Σημειώσεις στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πολυώνυμα

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε τις βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων που θα χρειαστούμε στα επόμενα κεφάλαια χωρίς όμως αποδείξεις.

1.1 Διαιρετότητα

Συμβολίζουμε με $\mathbb{F}[x]$ το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{F}$.Ξέρουμε ότι κάθε $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ γράφεται μοναδικά ως :

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$a_i \in \mathbb{F}$, $a_n \neq 0$.Το a_n λέγεται μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $a(x)$, ενώ το $a_n x^n$ λέγεται μεγιστοβάθμιος όρος του $a(x)$ και το n βαθμός του $a(x)$ (συμβολίζουμε το n ως $\deg a(x)$)

Πρόταση 1.1.1. *Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ μη μηδενικά .Τότε $a(x) \cdot b(x) \neq 0$ και*

$$\deg\left(a(x) \cdot b(x)\right) = \deg a(x) + \deg b(x).$$

Ειδικά : $\deg\left(a(x)^k\right) = k \cdot \deg a(x)$

Απόδειξη. Έστω

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$

$$b(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$$

$b_m \neq 0$
Τότε από τον ορισμό του γινομένου πολυωνύμων , ο μεγιστοβάθμιος όρος του $a(x) \cdot b(x)$ είναι ο $a_n b_m x^{n+m}$.Επειδή $a_n b_m \neq 0$ έχουμε $a(x) \cdot b(x) \neq 0$ και $\deg a(x) \cdot b(x) = n + m$.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ θα λέμε ότι το $a(x)$ διαιρεί το $b(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ (ή ότι το $a(x)$ είναι διαιρέτης του $b(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$) αν υπάρχει $c(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε*

$$b(x) = a(x) \cdot c(x)$$

και θα συμβολίζουμε $a(x)|b(x)$

Για παράδειγμα το $x^2 + x + 1$ διαιρεί το $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{F}[x]$.Τότε*

(1) *Αν $a(x)|b(x)$ και $a(x)|c(x)$,τότε $a(x)|\theta(x)\cdot b(x)+\phi(x)\cdot c(x)$ για κάθε $\theta(x), \phi(x) \in \mathbb{F}[x]$*

(2) *Αν $a(x)|b(x)$ και $b(x)|a(x)$,τότε $b(x) = c \cdot a(x)$ με $c \in \mathbb{F}$*

Απόδειξη του (2). Έστω $b(x) = a(x) \cdot c_1(x)$,$a(x) = b(x) \cdot c_2(x)$ τότε αντικαθιστώντας την δεύτερη ισότητα στην πρώτη παίρνουμε

$$b(x) = b(x) \cdot c_1(x) \cdot c_2(x) \tag{1.1}$$

και διακρίνουμε 2 περιπτώσεις, πρώτα υποθέτουμε ότι $b(x) \neq 0$ οπότε διαιρώντας την (1.1) με $b(x)$ παίρνουμε $1 = c_1(x) \cdot c_2(x)$ επομένως ο βαθμός των $c_1(x), c_2(x)$ είναι 0 από την Πρόταση 1.1.1 άρα $c_1(x) = c \in \mathbb{F}$ για την άλλη περίπτωση υποθέτουμε $b(x) = 0$ τότε από την $b(x)|a(x)$ έπεται $a(x) = 0$ δηλ $b(x) = a(x) = 0$

Παρατήρηση : Σύμφωνα με τον ορισμό , $a(x)|0$ για κάθε $a(x) \in \mathbb{F}[x]$.Επίσης $0|0$. Ακόμη αν $0|a(x)$ τότε $a(x) = 0$.

