)]^n =$~~ βλ. πιθανότ. Ι

~~$= 1 - (1 - e^{-(1+\varepsilon)\log n})^n =$~~

~~(Σύμφωνα με την υπόδειξη στο τέλος)~~

~~Λόγω του παραδείγματος 11.8 με πιθανότητα 1 ισχύει~~

~~ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \leq 1$. Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \geq 1$ με πιθανότ. 1~~

11.10

(β) $\forall n \in \mathbb{N}$ $L_n = \infty$ ή $k \in \mathbb{N}^+$. Το ζητούμενο λοιπόν ισοδυναμεί με $P(L_n = 1$ άπειρες φορές$) = 1$ (δηλ. ο μόνος τρόπος να πλησιάσει η L_n το 1 είναι να "πέσει πάνω" του)

Θέτω $B_n = \{X_{2n} = k, X_{2n+1} = r\}$ $\forall n \geq 1$. $(B_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητα

κ $P(B_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} P(B_n) = \infty \xRightarrow[B-C]{2^\circ \text{ λήμμα}} P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 1$

Όμως $\limsup_{n\geq 1} B_n \subseteq \{L_n = 1$ άπειρες φορές$\} \Rightarrow P(L_n = 1$ άπειρες φορές$) = 1$

11.9 (Βλ. υπόδ στο τέλος)

Σχόλιο αν $X_n \sim Exp(2)$ θα είχα $\frac{M_n}{\sqrt{\log n}}$ με πιθ 1

82

(a) Θν δο $\lim_n \frac{M_n}{\log n} \geq 1$

$\Leftrightarrow \lim_n \frac{M_n}{\log n} > 1-\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$ με πιθ 1

$P\left(\liminf_{n\geq 2}\left[\left|\frac{M_n}{\log n}\right| > 1-\varepsilon\right]\right) = 1$

Θέτω $A_n^\varepsilon = \left[\left|\frac{M_n}{\log n}\right| > 1-\varepsilon\right]$ και άρα

θν δο $P\left(\limsup_{n\geq 1} (A_n^\varepsilon)^c\right) = 0$. Σκέφτομαι 1° Λήμμα B-C.

$P[(A_n^\varepsilon)^c] = P\left(\frac{|M_n|}{\log n} \leq 1-\varepsilon\right) \overset{M_n\geq 0}{=} P(M_n \leq \log n\,(1-\varepsilon)) \overset{M_n:\max}{=}$

$= P(X_1 \leq \log n\,(1-\varepsilon), \dots, X_n \leq \log n\,(1-\varepsilon)) \overset{\text{ανεξαρτ. + ισόνομες}}{=}$

$= [P(X_1 \leq \log n\,(1-\varepsilon))]^n = (1-n^{-(1-\varepsilon)})^n \leq (e^{-n^{(\varepsilon-1)}})^n =$

$e^x \geq x+1 \ \forall x\in\mathbb{R}$, $x=-n^{-(1-\varepsilon)}$

$= e^{-n^{(\varepsilon-1)}\cdot n} = e^{-n^\varepsilon}$

$e^{-n^\varepsilon} \begin{cases} (*) & 1\geq\varepsilon>0 \\ e^{-n^\varepsilon} < \frac{1}{n^\varepsilon} & \text{για } \varepsilon>1 \text{ λόγω} \end{cases}$

της $e^x \geq x+1 > x \overset{x=n^\varepsilon}{\Rightarrow} e^{n^\varepsilon} > n^\varepsilon \Rightarrow e^{-n^\varepsilon} < \frac{1}{n^\varepsilon}$

που συγκλίνει

(*) Για μεγάλα $u>0$ $e^u > u^m$. Έστω $m\in\mathbb{N}: \frac{1}{m} < \varepsilon$
$\Leftrightarrow m\varepsilon > 1$. Θέτω όπου u το n^ε

$e^{n^\varepsilon} > n^{\varepsilon m} \Rightarrow \frac{1}{e^{n^\varepsilon}} < \frac{1}{n^{\varepsilon m}} \Rightarrow \sum_{n\geq m} \frac{1}{e^{n^\varepsilon}} < \sum_{n\geq m} \frac{1}{n^{\varepsilon m}}$

$\varepsilon m>1$ άρα $<\infty$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} P[(A_n^\varepsilon)^c] < \infty \quad \forall \varepsilon>0$

Άρα από 1° Λήμμα B–C $P(\limsup_{n\geq 1} (A_n^{\varepsilon})^c) = 0$ (83)

11.10 (βλ. υπόδ. στο τέλος)

(a) Έστω $\varepsilon > 0$ θέλουμε $B_\varepsilon = \left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1+\varepsilon \right\}$

Θ.δ.ο. $P(B_\varepsilon) = 1$

Έστω $A_n = \left\{ \frac{L_n}{\log_2 n} > 1+\varepsilon \right\}$ Τότε

$P(A_n) = P\{ L_n > (1+\varepsilon)\log_2 n \} = P(X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+[(1+\varepsilon)\log_2 n]-1} =$
$= K \text{ ή } \Gamma)$

$= 2\, P(X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+[(1+\varepsilon)\log_2 n]-1} = K) =$

το ακέρ. μέρος

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{[(1+\varepsilon)\log_2 n]} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\varepsilon)(\log_2 n)-1} = \frac{4}{2^{(1+\varepsilon)\log_2 n}} =$

$= \frac{4}{n^{1+\varepsilon}} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$ Άρα από 1°

συγκλίνει η σειρά

Λήμμα Borel - Cantelli $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\liminf_{n\geq 1} A_n^c) = 1$

Αν $\omega \in (\liminf_{n\geq 1} A_n^c)$ τότε ανήκει σ' όλα τελικά τα A_n^c

δηλ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1+\varepsilon \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1+\varepsilon$

$\Rightarrow \omega \in B_\varepsilon$ κ $\liminf_{n\geq 1} A_n^c \subseteq B_\varepsilon \Rightarrow P(B_\varepsilon) = 1$

Επίσης

$\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}$ κ $P(B_{1/k}) = 1 \ \forall k \geq 1$

Από άσκ 2.3 (β) $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}) = 1$

(*) Δεν μπορώ να πω για $\varepsilon \to 0$ γιατί το A_n εξαρτάται από το ε. Άλλα $\omega \in \Omega$ ανήκουν στο A_n για $\varepsilon=1$ κ άλλα για $\varepsilon=2$. Πρέπει να ανήκουν τα $\omega \in \Omega$ όμως σε όλα τα A_n για να το πω (άρα τομή)

11.11 (Βλ. διάλεξη 11/12/2020)

$(b) \Rightarrow (a)$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\frac{E|X_1|}{\varepsilon} < \infty \Rightarrow \infty > \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_1|}{\varepsilon} \geq k\right) = \sum_{k\geq 1} P(|X_k| \geq \varepsilon k)$

Θέτω $A_k = \{ |X_k| \geq \varepsilon k \}$

$P(\limsup_{k\geq 1} A_k) = 0$

$\Downarrow$

$P(\underbrace{\liminf_{k\geq 1} A_k^c}_{\Omega \setminus \limsup_{k\geq 1} A_k^c}) = 1 \Rightarrow$ Αν $\omega \in \Omega \setminus \limsup_{k\geq 1} A_k$ τότε

$\exists\ k_0(\omega) \in \mathbb{N} : |X_k(\omega)| < \varepsilon k \quad \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_k(\omega)|}{k} < \varepsilon$

$B_\varepsilon = \{ \overline{\lim} \frac{|X_k(\omega)|}{k} < \varepsilon \}$, $P(B_\varepsilon) = 1$, $B = \bigcap_{r=1}^{\infty} B_{1/r}$

$P(B) = 1$ και αν $\omega \in B \Rightarrow \overline{\lim_n} \frac{X_n}{n} \leq \frac{1}{r} \quad \forall r$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$

$(a \Rightarrow b)$ Αρκεί νδο $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| \geq k) < \infty$ από άσκ. 5.19

Έστω προς άτοπο ότι $\infty = \sum_{k\geq 1} P(|X_1| \geq k)$ τότε

Θέτω $\Gamma_k = [X_k \geq k]$ και αφού X_k: ισόνομες

$\sum_{k\geq 1} P(\Gamma_k) = \infty$ Επίσης Γ_k: ανεξάρτητα γεγονότα (X_k: ανεξάρτητες) $\overset{2^o \text{ λήμμα}}{\underset{B-C}{\Longrightarrow}}$ $P(\limsup_{k\geq 1} \Gamma_k) = 1 \Rightarrow \overline{\lim} \frac{|X_k(\omega)|}{k} \geq 1$

άτοπο από υπόθεση (a)

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| \geq k) < \infty$

11.12 (Βλ. υπόδειξη στο τέλος)

$(a \Rightarrow b)$ (Η άσκηση είναι απαιτητική. Θα δώσουμε μόνο υπόδειξη έως ενός σημείου)

$E[(\log X_1)^+] < \infty \Rightarrow \forall r \in \mathbb{R}_{>0}$ $\frac{1}{r} E(\log X_1)^+ < \infty \Rightarrow$

$E\left(\frac{1}{r}\log X_1\right)^+ < \infty \overset{\text{άσκ } 5.19}{\Longrightarrow} \underbrace{\sum_{k\geq 1} P\left[\left(\frac{1}{r}\log X_1\right)^+ \geq k\right]}_{\sum_{k\geq 1} P\left[\left(\frac{1}{r}\log X_k\right)^+ \geq k\right]} < \infty$

Θέτω $A_k^r = [(\log X_k)^+ \geq kr]$ Από 1° Λήμμα B-C

$P(\limsup_{n\geq 1} A_k^r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow P(\liminf_{n\geq 1} (A_k^r)^c) = 1$

$\Rightarrow (\log X_k)^+ < kr$ τελικά με πιθαν. 1 $\Rightarrow$

$(\log X_k^+ \geq \log X_k)$
$\Rightarrow \log X_k < kr$ — // — — // — $\Rightarrow$

$\Rightarrow X_k < (e^r)^k$ — // — — // —

Διαλέγω r: $e^r < \frac{c}{2} \Rightarrow X_k < \left(\frac{c}{2}\right)^k \Rightarrow$

$\frac{X_k}{c^k} < \left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \frac{X_k}{c^k} < \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$

$(b \Rightarrow a)$ Από το δεδομένο κ το 2° Λήμμα B-C παίρνουμε ότι $\sum_{n\geq 1} P\left(\frac{X_n}{c^n} > 1\right)$ πρέπει να είναι $< \infty$

11.13 (ύπαρξη εννοούμε $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = a \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$) σύγκλιση θα δείξουμε (και αυτή η άσκηση είναι μόνο υπόδειξη)

Πρώτα δείχνουμε ότι $\exists\, a < b \in \mathbb{R}$:

$P(X_1 < a) > 0$ κ $P(X_1 > b) > 0$

Από 2° Λήμμα B-C δ.ο. $\liminf_{n\geq 1} X_n(\omega) < \limsup_{n\geq 1} X(\omega)$

Άρα δεν έχει όριο ούτε πραγματικό ούτε $\pm\infty$

(11.14) (Βλ. υπόδειξη για άσκηση στο τέλος) (87)

- Αν $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log E X_n = \infty \Rightarrow$ ισχύει με πιθανότ. 1 η ανισότητα

- Αν $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log E X_n < \infty$ (Θέτω $a = \overline{\lim} \frac{1}{n} \log E X_n$)

χαρ/σμός $\Rightarrow$ $\overline{\lim}$ στον Απει II

($\forall \varepsilon > 0$) $\exists$ πεπερασμ. n (έστω $k_1, \dots, k_m$) ώστε

$$\frac{\log E(X_n)}{n} > a + \varepsilon \quad \text{ενώ}$$

$\exists$ άπειρα n ώστε $\frac{\log E(X_n)}{n} > a - \varepsilon$

Έστω $\varepsilon \overset{>0}{>} 0$ και $k_1, \dots, k_m$ τα πεπερασμ. n

κ $\ell = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. $\Rightarrow \forall n \geq \ell+1 \quad a - \varepsilon < \frac{\log E(X_n)}{n} \leq a$

$\Leftrightarrow na - n\varepsilon < \log E(X_n) \leq na \Leftrightarrow e^{na - n\varepsilon} < E(X_n) \leq na < \infty$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ ($\log E(X_n) > na + n\varepsilon$ για πεπερασμ. n)

$\Rightarrow E(X_n) > e^{na + n\varepsilon}$ για πεπερασμ. n $\Rightarrow$ με πιθανότητα 1 $X_n > e^{na+n\varepsilon}$ για πεπερασμ. n

$\Rightarrow$ με πιθαν. 1 $\log X_n > na + n\varepsilon$ για πεπερ. n

$\Rightarrow$ — // — $\frac{\log X_n}{n} > a + \varepsilon$ — // —

χαρ/σμός $\Rightarrow$ $\overline{\lim}$ στον Απει II

$$\overline{\lim} \frac{\log X_n}{n} \leq a$$

11.15 (α) • Το (i) ναι γιατί αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \in A\right] = \underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+k+1}}{n+k+1} \in A\right]}_{\in \mathcal{G}'_k} \quad \forall k \geq 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η άσκηση έχει λυθεί από μένα

• Τα (ii),(iii),(iv) όχι (π.χ. αν $g(\omega)$ είναι η σωλήνη του (ii) τότε $g(\omega) \leq 2$ δεν είναι ανεξάρτητο των τιμών στα $X_1,\dots,X_n$)

• Το (v) είναι γιατί $\left[\lim_{n\to\infty} (X_n + X_{n+1}) \in A\right] = \left[\lim_{n\to\infty} (X_{n+k} + X_{n+1+k}) \in A\right]$

και το τελευταίο ανήκει στην $\mathcal{G}'_k$ $\forall k \geq 1$

(β) (Για τα (i), (ii) βλ. διάλεξη 10/12/2020 2η ώρα)

(i) ναι $(\in \mathcal{G}_\infty)$ $\left\{\sum_{n\geq 1} |X_n| < \infty\right\} = \underbrace{\left\{\sum_{n\geq k+1} |X_n| < \infty\right\}}_{\in \mathcal{G}'_k} \quad \forall k \geq 1$

(ii) Εν γένει επηρεάζεται από τα $X_1,\dots,X_n$ (σε λίγες περιπτώσεις ανήκει στα $\mathcal{G}_\infty$)

(iii) όχι δεν ανήκει γιατί εξαρτάται η τιμή της $n|X_1+\dots+X_n|$ από τις $X_1,\dots,X_k$

(iv) $\left\{\sum_{n\geq 1} X_n < \infty\right\} = \underbrace{\left\{\sum_{n\geq k+1} X_n < \infty\right\}}_{\in \mathcal{G}'_k} \quad \forall k \geq 1$

(v) $\left\{\sum_{k=n}^{2n} X_k > 0 \text{ για άπειρα } n\right\} = \left\{\sum_{k=n+\lambda+1}^{2(n+\lambda+1)} X_k > 0 \text{ για άπειρα } n\right\}$

γιατί χάνονται μόνο πεπερασμένα n για τα οποία ισχύει το $\sum_{k=n+\lambda+1}^{2(n+\lambda+1)} X_k > 0$ άρα

Το τελευταίο σύνολο ανήκει στο $\mathcal{G}_\lambda$ $\forall \lambda \geq 1$

SOS για αριστερα

11.16 (βλ τρέβ 2018-19 μαθ 23 σελ 7 ή
(βλ διάλεξη 10/12/2020 $2^{η}$ ώρα)
(Μοιάζει με νόμο μεγάλων αριθμών)

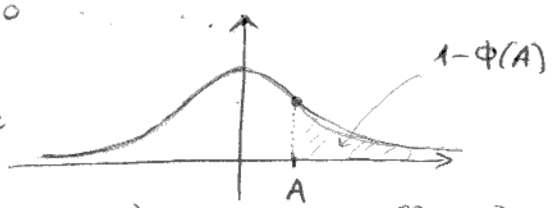
(α) Η $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ακολουθεί την $\mathcal{N}(0,1)$ γιατί $S_n \sim \mathcal{N}(0,n)$

$\Rightarrow P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq A\right) = \Phi(A) \rightarrow P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) =$

$= 1 - \Phi(A)$

$\boxed{\Phi(A) > \frac{1}{2}}$

(β) $A_n = \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right\}$ όσο έχει $P(A_n) > 0$



$P\Big(\underbrace{\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A}_{B}\Big) \geq \underbrace{P(\limsup_{n\geq 1} A_n)}_{} \geq$

$\llcorner P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \lim_n P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq$

$\geq \overline{\lim_k} P(A_k)$

$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} P(A_n) = 1 - \Phi(A) > 0$

Ανήκει το B στην $\mathcal{C}_\infty$;

$Y = \overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \overline{\lim}\left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n}} + \frac{X_{n_0+1} + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) =$

$= \overline{\lim} \frac{X_{n+1} + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{n_0}$ - μετρήσιμη

$\Rightarrow [Y \geq A] \in \mathcal{C}_{n_0} \ \forall n_0 \geq 1$ Άρα $B = [Y > A] \in \mathcal{C}_\infty$

Επειδή $P(B) > 0$ πρέπει (από νόμο 0-1 Kolmogorov) να ισχύει $P(B) = 1$

(γ) $\left\{\overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ όμως $P(\Delta_k) = 1 \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k\right) = 1$

με $\Delta_k = \left\{\overline{\lim_n} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq k\right\}$

11.17 (βλ. υπόδειξη για (β))

(α) ($\Rightarrow$) Αν $\{X_i : i \in I\}$ ανεξάρτητες (το αποτέλεσμα το ... μετ/τες στο Θεωρ. 10.6. Εδώ έχω δείξει για 2 μόνο μετ/τες στο Θεωρ. 10.6. Εδώ έχω δείξει για 2 μόνο μετ/τες, ίσως υπεραριθμήσιμο)
το I είναι τυχαίο σύνολο, ίσως υπεραριθμήσιμο) (σύνολο που κάνει τη X_i μετρήσιμη)
τότε $\forall J \subseteq I$ πεπερασμένο $\mathcal{B}_i\ f(A) = B_i \in \sigma(X_i)$

$P\left(\bigcap_{i\in J} X_i \in \Delta_i\right) = \prod_{i\in J} P(X_i \in \Delta_i)$

$[\mathbb{1}_{A_i} \in \Delta_i] = \begin{cases} \emptyset & 0,1 \notin \Delta_i \\ A_i & 1 \in \Delta_i \\ \Omega \setminus A_i & 0 \in \Delta_i \\ \Omega & 1,0 \in \Delta_i \end{cases}$

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = P\Big(\bigcap_{i\in J}[1_{A_i}\in\{1\}]\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$ ✓ (90)

($\Leftarrow$) ~~αφού~~ $\forall\, J\subseteq I$ πεπερασμένο

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i) \Rightarrow P\Big(\bigcap_{i\in J}[1_{A_i}=1]\Big) = \prod_{i\in J} P(1_{A_i}=1)$$

Έστω $B_i\in\sigma(X_i)$ $\forall i\in I$. $\forall\, i\in I$ X_i: μετρήσιμη (εξ ορισμού της $\sigma(X_i)$) και άρα αν $B_i = f^{-1}(\Delta_i)$ (όλα τα στοιχεία της $\sigma(X_i)$ είναι αυτής της μορφής εξ ορισμού)

- Για $\Delta_i \ni 0$ τότε $[1_{A_i}\in\Delta_i] = \Omega\setminus A_i$ ανεξάρτητο από λήμμα 11.3 από τα άλλα A_i του $J\setminus\{i\}$
- Αν $\Delta_i \ni \{0,1\} \Rightarrow [1_{A_i}\in\Delta_i] = \Omega$ αδιάφορο στην τομή $\Big(\bigcap_{k\in J}[1A_k\in\Delta_k]\Big) = \bigcap_{k\in J\setminus\{i\}}[1A_k\in\Delta_k]$
- Αν $0,1\notin\Delta_i \Rightarrow [1_{A_i}\in\Delta_i]=\emptyset \Rightarrow \bigcap_{k\in J}[1A_k\in\Delta_k]=\emptyset$

$\Rightarrow$ ισχύει η ανεξαρτησία $\Rightarrow (A_i)_{i\in J}$ ανεξάρτητα

(β) (σύμφωνα με υποδ. στο τέλος)

Από (α) X_n ανεξάρτητες. Εφαρμόζω τον 0-1 Νόμο του Kolmogorov για την $\mathcal{G}_\infty$

(Διαισθητικά: το να ισχύει $\omega\in\limsup_{n\geq1} A_n$ ή $\omega\in\liminf_{n\geq1} A_n$ } δεν εξαρτά από τα πρώτα $X_1,\dots,X_k$)

$$\liminf_{n\geq1} A_n = \bigcup_{n\geq1}\underbrace{\bigcap_{k\geq n} A_k}_{\text{αύξουσα}} = \bigcup_{n=\lambda}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}\underbrace{A_k}_{=X_k^{-1}(\{1\})\in\sigma(X_k)} \in \sigma(X_\lambda, X_{\lambda+1},\dots)$$

$$\limsup_{n\geq1} A_n = \bigcap_{n\geq1}\underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{\text{φθίνουσα}} = \bigcap_{n\geq\lambda}\bigcup_{k\geq n}\underbrace{A_k}_{=X_k^{-1}(\{1\})\in\sigma(X_k)} \in \sigma(X_\lambda, X_{\lambda+1},\dots)$$

$\forall \lambda\geq 1$ $\Downarrow$ ανήκουν στην $\mathcal{G}_\infty$

φθίνουσα: $\bigcup_{k\geq n} A_k \supseteq \bigcup_{k\geq n+1} A_k$

ΚΕΦ 12

12.1 (Βλ. Volteras σελ 18)

Θέτω $Y_n = \frac{S_n}{n} \Rightarrow E(Y_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θνδο $P(|Y_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Από ανισότητα Chebysev $P(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2}$ (*)

$Var(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} n \, Var(X_1) = \frac{1}{n} Var(X_1) = \frac{1}{n} \underbrace{(E(X_1^2) - \mu^2)}_{<\infty}$

(*) $= \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και αφού ε τυχόν $Y_n \xrightarrow{P} \mu$

12.2 (Βλ. υπόδειξη στο τέλος και διάλεξη 11/12/2020 2η ώρα)

Σχόλιο • Ισχύει κ με την υπόθεση ότι $E(X_1)$ ορίζεται

• SOS άσκηση, Στην ουσία Θνδο $\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{σβ} E(X_1)}$

Για $M > 0$ ορίζουμε $X_n^M(\omega) = \min\{X_n(\omega), M\} = X_n \wedge M$

Οι $(X_n^M)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες κ ισόνομες

(ισόνομες γιατί $X_n^M = h(X_n)$ με $h(x) = x \wedge M$)

κόβω ώστε να παίρνει πεπερασμένες τιμές στα "θετικά"

▸ $(X_n^M)^+ \leq M$ ▸ $(X_n^M)^- = X_n^-$ αφού $M > 0$ Άρα

$E|X_n^M| \leq M + E(X_n^-) < \infty$ $\left(X_n^M = (X_n^M)^+ - (X_n^M)^-\right)$

Άρα το σύνολο $A_M = \left\{ \lim_n \frac{X_1^M + \dots + X_n^M}{n} = E(X_1^M) \right\}$

έχει $P(A_M) = 1$ από ΙΝΜΑ (Ισχυρ. Νομ. Μεγ. Αρ.)

$X_1^M = X_1 \wedge M$ $\longrightarrow$ • $S_n \geq S_n^M = (X_1^M + \dots + X_n^M)$ (*)

$\hookrightarrow$ • $M \to \infty$ $E(X_1^M) \to E(X_1)$

Άρα παίρνω τομή

$A = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r$ το οποίο έχει $P(A) = 1$. Για $\omega \in A$

(*) $\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \lim_n \frac{X_1^r(\omega) + \dots + X_n^r(\omega)}{n} = E(X_1^r)$ $\forall r \in \mathbb{N}^+$ (**)

(Θα ήθελα να εφαρμόσω Θ Μονότ. Σύγκλ. Δεν γίνεται κατευθ)

$E(X_1^r) = E(X_1^+ \wedge r) - E(X_1^-) \xrightarrow{r\to\infty} E(X_1^+) - E(X_1^-) = +\infty$

(**) Για $r \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \infty$ $\underbrace{\forall \omega \in A}_{\text{με πιθ } 1}$

12.3 (Βλ. διάλεξη 11/12/2020 2η ώρα η υπόδ. στο τέλος)

Υπενθύμιση Στο ΝΝΑ δεν μπορώ να παραλείψω το $E|X_1|<\infty$. Είναι αυτό που θέλω να αποδείξω εδώ.

Από άσκ. 11.11 $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\sigma\beta} 0$ (με πιθ 1) $\Leftrightarrow E|X_1|<\infty$

Άρα αρκεί νδο $\boxed{\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\sigma\beta} 0}$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \to \mu - \mu = 0$$

~~Από άσκ 5.19~~ $\cancel{\sum_{n\geq 1} P(|X_1|\geq n) \leq E(|X_1|) \leq \left[\sum_{n\geq 1} P(|X_1|\geq n)\right] + 1}$

Άρα $E(|X_1|)<\infty \overset{\text{ΙΝΜΑ}}{\Rightarrow} \frac{S_n}{n} \xrightarrow[\sigma.\beta]{} E(X_1) \underset{\text{ορίου}}{\overset{\text{μοναδικ.}}{\Longrightarrow}} E(X_1)=\mu$

12.4 (Βλ. διάλ. 11/12/2020 2η ώρα η υπόδ. στο τέλος)

$E(X_1)=1 \qquad E(X_1^2) = Var(X_1) + E(X_1)^2 = 3+1 = 4$

Εφαρμόζουμε τον ΝΝΑ στις ακολουθίες $(X_n)_{n\geq 1}$, $(X_n^2)_{n\geq 1}$. Τα σύνολα:

$$A=\left\{\omega\in\Omega : \lim_n \frac{X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega)}{n} = 1\right\}$$

$$B=\left\{\omega\in\Omega : \lim_n \frac{X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega)}{n} = 4\right\}$$

έχουν $P(A)=P(B)=1$ το $A\cap B$ έχει $P(A\cap B)=1$ κ

$$\lim_n \frac{(X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega))/n}{(X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega))/n} = \lim_n \frac{(X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega))}{(X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega))} =$$

$= \frac{1}{4}$ με πιθ 1 $(\omega\in A\cap B)$

12.5 (a)

(12 6) (Βλ Τρεβ. 2016-17 μαθ 16-21 σελ 24)

(a) $(u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^{1/n} = e^{1/n \log u_1 \cdots u_n} = e^{1/n \sum_{i=1}^{n} \log u_i}$

Ορδο $-\log u \sim Exp(1)$ για $u \sim Uni((0,1))$

Εστω η κατανομή της $Exp(1)$ $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1-e^{-x} & x>0 \end{cases}$

και Q: συν/ση ποσοστημορίων της F

$\cdot F \nearrow \Rightarrow Q \nearrow$ (F: συνεχής $\Rightarrow Q$: συνεχής), $Q = F^{-1}$

Αν $x>0 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow e^{-x}<1 \Rightarrow -e^{-x} > -1 \Rightarrow \boxed{1-e^{-x}>0}$

F^{-1}: $F(x) = 1-e^{-x} = t \in \mathbb{R}_{>0} \Leftrightarrow -e^{-x} = t-1 \Leftrightarrow e^{-x} = 1-t \overset{t<1}{\Leftrightarrow}$

$-x = \log(1-t) \Leftrightarrow x = -\log(1-t) \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{1}{1-t}\right) = F^{-1}(t)$ για $t \in (0,1)$

Αρα $Q(t) = -\log(1-t)$. $Q(u) = -\log(1-u)$

και από προτ. 7.10. $Q(u) \sim F$ δηλ. την $Exp(1)$

Επίσης αν $Y = 1-u$ $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(1-u \le x) =$

$= P(u \ge 1-x) = 1 - P(u \le 1-x) =$

$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-x-0}{1-0}\right) = x & \text{αν } x \in [0,1] \\ 1-0 = 1 & \text{αν } 1-x<0 \Rightarrow x>1 \\ 1-1 = 0 & \text{αν } 1-x>1 \Rightarrow x<0 \end{cases}$

$= F_X(x) \longrightarrow$ άρα ίδια συν/ση Q

Αρα $Q(1-u) = -\log(u) \sim Exp(1)$. Εστω $X \sim Exp(1)$

Συνεπώς $E(-\log u) = E(X) \Rightarrow E(\log u) = -1$

Από ΝΜΑ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log u_i \xrightarrow{\sigma.\beta} E(\log u_i) = -1$

$\underset{\substack{8.6 \\ f=\exp}}{\overset{\text{προτ}}{\Rightarrow}}$ $e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log u_i} \xrightarrow{\sigma.\beta} e^{-1}$

(β) $u_1 \cdots u_n = e^{\sum_{i=1}^{n} \log u_i} = e^{n \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log u_i\right)}^{\to -1}} \longrightarrow e^{-\infty} = 0$

(γ) (Π1) $E(u_i^a) < \infty$ (Π2) $E(u_i^a) = \infty$ Από προτ. 6.9

(u_i προκύπτει από πυκνότ.)