Θεώρημα 1.1.4. ***(Ταυτότητα της Διαίρεσης)*** *Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$, $a(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε $b(x) = a(x) \cdot q(x) + r(x)$ και $\deg r(x) < \deg q(x)$ ή $r(x) = 0$*

1.2 Ανάγωγα πολυώνυμα

Ορισμός 1.2.1. *Ένα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού λέγεται ανάγωγο στο $\mathbb{F}[x]$ (ή ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{F}$)αν δεν υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού ώστε*

$$p(x) = a(x) \cdot b(x)$$

Παραδείγματα :

(1) Κάθε $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού με $\deg p(x) = 1$ (δηλ $p(x) = p_1x + p_0$,$p_0, p_1 \in mathbbF$,$p_1 \neq 0$),είναι ανάγωγο στο $\mathbb{F}[x]$

(2) το $x^2 + 1$,είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

(3) το $x^2 + 1$,ΔΕΝ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ αφού $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

(4) το x^4+1,ΔΕΝ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ αφού $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

Θεώρημα 1.2.2. *(Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)*

(1) Τα ανάγωγα πολυώνυμα $p(x)$ στο $\mathbb{C}[x]$ είναι ακριβώς τα πρωτοβάθμια $\deg p(x)=1$ (δηλ $p(x)=p_1x+p_0$,$p_0,p_1\in\mathbb{C}$,$p_1\neq 0$),

(2) Τα ανάγωγα πολυώνυμα $p(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$ είναι ακριβώς τα πρωτοβάθμια $\deg p(x)=1$ (δηλ $p(x)=p_1x+p_0$,$p_0,p_1\in\mathbb{R}$,$p_1\neq 0$ και),και του δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα (δηλ $p(x)=p_2x^2+p_1x+p_0$,$p_0,p_1,p_2\in\mathbb{R}$,$p_2\neq 0$, $p_1^2-4p_2p_0<0$)

Παραδείγματα :

(1) το x^2+x+1 δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[x]$ αλλά είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

(2) το x^2+x-1,δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$

(3) το x^n+x-1,δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ $(n\geq 3)$

Θεώρημα 1.2.3. *Κάθε $a(x)\in\mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού γράφεται στη μορφή $a(x)=c\cdot p_1(x)p_2(x)...p_k(x)$ όπου $c\in\mathbb{F}$ και $p_i\in\mathbb{F}[x]$ μονικά ανάγωγα πολυώνυμα . Επιπλέον τα $c,k,p_1(x),p_2(x),...,p_k(x)$ είναι μοναδικά , χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η σειρά των παραγόντων.*
(Σημείωση: μονικά είναι τα πολυώνυμα που ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι 1)

Παρατήρηση (**Ανάλυση σε γινόμενο μονικών αναγώγων**)Έπεται ότι κάθε $a(x)\in\mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού γράφεται:

$$a(x)=c\cdot p_1(x)^{n_1}\cdot,,,\cdot p_k(x)^{n_k}, \tag{1.2}$$

όπου $c\in\mathbb{F}$, και $p_i(x)\in\mathbb{F}[x]$ μονικά ανάγωγα ανά δύο πολυώνυμα Ακόμη αν $0|a(x)$ τότε $a(x)=0$.

Παραδείγματα :

(1) Η ανάλυση του x^3-1 στο $\mathbb{R}[x]$ είναι:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

(2) Η ανάλυση του x^3-1 στο $\mathbb{C}[x]$ είναι:

$$x^3-1=(x-1)\left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

(3) Η ανάλυση του x^8-1 στο $\mathbb{R}[x]$ είναι: $x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

1.3 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης , Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Ορισμός 1.3.1. *$a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ όχι και τα δύο ίσα με 0.Ένα $d(x) \in \mathbb{F}$ λέγεται μέγιστος κοινός διαιρέτης (μ.κ.δ) των $a(x), b(x)$, αν :*