$\underset{\text{μεγάλο}}{E(u_i^a)} = \int_0^1 u_i^a \cdot \frac{1}{1-0} \, d\underset{\text{μικρό}}{\lambda(u_i)} = \int_0^1 u_i^a \, d\lambda \overset{\text{Riemann}}{=} \int_0^1 u_i^a \, du_i$ $\boxed{f_{u_i}(x) = \frac{1}{1-0} \cdot 1_{[0,1]} \text{ Η πυκνότητα της } u_i}$

$= \int_0^1 u^a \, du =$

$$= \begin{cases} \text{αν} \quad a=-1 & \int_0^1 \frac{1}{u}\,du = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{u}\,du = \lim_{x\to 0^+} [\log u]_x^1 = +\infty \\ \text{αν} \quad a>-1 & \int_0^1 u^{a+1}\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{a+1} \\ \text{αν} \quad a<-1 & \int_0^1 u^{a+1}\,du = \int_0^1 \frac{1}{u^{-1-a}}\,du = \lim_{x\to 0^+} \frac{u^{a+1}}{a+1}\Big|_x^1 = \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{u^{-a-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{a+1} - \underbrace{\frac{1}{a+1}}_{<0}(+\infty) = +\infty$$

Από άσκ 12.2 κ ΝΜΑ

$$\lim_n \frac{u_1^a + \dots + u_n^a}{n} = \begin{cases} \frac{1}{a+1} & (E(X_1)<\infty \quad \text{ΝΜΑ},\ a>-1) \\ \infty & (E(X_1)=0, \quad \text{άσκ } 12.2 \quad a\le -1) \end{cases}$$

12.7 (Βλ. διάλεξη 11/12/2020 2η ώρα)

Έστω $Y_k = (X_k-\mu)^2$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$. Οι $(Y_k)_{k\ge 1}$ είναι ανεξάρτητες κ ισόνομες (ως συν/σεις ανεξάρτ.)

$E(Y_1) = E[(X_1-\mu)^2] = Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$

Άρα από ΙΝΜΑ $\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n} \xrightarrow{\sigma.\beta} \sigma^2$

12.8 Κάθε X_i παίρνει την τιμή 0 με πιθανότητα $1-p$

— // — 1 — // — p

Όλες τις άλλες πραγματ. τιμές με πιθανότ. 0

(a) (Στην υπόδειξη λέει ότι αυτή η άσκ. είναι για άλλο κεφάλαιο) ???

~~Σκέφτομαι το πόρισμα 3.7 έχω P^X, λ στον $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$~~

~~Θέτω $\mathcal{D} = \{(a,b) : (a,b) \subseteq [0,1]\}$ αν δο $P^X(A) = \lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{D}$~~

~~κ $P^X([0,1]) = \lambda([0,1]) \Rightarrow P^X \equiv \lambda$ στο $\mathcal{B}([0,1])$~~

~~$p=\frac{1}{2} \rightarrow P(X_1=0)=\frac{1}{2}$, $P(X_1=1)=\frac{1}{2}$~~ // $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$

~~$|X_i| \le 1$ με πιθ 1 $\Rightarrow$ $X \le 1$ με πιθ 1~~

~~$\Rightarrow P^X([0,1]) = 1 = \lambda([0,1])$ $\quad P^X((a,b)) = P(a<X<b)$~~

~~Έστω $A \in \mathcal{D}$ με $A=(a,b)$~~

(β) Μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του κου Παπαδάτου Θεωρία Πιθανοτήτων σελ. 109-114 (δεν θα τη λύσω εδώ)

(a) Βλ. άσκ 13.11 (πιο απλή λύση) ή δ.ο $P(X_1 \le x) = x$ $\forall x \in [0,1]$ κ X η X της εκφώνησης πρώτα για x με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία ύστερα με άπειρα. Δεσμεύοντας ως προς $X_1=0$ κ $X_1=1$ (Βλ κ σχόλιο στην 13.11)

(12.11) (Σύμφωνα με την υπόδειξη) (ΒΛ κ αρχείο μαθ 21/1/2021)

Στην άσκ. 5.22 είχαμε δ.ο. αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$: $f_n: X\to[0,\infty)$, $\int f_n d\mu<\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$, $f_n \xrightarrow[\infty]{} f$ σ.π. κ $\int f d\mu<\infty$ τότε:

$$\lim_n \int|f_n-f|\,d\mu=0 \Leftrightarrow \int f_n\, d\mu \xrightarrow{n\to\infty}\int f\, d\mu$$

ΠΡΟΣΟΧΗ είχαμε $f_n\geq 0$ (άρα $f\geq 0$).

ΕΔΩ $X_n\in\mathbb{R}$. Το ($\Rightarrow$) στο λήμμα Scheffe ισχύει κ για $f_n\in\mathbb{R}$ ($f\in\mathbb{R}$) και όλες τις για $f_n\in\mathbb{R}$ Άρα δδο για $f_n\in\mathbb{R}$ υποθέσεις (όπως) παραπάνω

$$\int|f_n-f|\,d\mu \xrightarrow{n} 0 \Leftrightarrow \int|f_n|\,d\mu\xrightarrow{n\to\infty}\int|f|\,d\mu$$

(δηλ μόνο το $\Leftarrow$)

$|f_n-f|$: ολοκληρώσιμη,

$\big||f_n-f|-|f_n|\big|\leq|f|$, $\underbrace{|f_n-f|}_{\substack{\downarrow\\0}}-|f_n|\to-|f|$ $\xRightarrow[\text{σύγκλ.}]{\text{θεώρ. κυριαρχ}}$ $\int\big(|f_n-f|-|f_n|\big)\,d\mu\to\int-|f|\,d\mu$

Όμως $\int|f_n|\,d\mu\to\int|f|\,d\mu$ $\xRightarrow[\text{κατά μέλη}]{\text{προσθέτω}}$ $\int|f_n-f|\,d\mu\to 0$

Για την άσκηση: Θ.δ.ο. $E\left|\frac{S_n}{n}-E(X_1)\right|\to 0 \Leftrightarrow$ $\int\left|\frac{S_n}{n}-E(X_1)\right|dP\to 0$ (*) Από ΝΜΑ $\frac{S_n}{n}\to E(X_1)$ σ.π. π.σ.

κ $E|X_1|<\infty \Rightarrow E\left|\frac{S_n}{n}\right|=\frac{1}{n}E|S_n|=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E|X_1|=E(|X_1|)<\infty$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n}\in\mathcal{L}^1$

~~(*) $\Leftrightarrow$ λήμμα Scheffe $\lim_n \int\left|\frac{S_n}{n}\right|dP \to \int|E(X_1)|\,dP \Leftrightarrow \lim E\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\right)\to|E(X_1)|$~~

Από λήμμα Scheffe $E\left|\frac{S_n}{n}-E(X_1)\right|\to 0 \Leftrightarrow \int\frac{|S_n|}{n}\,dP\to\underbrace{\int|E(X_1)|\,dP}_{|E(X_1)|}$

~~Αρκεί $\int\left|\frac{S_n}{n}\right|dP\geq\left|\int\frac{S_n}{n}dP\right|$~~

Αρκεί δηλ. ν.δ.ο. $\int\frac{|S_n|}{n}\,dP=\frac{1}{n}E(|S_n|)\to|E(X_1)|$

Αν $X_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$ $\frac{1}{n}\int X_1+\dots+X_n\,dP=\frac{1}{n}\,n\,E(X_1)=E(X_1)\to E(X_1)$ ✓

Αν $X_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$, γνωρίζουμε ότι

$\left|\int\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\,dP\right| \underset{\text{προτ. 5.7 (iv)}}{\leq} \int\frac{|X_1+\dots+X_n|}{n}\,dP \Rightarrow |E(X_1)|\leq\int|Y_n|\,dP$ $\quad Y_n=\frac{S_n}{n}$ Επίσης $|Y_n|\to|E(X_1)|$

; Ποιο θεώρ σύγκλισης

ΚΕΦ 13

($1^η$ ώρα)

(Βλ. διάλεξη 17/12/2020)

13.1 ΠΡΟΣΟΧΗ! μ: όχι μέτρο πιθανότ. Ουσο

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \int |f|\,d\mu \iff \exists\, a\in\mathbb{R} : f(x) = |f(x)|\cdot e^{ia}$$

μ-σ.π. στο Ω

($\Leftarrow$)

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\int |f(x)|\cdot e^{ia}\,d\mu\right| = \left|e^{ia}\int |f(x)|\,d\mu\right| =$$

$$= \underbrace{|e^{ia}|}_{\text{μέτρο μιγαδ.}}\cdot\left|\int |f|\,d\mu\right| = 1\cdot\int |f|\,d\mu$$

($\Rightarrow$) Από σχέση (13.3) $\int f\,d\mu = e^{i\theta}\left|\int f\,d\mu\right| \Rightarrow$

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \left(\int f\,d\mu\right)e^{-i\theta} = \int e^{-i\theta} f(x)\,d\mu(x) =$$

μιγαδικό ολοκλήρ. ίσο με πραγματ. αριθμό

ίσο μόνο με το Re

$$= \int \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x)\right)\,d\mu(x) \le \int \left|e^{-i\theta} f(x)\right|\,d\mu(x) =$$

$= \int |f|\,d\mu$. Από υπόθεση $\left|\int f\,d\mu\right| = \int |f|\,d\mu$

έχω ότι $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x)) = |f(x)|$ (*) μ-σ.π. στο Ω

$\Rightarrow e^{-i\theta} f(x) = |f(x)|$ γιατί από (*)

$e^{-i\theta} f(x) = |f(x)| + i\,b(x)$ όμως $\left|e^{-i\theta} f(x)\right| = \underbrace{|f(x)|}_{\text{μέτρο}}$

$$\left|e^{-i\theta} f(x)\right| = \sqrt{|f(x)|^2 + [b(x)]^2} = |f(x)| \Rightarrow [b(x)]^2 = 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow f(x) = |f(x)|\cdot e^{i\theta}$ μ σπ στο Ω

εδώ έχω μέτρο πιθανότη-

13.2 (Βλ. διάλεξη 17/12/2020)

(a) $\Phi_X\left(\frac{2\pi}{b}\right) = E\left(e^{i\frac{2\pi}{b}X}\right) = E\left(e^{i\frac{2\pi}{b}\cdot(a+k(\omega)b)}\right) = E\left(e^{\frac{i2\pi a}{b}}\cdot e^{i2\pi k(\omega)}\right)$

$$= e^{\frac{i2\pi a}{b}}\,E\left(\underbrace{e^{i2\pi k(\omega)}}_{\cos 2\pi \underbrace{k(\omega)}_{\in\mathbb{Z}} + i\sin 2\pi k(\omega) = 1}\right) \Rightarrow \left|\Phi_X\left(\frac{2\pi}{b}\right)\right| = \left|e^{\frac{i2\pi a}{b}}\right|\,|E(1)|$$

$\Rightarrow \left|\Phi_X\left(\frac{2\pi}{b}\right)\right| = 1$

(b) $1 = |\Phi_X(t_0)| = \left|E\left(e^{it_0X}\right)\right| \le E\left|e^{it_0X}\right| = 1 \Rightarrow \left|E(e^{it_0X})\right| = E|e^{it_0X}|$

$\Rightarrow \exists\,\theta\in\mathbb{R}$: με πιθανότ. 1 (δηλ σ.π.)

$e^{it_0X} = e^{i\theta}\left|e^{it_0X}\right| = e^{i\theta} = e^{i\theta} \iff e^{i(t_0X-\theta)} = 1 \iff$

$t_0 X - \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow X \in \boxed{\frac{\theta}{t_0} + \frac{1}{t_0} 2\pi\mathbb{Z}} = \{a + k(\frac{2\pi}{t_0}) : k \in \mathbb{Z}\}$

Αν $\phi_X(t_0) = 1 = E(e^{i t_0 X}) \Rightarrow e^{i t_0 X} \in \mathbb{R}$ σ.π. άρα $a = 0$

Αλλιώς $e^{i t_0 (a + k\frac{2\pi}{t_0})} = \underbrace{e^{i t_0 a}}_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{i k 2\pi}}_{1}$ άτοπο

(γ) Από (β) $X \in \{a + k\frac{2\pi}{t_0}\} : k \in \mathbb{Z}$ για $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ κάποιο $\varepsilon > 0$

(Σχόλιο: η X παίρνει τιμές σε πλέγμα που όσο το t_0 μικραίνει, το πλέγμα αραιώνει)

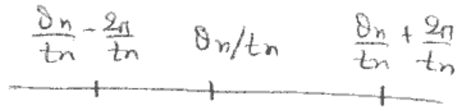
(Στο μάθημα διατυπώθηκε ως εξής:
Αν $\exists (t_n)_{n \geq 1}$ ακολ. στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $t_n \to 0$ κ $|\phi_X(t_n)| = 1$ $\forall n \geq 1$ τότε η X είναι σταθερή με πιθανότ. 1)

$\forall n \geq 1$ (από (β)) βρίσκω $\theta_n \in (-\pi, \pi) : P(X \in \frac{\theta_n}{t_n} + \frac{2\pi}{t_n}\mathbb{Z}) = 1$

Για $k \geq 1$

• Αν $t_n > 0$

$\frac{\theta_n}{t_n} + \frac{2\pi}{t_n} k \geq \frac{\pi}{t_n} = \frac{\pi}{|t_n|}$



Αν t_n: μικρό

• Αν $t_n < 0$

$\frac{\theta_n}{t_n} + \frac{2\pi}{t_n} k \leq -\frac{\pi}{|t_n|}$

Για $k \leq -1$

• $\frac{\theta_n}{t_n} + \frac{2\pi}{t_n} k \leq \frac{\theta_n}{t_n} - \frac{2\pi}{t_n} \leq -\frac{\pi}{|t_n|}$ (Αν $t_n > 0$)

• Αν $t_n < 0$

$\frac{\theta_n}{t_n} + \frac{2\pi k}{t_n} \leq \frac{\pi}{|t_n|}$

Άρα έχουμε ότι $P(|X - \frac{\theta_n}{t_n}| > 0) \leq P(X \notin (-\frac{\pi}{|t_n|}, \frac{\pi}{|t_n|})) =$

$= 1 - P(X \in (-\frac{\pi}{|t_n|}, \frac{\pi}{|t_n|}))$ Επειδή $t_n \to 0 \Rightarrow |t_n| \to 0$

$\Rightarrow$ το $(-\frac{\pi}{|t_n|}, \frac{\pi}{|t_n|})$ τείνει να γίνει το $\mathbb{R}$ $\to P(X \in (-\frac{\pi}{|t_n|}, \frac{\pi}{|t_n|})) \to 1$

$\Rightarrow 1 - P(X \in (-\frac{\pi}{|t_n|}, \frac{\pi}{|t_n|})) \longrightarrow 0$ (δηλ. το να διαφέρει από την $\frac{\theta_n}{t_n}$ το X)

Άρα $P(X = \frac{\theta_n}{t_n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

Όσο η $(\frac{\theta_n}{t_n})_{n \geq 1}$ είναι τελικά σταθερή

Θέτω $A_n = \left[X = \frac{\theta_n}{t_n} \right]$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad P(A_n) > \frac{2}{3} \quad \forall n \geq n_0$

Άρα $P(A_m \cap A_n) > 0 \quad \forall m, n \geq n_0$

κ, αν $\omega \in A_m \cap A_n \quad X(\omega) = \frac{\theta_m}{t_m} = \frac{\theta_n}{t_n} \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$P(X=c) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ όμως $P(X=c)$ δεν έχει $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{P(X=c)=1}$

* Έχω τις εξής περιπτώσεις γενικά:

(Π1) η χαρ/κη συν/ση είναι $\neq 1$ (κατά απόλ. 1) $\forall t \neq 0$

(Π2) $\exists\, t \in \mathbb{R} : \quad |\varphi_X(t)| = 1$

Αν υπάρχει ελάχιστο → παίρνει τιμές αριθμητικής προόδου

Αν δεν υπάρχει ελάχιστο ($\exists\, t_n \to 0$) → X: σταθ

13.3 (Βλ. Τετρ. 2016-17 μαθ 16-21 σελ 38)

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Θέλω να βρω το όριο $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(e^{i(t+h)X}) - E(e^{itX})}{h} = \lim_{h\to 0} E\left(\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} E\left(\frac{e^{itX}}{h}\left(e^{ihX}-1\right)\right) \quad (*)$$

Από άσκ. 5.13 (για $t=\frac{1}{h}$ π.χ) $\lim\limits_{h\to 0} E\left(\frac{e^{itX}}{h}\left(e^{ihX}-1\right)\right) =$

$$= E\left(\lim_{h\to 0} e^{itX}\left(\frac{e^{ihX}-1}{h}\right)\right) \quad \text{αφού :} \quad \cancel{\left|\frac{e^{itX}}{h}\left(e^{ihX}-1\right)\right|}$$

$\cancel{\forall |f_h(t)| \leq \frac{1}{h}|e^{ihX}-1| \leq \frac{1}{h}\left[|e^{ihX}|+1\right] = \frac{2}{h}}$

- $g_h(t) = e^{itX}\left(\frac{e^{ihX}-1}{h}\right) \quad \lim\limits_{h\to 0} g_h(t) = e^{itX} \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{e^{ihX}-1}{h}}_{} = iX$

↳ παράγωγος της e^{ihX} στο $h=0$

- Ψάχνω $K(t) : \quad |g_h(t)| \leq K(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$|g_h(t)| \leq |e^{itX}| \left|\frac{e^{ihX}-1}{h}\right|$

Μπορώ νδο $|e^{i\theta}-1| \leq |\theta| \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\theta} e^{it}\,dt = \frac{1}{i}\left[e^{it}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{i}\left(e^{i\theta} - e^{0}\right) = \frac{1}{i}\left(e^{i\theta}-1\right)$$

$$\Rightarrow e^{i\theta}-1 = i\int_0^\theta e^{it}dt \Rightarrow |e^{i\theta}-1| = \underbrace{|i|}_{1}\left|\int_0^\theta e^{it}dt\right| \le \int_0^\theta \underbrace{|e^{it}|}_{1}dt = \theta$$

Άρα $|g_h(t)| \le |e^{itx}| \cdot \left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| \le |x|$ και $E|x| < \infty$

(Άρα εφαρμόζεται η 5.13)

$$E\left(\lim_{h\to 0} g_h(t)\right) = E\left(e^{itx} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^{ihx}-1}{h}\right) = E(e^{itx}\cdot ix) = \Phi_x'(t)$$

Για $t=0$ $\quad \Phi_x'(0) = E(ix\cdot e^{i0x}) = iE(x)$

13.4 (Βλ. και υπόδειξη στο τέλος) (Βλ. Παραδ. 13.4 vii και Πρότ. 13.11. Επίσης πιθανότ. I)

Αν M_x : η ροπογεννήτρια της X τότε

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int e^{tx}dP \overset{\text{προκύπτει από πυκνότητα}}{=} \int e^{tx} f_x(x)\, d\lambda(x) =$$

$$\boxed{f_x(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{x>0}}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} x^{a-1}\, dx \quad (*)$$

Θέτω $\frac{u}{\lambda-t} = x \rightarrow \frac{du}{\lambda-t} = dx$

$$(*) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{\lambda-t}\right)^{a-1}\frac{du}{\lambda-t} = \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a} \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{\Gamma(a)} e^{-u} u^{a-1}}^{\text{πυκνότητα της } \Gamma(a,1)} du}_{1}$$

$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a \quad$ η $h(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^a = e^{a\log(1-\frac{z}{\lambda})}$ αναλυτική ως ολόμορφη στο $\{z\in\mathbb{C} : |\text{Re} z| < \lambda\} \supseteq$

$$\xrightarrow[13.11]{\text{Πρότ.}} \Phi_x(t) = h(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^a} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

θέλω log συνεχής.
log συνεχής (ο πρωτεύον κλάδος του λογαρ. ως μιγ. συνάρτηση)
για $z\in\mathbb{C}\setminus\{t : t\le 0\}$
έστω έχω $1-\frac{z}{\lambda}$
$1-\frac{z}{\lambda} = a\in\mathbb{R}_{\le 0} \Leftrightarrow -z = \lambda a - \lambda$
$\Leftrightarrow z = \lambda - \lambda a \ge \lambda$ $\quad -\lambda a \ge 0$
$\oplus\ \text{Im}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

13.5 $\quad M_x(t) = \int_{|x|\ge 1} e^{tx}\frac{a}{2|x|^{a+1}}\, d\lambda(x) =$
$\quad \| $
$E(e^{tX})$

$$\ge \frac{a}{2}\int_{x>1} e^{tx}\frac{1}{x^{a+1}}\, d\lambda(x) \quad (*)$$

$$e^{tx} \underset{\text{taylor}}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{(tx)^k}{k!} \Rightarrow e^{tx} > (tx)^{a+2}\cdot c \quad t\ne 0 \text{ για } x>1$$

και κάποιο $c\in\mathbb{R}_{>0}$

$$\circledast = \int_{x>1} c(tx)^{a+2}\frac{1}{x^{a+1}}\,d\lambda(x) = \int_{x>1} c\,t^{a+2}\cdot x\,d\lambda(x) =$$

$$= c\,t^{a+2}\int_{x>1} x\,d\lambda(x) = c\,t^{a+2}\cdot\infty = \infty$$

Οι ασκήσεις 13.6, 13.7, 13.8 είναι πιο μετά

(13.9) (Βλ. υπόδειξη στο τέλος)
Θέτω $Y_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$, $Z_i = \left(\frac{X_i}{n}\right)_{1\le i\le n}$ ανεξάρτ. ως συν/σεις ανεξάρτ.

Έστω $t\in\mathbb{R}$

$$\phi_{Y_n}(t) = \phi_{Z_1}(t)\cdots\phi_{Z_n}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\cdots\phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) =$$

$$\boxed{\phi_{Z_i}(t) = E\left(e^{itZ_i}\right) = E\left(e^{it\frac{X_i}{n}}\right) \underset{13.3}{=} \phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)}$$

$$\underset{\text{Παραδ. 13.4viii}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-|t/n|} = \prod_{i=1}^{n} e^{-|t|/n} = e^{-\frac{|t|}{n}}\cdots e^{-\frac{|t|}{n}} = \underset{\text{Cauchy}}{e^{-|t|}}$$

Από θεωρ. μοναδικότ. $Y_n \sim$ Cauchy

(13.10) Θέτω $Z_n = X_1+\dots+X_n$. Έστω $t\in\mathbb{R}$

$$\phi_{Z_n}(t) \underset{13.3}{=} \phi_{X_1}(t)\cdots\phi_{X_n}(t) = e^{-|t|^a}\cdots e^{-|t|^a} = e^{-n|t|^a} = e^{-\left(n^{1/a}|t|\right)^a}$$

$$= \phi_{X_1}\left(n^{1/a}|t|\right) \underset{13.3\,(ii)}{=} \phi_{n^{1/a}X_1}(t) \xRightarrow{\text{Θεωρ. μοναδ.}} \boxed{Z_n \overset{d}{=} n^{1/a}X_1}$$

(13.11) (Βλ. & υπόδ. στο τέλος)
Θνδο $P(S_n \to Z) = 1$ με $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}$, ~~ὁ...~~
Z: τ.μ. με $Z\sim Uni((-1,1))$. Έστω ο χώρος πιθανότ. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ όπου δουλεύω.

$$\sum_{n\ge 1}\left|\frac{X_n}{2^n}\right| = \sum_{n\ge 1}\frac{|X_n|}{2^n} \le \sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n} = 1 \Rightarrow$$ με πιθαν. 1 συγκλίνει απόλυτα

η σειρά $\forall\omega\in\Omega$ $\Rightarrow$ συγκλίνει η $\sum_{n\ge1}\frac{X_n(\omega)}{2^n}$ σε μια τ.μ. X (αποδεικνύω ότι είναι τ.μ. με το ότι είναι όριο αθροίσματος μετρήσιμων). Έστω $t\in\mathbb{R}$

$$\phi_X(t) = \lim_{k\to\infty}\phi_{\sum_{n=1}^{k}\frac{X_n}{2^n}}(t) \underset{13.3\,(\circledast)\text{ ανεξάρ}}{=} \lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\phi_{\frac{X_n}{2^n}}(t) =$$

$$\underset{13.3}{=} \prod_{n=1}^{\infty}\phi_{X_n}\left(\frac{t}{2^n}\right) \quad (*)$$

$$\phi_{X_n}(t) = E\left(e^{itX_n}\right) \overset{6.13}{=} e^{it(-1)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it(1)} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{-it}+e^{it}\right)}_{\cos t - i\sin t + \cos t + i\sin t} = \cos t$$

Παρατηρούμε το γεγονός ότι η X_1 μπορεί να παίρνει & άλλες τιμές εκτός των ±1 (αλλά με πιθανότ 0) γιατί δεν επηρεάζει την κατανομή. Για πιο αυστηρή απόδ. βλ. βιβλίο Παπαδάτου Θεωρ. Πιθανοτ. σελ 110

$$(*) = \prod_{n\ge1}\cos\frac{t}{2^n}$$ Θδο είναι ίσο με $\frac{\sin t}{t} = \phi_Z(t)$ με $Z\sim Uni((-1,1))$

Θα χρησιμοποιήσω την ταυτότητα (επαναλαμβανόμενα) ◯

$$\sin x = \underbrace{2\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2} = 2^2 \underbrace{\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\frac{x}{2} =$$

$$= 2^3\sin\left(\frac{x}{2^3}\right)\cos\left(\frac{x}{2^3}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cdots =$$

επαγωγικά (δεν το κάνω εδώ)

$$= 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^j}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^j}\right) = \frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Για το 12.8 (β) επίσης υπάρχει post στο stackexchange math με τίτλο "The binary expansion with coefficients equal to Bernoulli random variables"

Θέτω $h = \frac{x}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^j}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} =$

$$= \frac{\sin x}{x}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sin h}} = \frac{\sin x}{x}$$

1 αφού $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h\to 0} 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin h}{h}} \xrightarrow{h\to 0} 1$

13.12 (Βλ. διάλ. 7/1/2021 2η ώρα)

ΣΧΟΛΙΑ

(*) Δηλ. κοντά στο 0 η χαρ/κη μοιάζει (περίπου)

$\phi_X(t) \approx 1 - c(a)\cdot|t|^a$

(**) η X αυτή έχει συμμετρική κατανομή $\overset{13.7}{\Leftrightarrow}$ $\phi_X(t)\in\mathbb{R}$ $\forall t$

$$\underset{t\neq 0}{1-\phi_X(t)} = 1 - \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx \overset{\phi_X(t)\in\mathbb{R}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)\cdot f(x)\cdot dx = \int_{\mathbb{R}}(1-\ldots)$$

$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$

άρτια

$$= 2a\int_1^{\infty}(1-\cos(|t|x))\frac{1}{|x|^{a+1}}\,dx \underset{\substack{dy=|t|dx\\ x\geq 1}}{\overset{y=|t|x}{=}} 2a\int_{|t|}^{\infty}(1-\cos(y))\frac{|t|^{a+1}}{y^{a+1}}\frac{1}{|t|}\,dy =$$

$$= 2a|t|^a\int_{|t|}^{\infty}(1-\cos y)\cdot\frac{1}{y^{a+1}}\,dy$$

$a>0 \to f$: πυκνότ.