(1) *Το $d(x)$ είναι μονικό*

(2) *$d(x)|a(x)$ και $d(x)|b(x)$*

(3) *Αν $c(x)|a(x)$ και $c(x)|b(x)$ τότε $c(x)|d(x)$*

Θεώρημα 1.3.2. *Αν $a(x), b(x)$ όπως πριν , τότε υπάρχει μοναδικός μ.κ.δ των $a(x), b(x)$, έστω $d(x)$ Επιπλέον, υπάρχουν $\theta(x), \phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με*

$$d(x) = \theta(x)a(x) + \phi(x)b(x).$$

Ορισμός 1.3.3. *Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ όχι και τα δύο μηδέν. Τότε*

$$a(x) = c_1 \cdot p_1(x)^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_k(x)^{a_k},$$

$$b(x) = c_2 \cdot p_1(x)^{b_1} \cdot \cdots \cdot p_k(x)^{b_k},$$

όπου $p_i(x)$ μονικά ανάγωγα ανα δύο διάφορα , $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$,$a_i, b_i \geq 0$. θέτουμε $e_i = \max\{a_i, b_i\}$ για κάθε i, και $e(x) = p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_k(x)^{e_k}$.Το $e(x) \in \mathbb{F}$ λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ε.κ.π) των $a(x), b(x)$ και συμβολίζουμε εκπ $(a(x), b(x)) = e(x)$

Ιδιότητες : $a(x), b(x), e(x) \in \mathbb{F}[x]$ όπως πριν τότε :

(1) Το $e(x)$ είναι μονικό

(2) $a(x)|e(x)$ και $b(x)|a(x)$

(3) Αν $a(x)|c(x)$ και $b(x)|c(x)$ τότε $e(x)|c(x)$

Παράδειγμα:Έστω

$$a(x) = 2(x-1)^2(x-2)^2,$$

$$b(x) = 3(x-1)(x-2)^3(x-5),$$

τότε εκπ $(a(x), b(x)) = (x-1)^2(x-2)^3(x-5)$ και μκδ $(a(x), b(x)) = (x-1)(x-2)^2(x-5)^0$

1.4 Ασκήσεις

Ασκηση 1.2 Βρείτε

(1) το μ.κ.δ$(x^2+1, x^{2010}+1)$

(2) το μ.κ.δ$(x^2+1, x^{2010}-1)$

Λύση : Για το (1). Παρατηρούμε ότι

$$x^{2010}+1 = \left(x^2\right)^{1005}+1 = (x^2+1)\left((x^2)^{1004}-(x^2)^{1003}+(x^2)^{1002}-...+1\right)$$

δηλαδή $x^2+1|x^{2010}+1$. Άρα μ.κ.δ$(x^2+1, x^{2010}+1) = x^2+1$.
Για το (2). Έστω $d(x)$ =μ.κ.δ$(x^2+1, x^{2010}-1)$. Από τον ορισμό του μ.κ.δ $d(x)|x^2+1$ και από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $d(x)|x^{2010}+1$ από το θεώρημα 1.2.5 έχουμε $d(x)|x^{2010}+1-(x^{2010}-1)$,δηλαδή $d(x)|2$ και επειδή πρέπει $d(x)$ να είναι μονικό έχουμε $d(x)=1$

Ασκηση 1.20 Έστω $a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μ.κ.δ$(a(x), b(x)) = 1$ Να δείξετε ότι

(1) αν $a(x)|b(x)\cdot c(x)$ τότε $a(x)|c(x)$

(2) αν $a(x)|c(x)$ και $b(x)|c(x)$ τότε $a(x)\cdot b(x)|c(x)$

Λύση : Για το (1). Από το θεώρημα 1.2.5 υπάρχουν $\theta(x), \phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με

$$1 = \theta(x)a(x) + \phi(x)b(x).$$

Άρα

$$c(x) = \theta(x)a(x)c(x) + \phi(x)b(x)c(x).$$

επειδή $a(x)|b(x)\cdot c(x)$ έχουμε $a(x)|b(x)\cdot c(x)\phi(x)$. Επίσης $a(x)|\theta(x)a(x)c(x)$, άρα

$$a(x)|\theta(x)a(x)c(x) + \phi(x)b(x)c(x).$$

Δηλαδή $a(x)|c(x)\cdot 1$, άρα $a(x)|c(x)$.
Για το (2). Επειδή $b(x)|c(x) \Rightarrow a(x)b(x)|a(x)c(x) \Rightarrow a(x)b(x)|\theta(x)a(x)c(x)$ επειδή $a(x)|c(x)$ ομοίως έχουμε $a(x)b(x)|\phi(x)b(x)c(x)$ από την 1.10 έχουμε $a(x)b(x)|c(x)$

Παρατήρηση από τα παραπάνω προκύπτει το εξής ερώτημα: Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μ.κ.δ$(a(x), b(x)) = 1$ από το θεώρημα 1.2.5 έχουμε ότι υπάρχουν $\theta(x), \phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με

$$1 = \theta(x)a(x) + \phi(x)b(x).$$

είναι τα $\theta(x), \phi(x)$ μοναδικά ; Η απάντηση είναι πως όχι γιατί εναλλακτικά θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$1 = (\theta(x)f(x)b(x))\,a(x) + (\phi(x) + f(x)\,(-a(x)))\,b(x).$$

για κάθε $f(x) \in \mathbb{F}[x]$

Άσκηση 1.4

(α) Έστω $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ $a.b \in \mathbb{F}$, $a \neq b$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\phi(x)$ με το $(x-a)(x-b)$

(β) Να βρεθούν όλες οι τιμές των $c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το $(x-1)(x-2)$ Να διαιρεί το $x^1 0 + x^7 + cx^4 + dx + 1$

Λύση για το (a): Για $x = a \Rightarrow \phi(a) = r_1 a + r_0$. Για $x = b \Rightarrow \phi(b) = r_1 b + r_0$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις και επειδή $a \neq b$ παίρνουμε ότι $r_1 = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{a-b}$ και $r_0 = \frac{b\phi(a)-a\phi(b)}{a-b}$.Άρα

$$r(x) = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{a-b}x - \frac{b\phi(a)-a\phi(b)}{a-b}$$

Λύση για το (β): 1ος τρόπος: Εφαρμόζουμε το (α) για $a = 1, b = 2$ και $\phi(x) = x^{10} + x^7 + cx^4 + dx + 1$ άρα το υπόλοιπο $r(x)$ θα είναι της μορφής $r(x) = \frac{\phi(1)-\phi(2)}{1-2}x - \frac{2\phi(1)-a\phi(2)}{1-2}$ επίσης επειδή $(x-1)(x-2)|\phi(x)$ το υπόλοιπο $r(x) = 0$ άρα

$$\frac{\phi(1)-\phi(2)}{1-2}x - \frac{2\phi(1)-a\phi(2)}{1-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\phi(1) = \phi(2)$ και $2\phi(1) = \phi(2)$ λύνοντας το σύστημα με αγνώστους $\phi(1), \phi(2)$ παίρνουμε $\phi(1) = \phi(2) = 0$ αντικαθιστώντας έχουμε $\phi(1) = c + d + 1 = 0$ και $\phi(2) = 1024 + 128 + 16c + 2d + 1 = 0$ όπου λύνοντας το σύστημα προκύπτει $c = -\frac{1131}{14}$ και $d = \frac{1137}{14}$
2ος τρόπος: Επειδή μ.κ.δ$(x-1, x-2) = 1$ λόγω της άσκησης 1.20 ισχύει ότι $(x-1)(x-2)|\phi(x) \Leftrightarrow (x-1)|\phi(x)$ και $(x-2)|\phi(x)$ και από τις βασικές ιδιότητες πολυωνύμων σελ;; έχουμε $\phi(1) = 0$ και $\phi(2) = 0$ οπότε λύνουμε το σύστημα όπως και στο 1ο τρόπο

Άσκηση 1.8

(α) Βρείτε τις ρίζες στο $\mathbb{C}$ του $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