$a<2 \to \int_{|t|}^{\infty}\frac{1-\cos y}{y^{a+1}}\,dy$ είναι μονότονη & $\lim_{t\to 0}\ldots = 2a\int_0^{\infty}\frac{1-\cos y}{y^{a+1}}\,dy$

κοντά στο 0 ο (έπειτα από μελέτη) το $1-\cos y$ έχει συμπεριφορά όπως το y^2 ... το ολοκλήρ. $\int_0^1 y^{1-a}\,dy<\infty$

$$\Rightarrow \frac{1-\phi_X(t)}{|t|^a} = \frac{2a|t|^a}{|t|^a}\underbrace{\int_{|t|}^{\infty}(1-\cos y)\cdot\frac{1}{y^{a+1}}\,dy}_{>0} < \infty$$

$$\leq \int_{|t|}^{\infty}\frac{2}{y^{a+1}}\,dy = 2\cdot\left.\frac{y^{-a}}{-a}\right|_{|t|}^{\infty} =$$

$$= 0 - \left(\frac{-2}{a}\frac{1}{|t|^a}\right) = \frac{2}{a}\frac{1}{|t|^a} < \infty$$

2η

(13.6) (Βλ Volterras σελ 21)

(α) $E(\underbrace{Y^k}_{(e^X)^k}) = E(e^{kX}) = M_X(k)$. $M_X(t) = e^{t^2/2}, t \in \mathbb{R}$
(Βλ. παράδ. 13.4 iv)

$E(Y^k) = e^{k^2/2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \rightarrow E(Y^k) < \infty$

(β) $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$Y > 0 \xrightarrow{(\Pi_1)} t \leq 0 \rightarrow tY \leq 0 \Rightarrow e^{tY} \leq 1 \overset{\text{μονοτ. μέσης τιμής}}{\Rightarrow} E(e^{tY}) < \infty$

(για αντίστρ) $\hookrightarrow (\Pi_2)$ $t > 0$ ~~...~~

Έστω προς άτοπο ότι $\exists \varepsilon > 0$ $M_Y(\varepsilon) < \infty$ .. Από προτ. 13.10
(αφού $M_Y(t) < \infty \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (τα αρνητικά από. Π_1))

$M_Y(t) = \sum_{k \geq 0} E(Y^k) \cdot \frac{t^k}{k!} < \infty$ όμως

$E(Y^k) = e^{k^2/2} \rightarrow M_Y(t) = \sum_{k \geq 0} e^{k^2/2} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(e^{k/2} t)^k}{k!}$

$\lim_{k \to \infty} \frac{e^{k/2} t}{k} \overset{\text{ΣΛΗ}}{=} \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2} e^{k/2} = \infty \Rightarrow M_Y(t) = \infty$ άτοπο

$\Rightarrow$ Για $t > 0 \rightarrow M_Y(t) = \infty$

(13.7) (Βλ. διάλ. 17/12/2020 1η ώρα)

X: έχει συμμετρική κατανομή αν $P^X = P^{-X} \Rightarrow P(X \in A) = P(X \in -A)$

$(\rightarrow)$ $X \overset{d}{=} -X \Leftrightarrow \phi_X(t) = \underbrace{\phi_{-X}(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$

$= E(e^{it(-X)}) = E(e^{-itX}) = E(\overline{e^{itX}}) =$

$= \overline{E(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Άρα ισοδύναμα $\phi_X(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(Βλ. δ' υποσ. στο τέλος για διαφορετ. λύση)

(13.8) $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow \phi_X(t) = \phi_Y(t) \Leftrightarrow E(e^{itX}) = E(e^{itY})$. Επίσης $\phi_{-X}(t) = \phi_{-Y}(t)$

(X,-Y: ανεξ ως συνάρτ. ανεξάρτ) (Y,-X ανεξ, προτ. 13.3)

$\phi_{X-Y}(t) \underset{13.3}{=} \phi_X(t) \cdot \phi_{-Y}(t) = \phi_Y(t) \, \phi_{-X}(t) = \phi_{Y-X}(t)$

$\Leftrightarrow P^{X-Y} = P^{-(X-Y)} \Leftrightarrow X - Y$: συμμετρ.

(13.13) (Βλ. κ υπόδ. στο τέλος) ΔΥΣΚΟΛΗ

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int e^{itx} f(x)\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{|x|\geq 1} \underbrace{e^{itx}}_{\cos(tx)+i\sin(tx)} |x|^{-3}\, d\lambda(x)$$ όμως X: συμμετρική άρα

$$1-\varphi_X(t) \overset{(*)}{=} \int_{|x|\geq 1} (1-\cos(tx))|x|^{-3}\, d\lambda(x) = \int_{|x|\geq 1} (1-\cos(|tx|))\, |x|^{-3}\, d\lambda(x) =$$

"άρτιο" ολοκλήρ.

$$= 2\int_1^\infty (1-\cos(tx))\frac{1}{x^3}\, d\lambda(x)$$

υπόδειξη (A)

$$\Rightarrow \varphi_X(t) - 1 = 2\int_1^\infty (\cos(tx)-1)\frac{1}{x^3}\, d\lambda(x) \Rightarrow$$

$$|\varphi_X(t)-1| \leq 2\int_1^\infty |\cos(tx)-1|\frac{1}{x^3}\, d\lambda(x) \leq 2\cdot 2 \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^\infty =$$

$$= -2\left(0-\left(\frac{1}{1^2}\right)\right) = 2$$

(*) $1-\int\dots =$

$= \int f\, d\lambda(x) - \int\dots =$

$= \int f \dots\, d\lambda(x) =$

$= \int (1-\cos(tx)) f \dots$

(A) $\cos(tx)-1 \approx$

$\approx \frac{(tx)^2}{2}$ κοντά στο 0 κ φράσσεται από το 2

13.14 (βλ. υπόδ. στο τέλος)

για $uni((a,b))$ (γενικά)

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\, \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \xrightarrow{\text{εδώ}} f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = f_Y(x)$$

Από θεωρ. 13.17 $\quad f_Z(z) = \int f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy =$
$z \in \mathbb{R}$

$$= \int \mathbb{1}_{[0,1]}(z-y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dy = \int_0^1 \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(z-y)}_{L}\, dy$$

$$L = \begin{cases} 1 & 0 \le z-y \le 1 \text{ και } y \in [0,1] \\ & \Leftrightarrow y \le z \le 1+y \text{ και } y \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Αν $\underbrace{z > 2 \text{ ή } z < 0}_{z \in \mathbb{R} \setminus (0,2)} \to f_Z(z) = 0$

- Αν $0 \le z-y \le 1$ και $y \in [0,1]$ τότε έχω
  $-z \le -y \le 1-z \Rightarrow z \ge y \ge z-1 \xRightarrow{z \in [0,2]} z \in (1,2] \quad z-1 \le y \le 1$
  $\Rightarrow z \in [0,1] \quad 0 \le y \le z$

Άρα $f_Z(z) = \int_0^z 1\, dy = z$ για $z \in (1,2]$

$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1\, dy = 1-(z-1) = 2-z$ για $z \in (1,2]$

ΚΕΦ 14

(Βλ υπόδ στο τέλος)

14.1 Έστω $x \in \mathbb{R}$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x\in[0,1] \\ 1 & x>1 \end{cases} \quad \text{συνεχής σ' όλο το } \mathbb{R}$$

Για $x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$F_{X_n/n}(x) = P(X_n \le nx) = \underbrace{\frac{[nx]}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x = F_U(x)$$

$$\underset{\downarrow \atop x}{x-\frac{1}{n}} = \frac{nx-1}{n} \le \frac{[nx]}{n} \le \frac{nx}{n} = x$$

Για $x<0$ $\quad F_{\frac{X_n}{n}}(x) = 0 \to 0$

Για $x>1$ $\quad F_{\frac{X_n}{n}}(x) = 1 \to 1$

14.2

(14.3) (Βλ. διάλεξη 18/12/2020 2η ώρα (34:00))

όχι πρέπει

Αρκεί $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ κ $P(X \in \partial A) = 0$

Βλ. και Θεώρημα 14.13

(i) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\partial A = \{2, 32.1, 100\}$ (3 σύνολο)

$P(X \in \partial A) = P(X = 2) + P(X = 100) + \underbrace{P(X = 32.1)}_{0 \text{ διακριτή}} > 0$ ΟΧΙ

(ii) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\partial A = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \underset{\emptyset}{\mathbb{Q}^\circ} = \mathbb{R}$ (βλ. πραγματ.) ή καμία μπάλα δεν περιέχει μόνο ρητούς

ΟΧΙ = δεν συνεπάγεται η σχέση
ΝΑΙ = συνεπάγεται η σχέση

$1 = P(X \in \partial A) > 0$ ΟΧΙ

(iii) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\partial A = \{-1.5, 2.8\}$

$P(X \in \partial A) = 0$ γιατί X: διακριτή με στήριγμα το $\mathbb{N}^+$

ΝΑΙ

(iv) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\partial A = \{-2, \pi\}$ (δισύνολο, όχι διάστημα)

$P(X \in \partial A) = 0$ (συνεχής)

(v) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = [0, 1/3] \setminus \emptyset = [0, 1/3]$

$P(X \in \partial A) = \frac{1}{3} > 0$ ΟΧΙ

(vi) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\partial A = \{0, \frac{1}{2}, 2, 4\}$ (μεπιθ 1 $X \in \{0,1\}$)

$P(X \in \partial A) = P(X = 0) > 0$ ΟΧΙ

(14.4) (Βλ. υποσ. στο τέλος) (* Σχόλιο: μάλλον υποθέτουμε ότι είναι σε κοινό χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$)

(a) Έστω $M > 0$ κ $x_M > M$ ένα σημείο συνέχειας της F_X (βλ. παρατηρ. μετά το θεωρ. 14.3)

τότε $\lim_{n\to\infty} P(X_n \le n) \ge \lim_{n\to\infty} P(X_n \le x_M) = P(X \le x_M) \ge P(X \le M)$ $\forall M > 0$

σταθερό, θεωρ. 14.3

αν $n \to \infty$ κάποια στιγμή ξεπερνά το M και το x_M

Για $M \to \infty$ $P(X \le M) \to 1$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} P(X_n \le n) = 1$

(b) $\forall M \ge 1, x \in \mathbb{R}$ $\exists$ $x_M \in (x - \frac{1}{M}, x)$, $y_M \in (x, x + \frac{1}{M})$ σημεία συνέχειας της F_X (όπως πριν)

$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(X_n \in [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} P(X_n \in [x_M, y_M]) \overset{14.13}{=} P(X \in [x_M, y_M]) =$

$= F_X(y_M) - F_X(x_M)$

Για $M \to \infty$ $F_X(y_M) - F_X(x_M) \to \underbrace{F_X(x^+)}_{= F_X(x) \text{ (δεξ. συνεχής)}} - F_X(x^-) = P(X = x)$

$y_M \xrightarrow{M\to\infty} x^+$, $x_M \to x^-$

~~(14.5) (Βλ. υποσ. στο τέλος)~~

Αντιπαράδειγμα: $X_n = \frac{2}{n}$, $X = 0$, $x = 0$ $P(X = 0) = 1$

$P(X_n \in [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) = P(\frac{2}{n} \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$

(14.5) (Βλ. υποσ. στο τέλος) (Βλ κ Σεφ καθ 22 2016-17 σελ 22)

~~Θέτω $(P_n)_{n\geq 1}$ τις κατανομές των $(X_n)_{n\geq 1}$. Έστω $\varepsilon>0$~~
~~$(X_n)_{n\geq 1}$ σφιχτή $\Leftrightarrow$ ($\exists M_\varepsilon>0$ / $P_i(\mathbb{R}\setminus[-M_\varepsilon,M_\varepsilon])<\varepsilon$~~
~~$= P(X_i\in\mathbb{R}\setminus[-M_\varepsilon,M_\varepsilon])$~~
~~$= P(X_i>M_\varepsilon)+P(X_i<-M_\varepsilon)$~~
~~$\forall i\in\mathbb{N}^+$~~
~~Θα χρησιμοποιήσω την~~

Έστω $\varepsilon>0$
$\forall M>0$

$$P(|X_n||Y_n|>\varepsilon)\leq P\left(|Y_n|\geq \frac{\varepsilon}{M}\right)+P(|X_n|\geq M)$$

γιατί • αν $|X_n|\leq M$ έχω $\frac{1}{|X_n|}\geq\frac{1}{M}>0$ κ πολ/ζω με

$|X_n||Y_n|>\varepsilon \overset{\text{όλα}}{\underset{>0}{\Rightarrow}} |Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{M}$ $(*)$

και $P(|X_n||Y_n|>\varepsilon)\leq P(\underbrace{|X_n||Y_n|>\varepsilon,\ |X_n|\geq M}_{\subseteq[|X_n|\geq M]})+P(|X_nY_n|>\varepsilon, |X_n|\leq M)$ τομή

Από $(*)$ $[|X_nY_n|>\varepsilon, |Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{M}]\subseteq[|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{M}]$

$$P(|X_nY_n|>\varepsilon)\leq P(|X_n|\geq M)+P\left(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{M}\right)$$

Για $n\to\infty$
Από θεωρ 14.13

• $\lim_n P\left(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{M}\right)=P\left(0\geq\frac{\varepsilon}{M}\right)=0$

• $P(|X_n|\geq M)\leq \sup_{n\geq 1}P(|X_n|\geq M)$

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P(|X_nY_n|>\varepsilon)}_{\text{χωρίς εξάρτηση από } M}\leq \sup_{n\geq 1}P(|X_n|\geq M)\ \underset{\text{ορσ 14.21}}{\xrightarrow{M\to\infty}}\ 0$$

$\overline{\lim}=\underline{\lim}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}P(|X_nY_n|>\varepsilon)=0 \overset{\text{ορισμός}}{\Rightarrow} X_nY_n\xrightarrow{P}0 \Rightarrow X_nY_n\Rightarrow 0$ κατά πιθανότ.

(14.6) (Βλ. υποσ. στο τέλος)

(a) Πρώτα για $\boxed{c=0}$, x: σημ. συνέχειας της F_X ΟΔο

$\lim_n F_{X_n+Y_n}(x)=F_X(x)$ $\overset{\text{ορσ}}{(14.3)}$

$\boxed{B_1}$ Οσο είναι $\overline{\lim_n} F_{X_n+Y_n}(x)\leq F_X(x)$ Θέτω $F_n=F_{X_n+Y_n}$ για συντομία. Έστω $\varepsilon>0$

$F_n(x)=P(X_n+Y_n\leq x)=P(X_n+Y_n\leq x, X_n\leq x+\varepsilon)+P(X_n+Y_n\leq x, X_n>x+\varepsilon)\leq$
$\leq P(X_n\leq x+\varepsilon)+P(Y_n<-\varepsilon) = F_{X_n}(x+\varepsilon)+\underbrace{P(Y_n<-\varepsilon)}_{\downarrow n\to\infty\ 0}$ αφού $Y_n\xrightarrow{P}0$

Παίρνω $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}\downarrow 0$ κ $x+\varepsilon_k$ σημεία συνεχ. της F_X $\forall k\in\mathbb{N}$. Άρα $\forall k\in\mathbb{N}$ $\overline{\lim_n} F_n(x)\leq F_X(x+\varepsilon_k)=\lim_n F_{X_n}(x+\varepsilon_k)$
(μπορώ να βρω $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια γιατί τα σημ. ασυνέχ. είναι αριθμ. το πλήθος). Επίσης F_X (έτσι πήρα το x) είναι συνεχής στο x $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty}F_X(x+\varepsilon_k)=F_X(x)$ $\Rightarrow$

$\overline{\lim_n} F_n(x) \leq F_X(x)$

$\boxed{\text{Βε}}$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \geq F_X(x)$ Έστω $\varepsilon > 0$

$F_n(x) = P(X_n + Y_n \leq x) \geq P(X_n \leq x - \varepsilon) - P(Y_n > \varepsilon)$

γιατί

$$P(Y_n > \varepsilon) + P(X_n + Y_n \leq x) \geq P(X_n + Y_n \leq x,\ Y_n > \varepsilon) + P(X_n + Y_n \leq x,\ Y_n \leq \varepsilon) = P(X_n + Y_n \leq x)$$

$P(Y_n > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $(Y_n \xrightarrow{P} 0)$ και παίρνω $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολ. με $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ώστε $x - \varepsilon_k$: σημ. συνέχ. της F_X

(άρα $F_X(x - \varepsilon_k) = \lim_n F_{X_n}(x - \varepsilon_k)$

Έχω δηλ. ότι $F_n(x) \geq P(X_n \leq x - \varepsilon_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow F_n(x) \geq F_X(x - \varepsilon_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \geq F_X(x - \varepsilon_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \geq \lim_{k\to\infty} F_X(x - \varepsilon_k) = F_X(x)$

x: σημ. συνέχ. της F_X

$\Rightarrow F_X(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq F_X(x)$ $\Rightarrow Y_n + X_n \Rightarrow X + \underset{0}{\overset{c}{\shortparallel}}$

για $c \neq 0$ θέτω $Z_n = Y_n - c \xrightarrow{P} 0$ και $Z_n + X_n \Rightarrow X$

από πριν $\Rightarrow (Y_n + X_n - c \Rightarrow 0) \rightarrow (Y_n + X_n \Rightarrow c)$

(β) Για $c = 0$ $(Y_n \xrightarrow{P} 0)$

Έστω $\frac{\varepsilon}{\delta}, -\frac{\varepsilon}{\delta}$ σημ. συνέχ. της F_X

$$P(|X_n Y_n| > \varepsilon) = \underbrace{P(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| > \delta)}_{\leq\ |Y_n| > \delta} + \underbrace{P(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| \leq \delta)}_{\frac{1}{|Y_n|} \geq \delta\ \Rightarrow\ \frac{|X_n||Y_n|}{|Y_n|} \geq \frac{\varepsilon}{\delta}} \leq$$

$$\leq \underbrace{P(|Y_n| > \delta)}_{Y_n \xrightarrow{P} 0\ \ \downarrow n\to\infty\ \ 0} + \underbrace{P\left(|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{\delta}\right)}\ (*)$$

~~$\pm\frac{\varepsilon}{\delta}$ σημ. συνέχ.~~

$\cancel{1 - P\left(-\frac{\varepsilon}{\delta} \leq X_n \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 1 - \left(F_{X_n}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) - F_{X_n}\left(-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right)}$

παίρνω $\delta_k \downarrow 0$ ώστε $\frac{\varepsilon}{\delta_k}, -\frac{\varepsilon}{\delta_k}$ σημ. συνέχ. της F_X

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) = F_X\left(\frac{\varepsilon}{\delta_k}\right)$ & $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(\frac{-\varepsilon}{\delta_k}\right) = F_X\left(\frac{-\varepsilon}{\delta_k}\right)$

Άρα $(*) \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \overline{\lim_n} P(|X_nY_n|>\varepsilon) \leq 0 + \underbrace{\overline{\lim} P\left(|X_n| \geq \frac{\varepsilon}{\delta_k}\right)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\pm\varepsilon/\delta_k$ σημ. συνεχ.

$1 - \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n| \leq \frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) =$

$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n| \leq \frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) =$

$\forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow \quad = 1 - F_X\left(\frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) + F_X\left(\frac{-\varepsilon}{\delta_k}\right) (**)$

Για $\delta_k \to 0^+$ $\lim_{k\to\infty} F_X\left(\frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) = F_X(\infty) = 1$

$\lim_{k\to\infty} F_X\left(-\frac{\varepsilon}{\delta_k}\right) = F_X(-\infty) = 0$

$\Big\} (**) \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} 0$ (δεν έχει k το αριστ. μέλος άρα

$\Rightarrow \quad 0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_nY_n|>\varepsilon) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} P(|X_nY_n|>\varepsilon) \to 0$

$\Rightarrow \quad X_nY_n \xrightarrow{P} 0 \overset{14.14}{\Rightarrow} X_nY_n \Longrightarrow 0$

για $\boxed{c \neq 0}$ $\quad Y_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow$ Θέτω $Z_n = Y_n - c \xrightarrow{P} 0$

$\left.\begin{array}{l} \underbrace{X_n Z_n}_{X_nY_n - \underbrace{X_n c}_{\Downarrow\ Xc}} \Rightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad X_nY_n \Rightarrow c \cdot X$

(δ) $\left(Y_n - X_n \xrightarrow{P} 0\right) \Rightarrow \left(Y_n - X_n \Rightarrow 0\right)$

$X_n - X \Rightarrow 0$

$\Big\} \overset{(a)}{\Longrightarrow} Y_n - X \Rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{Y_n \Rightarrow X}$

(14.7) (Βλ. διάλ. 22/12/2020 1η ώρα)

Θέτω $A_n = \mathbb{R} \setminus [-n, n]$: φθίνουσα ακολ. συνόλων

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = P(\emptyset) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad P(A_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

(14.8) (Βλ. διαλ 22/12/2020 1η ώρα) Από άσκ. 14.7 έχω:

Έστω $\varepsilon > 0$ $\underline{\forall i \in I}$ $\exists M_i > 0$ ώστε $P_i(\mathbb{R} \setminus [-M_i, M_i]) < \varepsilon$

Θέτω $M = \max\{M_i : i \in I\} < \infty$ αφού I: πεπερασμένο.

Έχουμε $\underline{P_i(\mathbb{R} \setminus [-M, M])} \leq P_i(\mathbb{R} \setminus [-M_i, M_i]) < \varepsilon \quad \forall i \in I$

14.11 (Βλ. υπόδ. στο τέλος, η Volterras σελ 24) περίπου

($\Rightarrow$) $\{\mu_n : n \geq 1\}$ σφιχτή κ αν $(\mu_n^{(1)})_{n\geq 1}$ υπακολ. της (μ_n) η $\mu_n^{(1)}$ είναι επίσης σφιχτή $\xRightarrow{\text{Θ. Prokhorov}}$ $\exists\ (\mu_n^{(2)})_{n\geq 1}$ υπακολ. της $(\mu_n^{(1)})_{n\geq 1}$ ώστε $(\mu_n^{(1)})$ συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο στο $\mathbb{R}$

($\Leftarrow$) Έστω προς άτοπο ότι $(\mu_n)_{n\geq 1}$ όχι σφιχτή

Από άρνηση ορισμού 14.19

$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\ i_n \in I : \quad \mu_{i_n}(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) \geq \varepsilon \quad (*)$

δηλ. $\exists$ υπακολ. $(\mu_{i_n})_{n\geq 1}$ ώστε να ισχύει η $(*)$

Για κάθε υπακολ. $(\mu_{i_{\lambda_n}})_{n\geq 1}$ της $(\mu_{i_n})_{n\geq 1}$ δηλαδή ισχύει η $(*)$ για όλα τα i_{λ_n} άρα $\mu_{in}(|x_{i_{\lambda_n}}| > \lambda_n) \geq \varepsilon$ $\forall n \geq 1$

Από υπόθεση η $(\mu_{i_{\lambda_n}})_{n\geq 1}$ έχει υπακολ. που συγκλίνει ασθενώς άτοπο γιατί έχω $\mu_{i_{\lambda_n}}(|x_{i_{\lambda_n}}| > \lambda_n) \geq \varepsilon$ (όχι $< \varepsilon$ όπως στον ορσ 14.19)

Άρα (μ_n) σφιχτή

14.12 (Βλ. γιαλ. 29/12/2020 παλιό θέμα)

(α) για $t \in (0,1)$ $\quad P(X_1 > t) = \int_t^\infty f(x)\,dx = \int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_t^1 =$

$= 1 - \sqrt{t}$ $\quad$ (για $t \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ $\quad P(X_1 > t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \geq 1 \\ 1 & \text{αν } t \leq 0 \end{cases}$)

(β) έστω $x \in \mathbb{R}$ $\quad F_{n^2 A_n}(x) = P(n^2 A_n \leq x) = P\left(A_n \leq \frac{x}{n^2}\right) = 1 - P\left(A_n > \frac{x}{n^2}\right) =$

$= 1 - P\left(X_1 > \frac{x}{n^2}, \dots, X_n > \frac{x}{n^2}\right) \overset{\text{ανεξ}}{=}$

$= 1 - P\left(X_1 > \frac{x}{n^2}\right) \cdots P\left(X_n > \frac{x}{n^2}\right) =$

$= 1 - P\left(X_1 > \frac{x}{n^2}\right)^n$

Αν $x \leq 0$ $\quad F_{n^2 A_n}(x) = 1 - 1^n = 0$

Αν $x > 0$ $\quad F_{n^2 A_n}(x) = 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n}_{\downarrow n\to\infty \ e^{-\sqrt{x}}} \to 1 - e^{-\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} > 0$ $\quad$ για $n > \sqrt{x}$ δηλ. τελικά $\quad$ (Βλ. Ανει Ι)

θέτω $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$

ενδο F ↗, δεξ. συνεχής, $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$

- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
- $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} > 0$ $\quad x > 0$ $\quad F$ ↗

F: δεξ συνεχής για $x<0$ και για $x>0$. Για $x=0$;

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1-e^{-\sqrt{x}}\right) = 1-1=0$$

14.14 (Βλ. διαλ. 22/12/2020)

(i) Έστω $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\quad X, X_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad$ 5.7(iv)

$$\left|\lambda(X_n\in A) - \lambda(X\in A)\right| = \left|\int_A f_n(x)\,d\lambda(x) - \int_A f(x)\,d\lambda(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_A |f_n - f|\,d\lambda(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{υπόθ}} 0 \Rightarrow \lambda(X_n\in A) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda(X\in A) \overset{14.3}{\Rightarrow}$$

- Αν $A=(-\infty,x]$ $\quad X_n \Rightarrow X$

(ii) Από άσκ. 5.22 λήμμα Scheffe αφού

$$\int f_n\,d\lambda(x) = \int f\,d\lambda(x) = 1 \quad \left(\text{δηλ. } \int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda\right)$$

$$\Rightarrow \int |f_n - f|\,d\lambda(x) \to 0 \Rightarrow \text{ζητούμενο}$$

ΚΕΦ 15

(15.1) (Βλ. υπόδ. στο τέλος) Δεν θα γίνει εδώ

(15.2) (⇒) (Βλ. Volt σελ 25) Από παράδ. 13.4 (v)

$$\phi_{Y_n}(t) = e^{it\mu_n - t^2\frac{\sigma_n^2}{2}} \quad \forall n\ge 1, \qquad \phi_Y(t) = e^{it\mu - t^2\frac{\sigma^2}{2}}$$