(β) Έστω $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Δείξτε ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ ο m δεν είναι πολλαπλή ρίζα του $\phi(x) = x^{100} - x^9 + c$

(γ) Να βρεθούν όλες οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το $x^2 - 30x + a$ να διαιρεί το $(x-1)(x-2)...(x-100)$

Λύση για το (a): Το 1 είναι ρίζα του του $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$, άρα το $(x-1)$ διαιρεί το πολυώνυμο $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$, άρα από την ευκλείδεια διαίρεση (λέγεται και ταυτότητα της διαίρεσης)

$$2x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = (x-1)(2x^2 - x + 5).$$

Άρα οι ζητούμενες ρίζες είναι οι

$$1, \frac{1+i\sqrt{39}}{4}, \frac{1-i\sqrt{39}}{4}$$

(β) Υπενθύμιση: Το $r \in \mathbb{C}$ είναι πολλαπλή ρίζα του $\phi(x)$ αν και μόνο αν $\phi(r) = \phi'(r) = 0$. Έχουμε $\phi'(x) = 100x^{99} - 9x^8 = x^8(100x^{91} - 9)$ και άρα για κάθε $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ $\phi'(m) \neq 0$. Άρα <u>δεν</u> υπάρχει $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ που να είναι πολλαπλή ρίζα .
(γ) Έχουμε

$$x^2 - 30x + a | (x-1)(x-2)...(x-100) \Leftrightarrow x^2 - 30x + a = (x - r_1)(x - r_2),$$

όπου $r_1, r_2 \in \{1, 2, ..., 100\}$ με $r_1 \neq r_2$

Παρατήρηση $(x-k)^2 \nmid (x-1)(x-2)...(x-100)$ Από την $x^2 - 30x + a = (x - r_1)(x - r_2)$ κάνοντας τις πράξεις (ή άμεσα από τους τύπους Vieta) προκύπτει

$r_1 + r_2 = 30$ και $a = r_1 \cdot r_2$. Άρα οι ζητούμενες τιμές του a είναι $a = (30 - r_1)r_1$ όπου $r_1 = 1, 2, ..., 14$ (όχι 15 γιατί θα είχαμε $(x - 15)^2$ που όπως είπαμε δε διαιρεί το $(x-1)(x-2)...(x-100)$ επίσης όχι $15 < r_1 < 30$ γιατί προκύπτουν οι ίδιες τιμές $15 < 30 - r_1 < 30$ και από τη παρατήρηση δε γίνεται και τέλος όχι $r_1 > 30$ γιατί $r_1 + r_2 = 30$ όπου $r_1, r_2 \in \{1, 2, ..., 100\}$)

1.5 Ρίζες πολυωνύμων

Ορισμός 1.5.1. *Αν $r \in \mathbb{F}$ και $\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$. Θα λέμε ότι το r είναι ρίζα του $\phi(x)$ αν $\phi(r) = 0$ δηλαδή $a_n r^n + ... + a_1 r + a_0 = 0$*

Βασικές Ιδιότητες :

(1) Το $x - r \in \mathbb{F}[x]$ διαιρεί το $\phi(x) \in \mathbb{F}[x] \Leftrightarrow r$ είναι ρίζα του $\phi(x)$

(2) Έστω $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\phi(x) \neq 0$. Τότε το $\phi(x)$ έχει το πολύ $\deg \phi(x)$ ρίζες του $\mathbb{F}$

(3) (**Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας :**) Αν $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\phi(x) \neq 0$. τότε $\phi(x) = c(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$ όπου $c, r_1, ...r_n \in \mathbb{C}$ και $n = \deg \phi(x)$

(4) $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$, και $r \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\phi(r) = 0$ τότε $\phi(\bar{r}) = 0$ όπου $\bar{r}$ ο συζυγής του r. (Δηλαδή $\bar{r} = a - bi$ αν $r = a + bi$ με $a, b \in R$)