Αν $(\mu_n, \sigma_n) \to (\mu, \sigma)$ τότε $\phi_{Y_n}(t) \to \phi_Y(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\phi_Y(t)$: συνεχής στο 0 $\xRightarrow[\text{Συνέχ. Lévy}]{\text{Θεωρ.}}$ $P^{Y_n} \Rightarrow P^Y \xRightarrow[14.3]{\text{ορσ}} Y_n \Rightarrow Y$

(⇐) $(Y_n \Rightarrow Y) \xRightarrow{\text{ορσ}} (P^{Y_n} \Rightarrow P^Y) \xRightarrow[\text{Lévy (i)}]{\text{Θεωρ.}} \phi_{Y_n}(t) \to \phi_Y(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{it\mu_n - t^2\frac{\sigma_n^2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{it\mu - t^2\frac{\sigma^2}{2}} \underset{\text{Από I αρχή μεταφ. για } \ln}{\Rightarrow} it\mu_n - t^2\frac{\sigma_n^2}{2} \to it\mu - t^2\frac{\sigma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mu_n \to \mu \\ \text{κ} \\ \sigma_n^2 \to \sigma^2 \end{matrix}\right\} \underset{\text{αρχή μεταφ. για } \sqrt{\ } \text{ κ } \sigma_n,\sigma\ge 0}{\Longrightarrow} \left\{\begin{matrix} \mu_n \to \mu \\ \sigma_n \to \sigma \end{matrix}\right\}$$

(15.3) (Βλ. υπόδ. στο τέλος ή Volt σελ 25)

(a) $\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = \sum_{y=1}^{\infty} e^{ity} P(Y=y) = \sum_{y\ge1} \underbrace{(e^{it})^y}_{a} p \underbrace{(1-p)^{y-1}}_{b} =$ $\forall t\in\mathbb{R}$

$y\in\mathbb{N}^+$

$$= pa\sum_{y\ge1} \underbrace{a^{y-1}b^{y-1}}_{\text{γεωμετρ. με } x=ab \text{ (μιγαδικών)}} = pa\cdot\frac{1}{1-ab} = \frac{pe^{it}}{1-e^{it}(1-p)}$$

με $\underbrace{|ab|}_{\text{μέτρο μιγάς}} \le 1-p < 1$ ↑ άρα συγκλίνει

(β) $\cancel{\phi_{X_n}(t) = \frac{\frac{a}{n}e^{it}}{1-(1-\frac{a}{n})e^{it}} = \frac{ae^{it}}{n-e^{it}(n-a)}}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

$\cancel{\forall\, t\neq}$

$\cancel{\phi_{X_n}(t) \to \frac{0}{1-e^{it}} = 0}$

(ii) $$\phi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{p_n e^{it/n}}{1-(1-p_n)e^{it/n}} = \frac{\frac{\alpha}{n} e^{it/n}}{1-(1-\frac{\alpha}{n})e^{it/n}} = \frac{\alpha e^{it/n}}{n-(n-\alpha)e^{it/n}} =$$

$$= \frac{e^{it/n}}{\frac{n}{a} - \left(\frac{n-a}{a}\right)e^{it/n}} = \frac{e^{it/n}}{\frac{1-e^{it/n}}{a/n} + e^{it/n}} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\frac{-it}{a}+1}}_{\phi_X(t)}$$

$$\frac{1-e^{it/n}}{a/n} = \frac{it}{a}\underbrace{\frac{1-e^{it/n}}{it/n}}_{\downarrow n\to\infty \ \frac{-ie^0}{i}}$$

Από Θεωρ. Lévy (συνεχής στο 0) $\Rightarrow \left(\frac{X_n}{n} \Rightarrow X\right)$

(ii) Έστω $t \in \mathbb{R}_{>0}$ ①

$$F_{\frac{X_n}{n}}(t) = P\left(\frac{X_n}{n} \le t\right) = P(X_n \le nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} p_n(1-p_n)^{k-1} = p_n \sum_{k=1}^{[nt]} (1-p_n)^{k-1} =$$

$$= p_n \frac{1-(1-p_n)^{[nt]}}{1-(1-p_n)} = 1-(1-p_n)^{[nt]} = 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{[nt]} = 1-\left(\underbrace{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}_{\to e^{-a}}\right)^{\frac{[nt]}{n}}$$

$\uparrow$ $\boxed{1-p_n \neq 1}$ ταυτότητα

$[nt]/n \xrightarrow{n\to\infty} t$, $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \to e^{-a}$

$F_{\frac{X_n}{n}}(t) \to 1-e^{-at} = F_X(t) \Rightarrow$

Αν $t \in \mathbb{R}_{\le 0}$ $F_{\frac{X_n}{n}}(t) = 0 \to F_X(t)$

15.4 (Βλ. διαλ 7/1/2021 2η ώρα ή υπόδ. στο τέλος) ή Volterras σελ 26) Νόμος σπάνιων γεγονότων

(a) $f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $\forall x \in \mathbb{N}$

Έστω $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k\ge 0} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \left[\sum_{k\ge 0}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}\right] e^{-\lambda} =$$ Υπενθύμιση Taylor της exp

$$= e^{-\lambda} e^{(e^{it}\cdot\lambda)} = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(b) $$\Phi_{X_n}(t) = E(e^{itX_n}) = \sum_{k\ge 0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$= \sum_{k\ge 0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{(p_n e^{it})^k}_{a}\underbrace{(1-p_n)^{n-k}}_{b} =$$

$$= (a+b)^n = \left[1-p_n(1-e^{it})\right]^n = \left[1-\frac{np_n(1-e^{it})}{n}\right]^n$$

$np_n(1-e^{it}) \to \lambda(1-e^{it})$

Άρα $\Phi_{X_n}(t) \to \exp\{-\lambda(1-e^{it})\} = \Phi_X(t)$

15.5 (Βλ. υπόδ. στο τέλος)

$$f_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{(nc)^n}{\Gamma(n)}\cdot t^{nc-1}\cdot e^{-nt} & t > 0 \end{cases}$$

Θέτω $Y_n = \sqrt{n}(X_n - c) = \sqrt{n}X_n - c\sqrt{n}$, $a = nc$

$$\Phi_{Y_n} = e^{-itc\sqrt{n}}\,\Phi_{X_n}(t\sqrt{n}) = \exp\{-itc\sqrt{n}\}\cdot\left(\frac{n}{n-it\sqrt{n}}\right)^{nc} =$$

$\uparrow$ Παράδ 13.4 vii

$$= \exp\{-itc\sqrt{n}\}\left(\frac{n}{n-it\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{e^{+itc\sqrt{n}}}\;\frac{1}{\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{n}\right)^{nc}} =$$

$e^{itc\sqrt{n}}$ → Σημείωση: η άσκ. βγαίνει 15 με Κ.Ο.Θ.

~~$\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{nc}\right)^n \to \exp\left\{-\frac{it\sqrt{n}}{c}\right\}$~~

$$= \exp\left\{-itc\sqrt{n} - nc\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{n}\right)\right\}$$

Log: πρωτεύον κλάδος του (μιγαδ) λογαρίθμου. Είναι συνεχής $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{t\le 0\}$

Από μιγαδ. ανάλυση

$$\mathrm{Log}(1-z) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(-z)^{k+1}}{k+1} \quad \text{για } \underbrace{|z|<1}_{\text{μέτρο}}$$

για $z = \frac{it\sqrt{n}}{n} = \frac{it}{\sqrt{n}}$

$$\phi_{Y_n}(t) = \exp\left\{-itc\sqrt{n} - n\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(-z)^{k+1}}{k+1}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-itc\sqrt{n} + n\sum_{k\geq 0}\frac{z^{k+1}}{k+1}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-ct^2/2} = \phi_Z(t)$$

αφού

- $\frac{z^{k+1}}{k+1} = \frac{(it)^{k+1}}{(\sqrt{n})^{k+1}}\cdot\frac{1}{k+1} \quad \forall\, k\geq 0$
- $nc\cdot\sum_{k\geq 0}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1} = nc\left\{\frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{(it)^2}{2(\sqrt{n})^2} + \sum_{k\geq 2}\left[\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}\right]\right\} =$

$$= (\sqrt{n})\cdot itc - \frac{t^2c}{2} + \underbrace{\sum_{k\geq 2}\left[\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}\right]}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

Άρα ο εκθέτης $-itc\sqrt{n} + itc\sqrt{n} - \frac{t^2c}{2} + \sum_{k\geq 2}\left[\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}\right]$

συγκλίνει στο $-\frac{ct^2}{2}$

(15.6) (Βλ. Volt σελ 26)

Έστω $t \in \mathbb{R}$

$\phi_{X_i}(t) = \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Θνδο $\cancel{\lim_n P(|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0}$

αν $Z_n = \frac{S_n}{n}$, $Z_n \xrightarrow{P} a$

Αρκεί από θεωρ 14.15 νδο $(Z_n \Rightarrow a) \Leftrightarrow$

$\phi_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{iat}$

$\phi_{Z_n}(t) \overset{\text{ανεξαρτ.}}{=} \phi_{\frac{X_1}{n}}(t) \cdots \phi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \phi_{X_1}(\frac{t}{n}) \cdots \phi_{X_n}(\frac{t}{n}) \overset{\text{ισον.}}{=}$

$= \phi(\frac{t}{n}) \cdots \phi(\frac{t}{n}) = [\phi(\frac{t}{n})]^n \overset{\text{κόλπο}}{=} [1 + \frac{n}{n}\phi(\frac{t}{n}) - 1]^n =$

$= \left[1 + \frac{n(\phi(\frac{t}{n}) - 1)}{n}\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{iat}$ (Λήμμα 15.4)

αφού $n(\phi(\frac{t}{n}) - 1) = t\,\frac{\phi(t/n) - 1}{t/n - 0} \xrightarrow{n\to\infty} t \cdot \phi'(0) = tia$

ΚΑΛΗ

(15.9) (Βλ. διαλ. 14/1/2021 2η ώρα 47:19)

(a) Δεν εφαρμόζεται Κ.Ο.Θ.

$Var(S_n) \overset{\text{ανεξαρτ}}{=} Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) =$

$= n \cdot (2 - \frac{1}{n^2})$

$\frac{Var(S_n)}{n} \longrightarrow 2$

$[2 - \frac{1}{n^2}$

Έχει τυπογραφ. το τελευταίο είναι +1

$E(X_k) =$

$= -k \cdot \frac{1}{2k^2} + k \cdot \frac{1}{2k^2}$

$(-1+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}) = 0$

$E(X_k^2) = k^2 \cdot \frac{1}{2k^2} + k^2 \cdot \frac{1}{2k^2}$

$+ 1^2 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2})$

$= 1 + 1 - \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{1}{k^2}$

$Var(X_k) = 2 - 1/k^2$

(b) Θέτω $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Έστω $t \in \mathbb{R}$

$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \overset{X_1,\ldots,X_n:\ \text{ανεξ}}{=} \phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \cdots \phi_{X_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$

ΔΕΝ είναι ισόνομες προσοχή. Θέτω $P_k = \frac{1}{2k^2}$

$\phi_{X_k}(t) = E(e^{itX_k}) = P_k(e^{itk} + e^{-itk}) + (\frac{1}{2} - P_k)(e^{it} + e^{-it}) =$

$= P_k \cos(tk) + \frac{1}{2}\cos(t) - P_k \cos(t)$

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_{n(1-M_n)}(x) = P(n(1-M_n) \le x) = P\left(1-M_n \le \frac{x}{n}\right) =$$

$$= P\left(1-\frac{x}{n} \le M_n\right) = 1 - P\left(M_n < 1-\frac{x}{n}\right) =$$

$M_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 1$ από παλιά άσκηση

$$= 1 - P\left(u_1 < 1-\frac{x}{n}, \dots, u_n < 1-\frac{x}{n}\right) =$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} 1 - P\left(u_1 < 1-\frac{x}{n}\right)\cdots P\left(u_n < 1-\frac{x}{n}\right) \overset{\text{ισόν.}}{=}$$

$$= 1 - \left[P\left(u_1 < 1-\frac{x}{n}\right)\right]^n$$

$$P\left(u_1 < 1-\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)/(1-0) & 0 \le 1-\frac{x}{n} \le 1 \\ 0 & 1-\frac{x}{n} < 0 \\ 1 & 1-\frac{x}{n} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-\frac{x}{n} & n \ge x \ge 0 \\ 0 & x > n \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Για $n \to \infty$ συγκλίνει

$$\begin{cases} 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \to 1-e^{-x} & n \ge x \ge 0 \\ 1 & x > n \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$1-e^{-x}$: σ.κ. της $Exp(1)$

(β) Θα βρω την πυκνότητα της M_n

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \le x) = P(u_1 \le x, \dots u_n \le x) \overset{\text{ανεξ}}{=} P(u_1 \le x)\cdots P(u_n \le x)$$

$$= [P(u_1 \le x)]^n = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

παρ/μη παντού εκτός του 1 (αριθμ. πλήθος σημείων ασυνέχειας)

(βλ. φυλλ. πυκνότ. συνεχούς τ.μ.)

$f_{M_n}(x) = n x^{n-1} \longleftarrow$ από προτ (1η) φυλλ. (ισχύει κ για αριθμ. πλήθος σημείων)

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{n(1-M_n)}(t) = E\left(e^{itn(1-M_n(t))}\right) = \int_0^1 e^{itn(1-x)} n x^{n-1} dx =$$

$$\overset{y=x^n}{=} \int_0^1 \underbrace{e^{itn(1-y^{1/n})}}_{g_n(y)} dy \quad (*)$$

$$\bullet \lim_{n\to\infty} g_n(y) = e^{it \lim_{n\to\infty} \frac{1-y^{1/n}}{\frac{1}{n}}} \overset{DLH}{=} e^{it(-\log y)} = e^{-it}$$

$\bullet$ $\underbrace{|g_n(y)|}_{\text{μέτρο μιγ.}} \le 1$

Άρα κ $\varphi_{n(1-M_n)}(t)$ φραγμένη

$$\overset{\Theta.\Phi.\Sigma}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \varphi_{n(1-M_n(t))} = \int_0^1 y^{-it} dt = \left.\frac{y^{-it+1}}{1-it}\right|_{t=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{1-it} = \varphi_Y(t)$$

15.10 (Βλ. υπόδ. στο τέλος κ διαλ. 12/1/2021 1η ώρα)

$$f_{X_i}(x) = \frac{a}{2|x|^{a+1}} 1_{|x|\geq 1}, \quad a \in (0,2)$$

Θέτω $Y_n = \frac{S_n}{n^{1/a}}$ $\forall n \geq 1$,

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\phi_{Y_n}(t) \underset{\text{ανεξαρ}}{=} \phi_{\frac{X_1}{n^{1/a}}}(t) \cdots \phi_{\frac{X_n}{n^{1/a}}}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right) \cdots \phi_{X_n}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right) \overset{\text{ισον.}}{=}$

$= \left[\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right)\right]^n$ (*)

Υπενθύμιση της 13.12

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\phi_{X_1}(t)}{|t|^a} = C(a) \text{ για κάποιο } C(a)$$

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ $\forall a>0$

$E|X_1|^r < \infty$ αν $r<a$

$E|X_1|^r = \infty$ αν $r \geq a$

(*) Για $n \to \infty$

$\frac{t}{n^{1/a}} \to 0$

$\Rightarrow \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right) \to 1$

οπότε το $\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right)$ θα είναι της μορφής $1 + \frac{A_n(t)}{n}$

Θέλω να χρησιμοποιήσω το Λήμμα 15.4

(*) $= \left(1 + \frac{A_n(t)}{n}\right)^n$ με $A_n(t) = n\left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n^{1/a}}\right) - 1\right) =$

$$= -\frac{1-\phi_{X_1}(t/n^{1/a})}{\left(\frac{|t|}{n^{1/a}}\right)^a} \cdot |t|^a \xrightarrow[\substack{\text{υπενθ.} \\ \frac{t}{n^{1/a}} \to 0}]{n\to\infty} -C(a)|t|^a$$

Άρα $\phi_{Y_n}(t) \xrightarrow[\text{Λήμμα 15.4}]{} e^{-C(a)|t|^a} = f(t)$

Από Θεωρ. Συν. Lévy αφού $f(t)$: συνεχής στο 0 $\exists$ τ.μ. Y με $\phi_Y(t) = f(t)$ (Δεν έχει καλή κατανομή)

35:00

15.11 (Θέμα εξετάσεων, στ διαλ 12/1/2021 1η ώρα)

Σχόλιο: (το έχει κ στις σημειώσεις)

- Αν έχω max ή min $\longrightarrow$ με σ.κ.
- Αν έχω αθροίσματα $\longrightarrow$ με χαρ/κη συν/ση

Από Θ. Συν. του Λένη προκύπτει το ζητούμενο $\bigcirc$

(10.14) Άλλη λύση του αρχείου μαθ 21/1/2021

$$P(X=Y) = E(1_{X-Y=0}) = \int 1_{X-Y=0}\, dP^{(X,Y)}(x,y) =$$

$$= \int \underbrace{\int 1_{x-y=0}\, dP^{Y}(y)}\, dP^{X}(x) = \int P(Y=x)\, dP^{X}(x) \quad (*)$$

το $S' = \{x \in \mathbb{R} : P(Y=x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο

$$(*) = \int \sum_{s \in S'} P(Y=s) \cdot 1_{s=x}\, dP^{X}(x) = \sum_{s \in S'} P(Y=s) \int 1_{x=s}\, dP^{X}(x) =$$

$$= \sum_{s \in S'} P(Y=s)\, P(X=s) = \sum_{s \in \mathbb{R}} P(Y=s)\, P(X=s)$$

(* άλλη λύση μπορεί να είναι λάθος)

ΚΕΦ 16

16.1 (βλ. διάλεξη 12/11/2021 2η ώρα) (προς το τέλος)

$$P(S_n > n\mu) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z>0)$$

με $Z \sim N(0,1)$ κ $A=(0,\infty)$

αφού $P(Z \in \partial A) = P(Z=0) = 0$ (θεωρ. 14.13)

(προσοχή: αναφέρουμε την αιτιολόγηση)

16.2 (βλ. υπόδ. στο τέλος) Για όλες θεωρώ $Z \sim N(0,1)$

~~P(Sn > 2,1n) = P(...) = P(...)~~

(α) $\boxed{P(S_n > 2{,}1n)}$

Από ΙΝΜΑ $\frac{S_n}{n} \to 2$ σ.β. (για όλα τα ερωτήματα)

σύγκλ. κ κατά πιθ.

$$\Rightarrow \lim_n P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0{,}1\right) = 0 \quad \text{όμως} \quad P(S_n > 2{,}1\cdot n) =$$

$$= P\left(\frac{S_n}{n} > 2{,}1\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 2 > 0{,}1\right) \le P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0{,}1\right)$$

$$\Rightarrow P(S_n > 2{,}1\cdot n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(β) $P\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 1\right) = ;$

Από Κ.Ο.Θ. η $Y_n = \frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z$ και το

$A = (1,\infty)$ έχει $\partial A = \{1\}$ με $P(Z \in \partial A) = P(Z=1) = 0$ (Z συνεχής)

$$\Rightarrow P(Y_n \in A) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z \in A) = 1 - \underbrace{\Phi(1)}_{0{,}8413} = 0{,}1587$$

(γ) ~~P(...) = P(...)~~

$$P(S_n > 10\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\underbrace{\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{10}{\sqrt{n}}\right)}_{B_n}$$

Αν $n > 100$ $\frac{10}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - 2 \le \frac{10}{\sqrt{n}} - 2 < -1 \\ 2 - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \ge 2 - 1 > 1 \end{cases}$ $\underbrace{\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}} - 2\right| > 1}_{A_n}$

$P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$B_n \subseteq A_n \Rightarrow P(B_n) \le P(A_n) \to 0$. Άρα $P(B_n) \to 0$

(δ) $P(S_n < 3n) = P\left(\frac{S_n}{n} - 2 < 1\right) = 1 - \underbrace{P\left(\frac{S_n}{n} - 2 \geq 1\right)}_{\to 0}$

αφού $\underbrace{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| \geq 1\right)}_{\downarrow \, 0} \geq P\left(\frac{S_n}{n} - 2 \geq 1\right)$

Άρα $P(S_n < 3n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(ε) $\forall \; n > 10^{10}$ $\quad \frac{10^{10}}{n} < 1 \Rightarrow \frac{10^{10}}{n} - 2 < -1$ Άρα

αν $\underbrace{\frac{S_n}{n} - 2 < \frac{10^{10}}{n} - 2}$ < -1 $\longrightarrow$ το ζητούμενο $\quad$ κ $\quad 2 - \frac{S_n}{n} > 2 - \frac{10^{10}}{n} > 1$

$\Rightarrow \left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1 \quad \longrightarrow \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ Αφού $\left[\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right] \supseteq \left[S_n > 10^{10}\right] \Rightarrow P(S_n > 10^{10}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

16.3 (Βλ κ υπόδ στο τέλος ή 14/1/2021 2η ώρα)

$Var(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = 1$ $\quad$ Θέτω $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$\frac{S_n - 0 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 1}} \Rightarrow Z$ $\quad$ και $\quad X_n^2$: ανεξ κ ισόν.

~~Var~~

$\cancel{Var(Y_n) = E(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^2) = n \cdot 1)}$ $\quad E(X_i^2) = 1$ $\quad$ Από ΙΝΜΑ

$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ $\xrightarrow[\substack{f(x)=\sqrt{x} \\ \text{συνεχής}}]{\text{προτ } 6.6}$ $\sqrt{\frac{Y_n}{n}} \xrightarrow{P} \sqrt{1} = 1$ $\xrightarrow[\text{συνεχής}]{g(x) = \frac{1}{x}}$ $\sqrt{\frac{n}{Y_n}} \xrightarrow{P} 1$

Από άσκ 14.6(β) θεώρ Slutsky $\Big\}$ $\underbrace{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \; \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Y_n}}}_{\frac{S_n}{\sqrt{Y_n}}} \Rightarrow 1 \cdot Z = Z$

16.4 ~~...~~

Θέτω $Y_i \sim Bern(p)$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = S_n \sim Bin(n, p)$

$f_{X_i}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$F_{X_i}(x) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_i}(i)$

Άρα το όριο γίνεται $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(np + A\sqrt{n}) =$
$= P(S_n \leq np + A\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n p(1-p)}} \leq \frac{A}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\kappa \; \circledast} \Phi\left(\frac{A}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

$\circledast$ κ αφού το σύνορο του $\left(-\infty, \frac{A}{\sqrt{p(1-p)}}\right]$ έχει $\circledast$

πιθανότητα 0

16.5 (βλ. διάλεξη 14/1/2021 1η ώρα ή υπόδ. στο τέλος)

Αν $X_k \sim Poisson(1)$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n = X_1 + \dots + X_n \sim Poisson(n)$

$f_{S_n}(x) = e^{-n} \frac{n^x}{x!}$ Άρα $F_{S_n}(x) = \sum_{k=0}^{x} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$

Άρα έχω $\lim_n F_{S_n}(nx) = \lim_n P(S_n \le nx)$

$E(X_1) = 1 = Var(X_1)$

Γνωρίζω ότι από:

- ΚΟΘ $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$
- ΑΝΜΑ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ (δεν θα μας χρειαστεί η σ.β σύγκλιση)

$P(S_n \le nx) = P\left(\frac{S_n}{n} \le x\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1 \le x - 1\right)$

(Π1) $0 \le x < 1$

$x - 1 = -\varepsilon$ για $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow P\left(\frac{S_n}{n} - 1 \le x - 1\right) \le P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \ge 1 - x\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(Π2) $x = 1$ $P(S_n \le n) = P(S_n - n \le 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) \xrightarrow{n\to\infty}$

$P(Z \le 0) = \Phi(0) = 1/2$

αφού (αν $A = [0, \infty)$) $P(Z \in \partial A) = P(Z = 0) = 0$ (Z: συνεχής)

(Π3) $x > 1$ $P(S_n > nx) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1 > x - 1\right) \le \underbrace{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| > x - 1\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{ΑΝΜΑ} 0}$

$\Rightarrow P(S_n \le nx) = 1 - P(S_n > nx) = 1$

16.6 (βλ. υπόδ. στο τέλος)

Θέτω Y_i, Z_i ανεξάρτ. κ. ισόνομες $\forall i \in \mathbb{N}$ κ. να έχουν την ίδια κατανομή με τη X_1 (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) κ. $W_i = Y_i - Z_i$

Τότε η πιθανότητα που ζητάμε γίνεται

$P\left(\left|\frac{Y_1 + \dots + Y_n - (Z_1 + \dots + Z_n)}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) =$

(φυσικά W_i: ανεξάρτ. κ ισόνομες)

$$= P\left(\left|\frac{W_1+\dots+W_n}{\sqrt{n}}\right|\le 1\right) =$$

$$= P\left(\left|\underbrace{\frac{W_1+\dots+W_n}{\sqrt{2n}}}_{\Downarrow\; Z\sim N(0,1)}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1+\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1=2\cdot 0,758-1=0,516$$

$E(W_i)=E(Y_i)-E(Z_i)=0$

$Var(W_i)=Var(X_i)+Var(Y_i)+(-2\,Cov(X_i,-Y_i))=$ (ανεξ ⇒ ασυσχ) $=Var(X_i)+Var(Y_i)+0=$

$=1+1-2\cdot 0=2$

(16.7) (Βλ. διαλ. 14/1/2021 1η ώρα)

* δηλ. άπειρες φορές παίρνει πολύ μεγάλες τιμές ομοίως βγαίνει ότι $\underline{\lim_n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=-\infty$ (παίρνω ακολ. $-\frac{S_n}{\sqrt{n}}$)
* Άρα η $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ "ταλαντώνεται" (Στην εκφ λείπει το "με πιθανότ. 1")
* Είναι ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ της 11.16

Έστω $Z\sim N(0,1)$

Για $M>0$ έστω $A_n=\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ge M\right\}$ Θέλω το $\limsup_{n\ge1} A_n$

$$P\left(\limsup_{n\ge1} A_n\right)\overset{\text{ασκ}}{\ge}\overline{\lim_{n\to\infty}}P(A_n)\underset{\text{ΚΟΘ}}{=}\Phi(Z\ge M)=1-\Phi(M)>0$$

Επίσης $P\left(\underbrace{\left\{\overline{\lim}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ge M\right\}}_{B_M}\right)\ge P\left(\limsup_{n\ge1}A_n\right)=1-\Phi(M)>0$

Αν για άπειρα n $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ge M\Rightarrow\overline{\lim}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ge M$ δηλ.

Αν $\exists\,\omega\in\limsup_{n\ge1}A_n\Rightarrow\omega\in B_M$

όμως B_M ανήκει στην $\mathcal{G}_\infty=\bigcap_{n\ge1}\sigma(\{X_k: k>n\})$ γιατί

$\forall\, n_0\ge1$ (Θ.δ.ο. $B_M\in\mathcal{G}_{n_0}$) $\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n}}+\frac{S_n-S_{n_0}}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow\overline{\lim_n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\overline{\lim_n}\underbrace{\frac{S_n-S_{n_0}}{\sqrt{n}}}_{\mathcal{G}_{n_0}\text{-μετρήσιμη}}$$ γιατί έχει τις μετ/τές με δείκτες μεγαλύτ. του n_0 κ

εξ ορισμού $\mathcal{G}_{n_0}$ είναι η σ-άλγεβρα που τις κάνει μετρήσιμες

Άρα $B_M\in\mathcal{G}_{n_0}$ $\forall\, n_0\in\mathbb{N}$ ⇒ από Νόμο 0-1 Kolmogorov

$P(B_M)=1\Rightarrow P\left(\bigcap_{j=1} B_j\right)=1$

Άρα αν $\omega \in \bigcap_{j \geq 1} B_j \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} = \infty$ γιατί

$\bigcap_{j \geq 1} B_j \subseteq \left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty \right\}$ Άρα $\overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$ με

πιθανότ. 1