Ορισμός 1.5.2. *Αν $r \in \mathbb{F}$ και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Το r λέγεται <u>πολλαπλή ρίζα του $\phi(x)$</u> αν $(x - r)^2 | \phi(x)$.Αν $(x - r) | \phi(x)$ και $(x - r)^2 \nmid \phi(x)$ τότε το r λέγεται <u>απλή ρίζα του $\phi(x)$</u>*

Παραδείγματα :

(1) το 1 είναι απλή ρίζα του $x^3 - 1$ αφού $x - 1 | x^3 - 1$ και $(x - 1)^2 \nmid x^3 - 1$

(2) το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του $(x - 1)^3(x - 5)$ αφού $(x - 1)^2 | (x - 1)^3(x - 5)$

Πρόταση 1.5.3. *Έστω $r \in \mathbb{F}$ και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Τότε το r είναι πολλαπλή ρίζα του $\phi(x)$ αν και μόνο αν $\phi(r) = \phi'(r) = 0$,όπου $\phi'(x)$ η παράγωγος του $\phi(x)$*

Απόδειξη : ($\Rightarrow$)Έστω r πολλαπλή ρίζα του $\phi(x)$.Τότε $(x-r)^2|\phi(x)$ δηλαδή $\phi(x) = (x-r)^2 f(x)$ όπου $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.Άρα $\phi(r) = 0$.Επειδή $\phi'(x) = 2(x-r)f(x) + (x-r)^2 f'(x)$ έχουμε $\phi'(r) = 0$.
($\Leftarrow$)Έστω $\phi(r) = \phi'(r) = 0$.Από την ταυτότητα της διαίρεσης υπάρχουν $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ με

$$\phi(x) = (x-r)^2 q(x) + r(x) \tag{1.3}$$

όπου $r(x) = r_1 x + r_0$, επειδή $\phi(r) = 0$ αντικαθιστστωντας στην;; έχουμε

$$0 = \phi(r) = (r-r)^2 q(r) + r(r) \Rightarrow r(r) = 0 \tag{1.4}$$

παραγωγίζοντας την ;; έχουμε

$$\phi'(x) = 2(x-r)q(x)+(x-r)^2 q'(x)+r'(x) \Rightarrow 0 = \phi'(r) = 2(r-r)q(r)+(r-r)^2 q'(r)+r'(r) \Rightarrow r'(r) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \tag{1.5}$$

άρα;;;

$$\phi'(x) = 2(x-r)q(x)+(x-r)^2 q'(x)+r'(x) \Rightarrow 0 = \phi'(r) = 2(r-r)q(r)+(r-r)^2 q'(r)+r'(r) \Rightarrow r'(r) = 0 \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow r_1 x + 0 = 0 \Rightarrow r_1 x = 0 \forall x \in \mathbb{F} \Rightarrow r_1 = 0 \tag{1.7}$$

Παραδείγμα/εφαρμογή : Για κάθε $n \geq 1$ το $\phi(x) = x^n - 1$ έχει n διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{C}$.Από το θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

$$r^n - 1 = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n),$$

$r_i \in \mathbb{C}$.
Θα δείξουμε ότι $r_i \neq r_j$ για κάθε $i \neq j$, ή ισοδύναμα κάθε ρίζα του $x^n - 1$ είναι απλή όμως από την προηγούμενη πρόταση μόλις δείξαμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν δεν υπάρχει $r \in \mathbb{C}$ με $\phi(r) = \phi'(r) = 0$ δηλαδή $r^n - 1 = 0 = nr^{n-1}$ που προφανώς δεν υπάρχει τέτοιο r.

1.6 Πολυώνυμα και Πίνακες

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ορίζεται ο $A^2 = A \cdot A$ και γενικά ο A^n για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης ορίζεται για κάθε $a_i \in \mathbb{F}$ ο πίνακας $a_i A^n$.Επίσης έχουμε το άθροισμα $\boxed{a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu}$ που είναι $\nu \times \nu$ πίνακας $(a_i \in \mathbb{F})$ εδώ $I_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ ο ταυτοτικός $\nu \times \nu$ πίνακας

Ορισμός 1.6.1. *Έστω $\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ και $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. με $\phi(A)$ συμβολίζουμε το πίνακα $\phi(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu$*

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\phi(x) = 5x^2 - 4x + 6$ τότε $\phi(A) = 5A^2 - 4A + 6I_2$

Παρατήρηση: Έστω $\theta(x), \phi(x)\psi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$.

(1) Αν $\psi(x) = \theta(x) + \phi(x)$ τότε $\psi(A) = \theta(A) + \phi(A)$

(2) Αν $\psi(x) = \theta(x) \cdot \phi(x)$ τότε $\psi(A) = \theta(A) \cdot \phi(A)$

Παράδειγμα: Αν έχουμε $x - 1 = \phi(x)\theta(x) + \phi(x)\chi(x)$, τότε
$A - I_\nu = \phi(A)\theta(A) + \phi(A)\chi(A)$,

Άσκηση 1.6: Έστω $\theta(x), \phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ όπου $\theta(x) = x^2 + x - 2$ $\phi(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Να βρεθούν όλοι οι $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με $\theta(A) = \phi(A) = 0$

Λύση : Θα βρούμε το μ.κ.δ$(\theta(x), \phi(x))$. Έχουμε $\phi(x) = (x-1)(x^2+1)$ είναι γινόμενο μονικών ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{R}[x]$. Επίσης $\theta(x) = (x-1)(x+2)$. Άρα μ.κ.δ$(\theta(x), \phi(x)) = (x-1)$. Από το βασικό θεώρημα του μ.κ.δ υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $x - 1 = a(x)\phi(x) + b(x)\theta(x)$, άρα για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, $A - I_\nu = a(A)\phi(A) + b(A)\theta(A)$. Αν $\theta(A) = \phi(A) = 0$, τότε $A - I_\nu = 0 \Leftrightarrow A = I_\nu$

Άσκηση 1.11: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ διαγώνιος και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Να δείξετε ότι $\phi(A) = 0$ αν και μόνο αν κάθε a_i είναι ρίζα του $\phi(x)$

Λύση : Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu^2 \end{pmatrix}$

και γενικά $A^n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^n & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu^n \end{pmatrix}$,

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, αφού ο A είναι διαγώνιος . Αν $\phi(x) = \phi_n x^n + ... + \phi_1 x + \phi_0$, τότε από πριν :
$\phi(A) = \phi_n A^n + \phi_{n-1} A^{n-1} + ... + \phi_1 A + \phi_0 I_\nu =$

$$= \phi_n \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^n & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu^n \end{pmatrix} + \phi_{n-1} \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2^{n-1} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & a_\nu^{n-1} \end{pmatrix} + ... + \phi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_n a_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & \phi_n a_2^n & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \phi_n a_\nu^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{n-1} a_1^{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \phi_{n-1} a_2^{n-1} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \phi_{n-1} a_\nu^{n-1} \end{pmatrix} + ... +$$

$$\begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \phi_0 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(a_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \phi(a_2) & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & \phi(a_\nu) \end{pmatrix}.$$

Άρα $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow \phi(a_i) = 0$ για κάθε i

Άσκηση 1.12: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μη μηδενικό σταθερό όρο . Να δείξετε ότι αν $\phi(A) = 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος

Λύση : Έστω $\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ με $a_0 \neq 0$ τότε $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow \phi(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu = 0 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{A\left[-\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_1 I_\nu\right)\right]}_{B} = \underbrace{\left[-\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_1 I_\nu\right)\right]}_{B} A = I_\nu$$

Δηλαδή $AB = BA = I_\nu$, οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος

Άσκηση 1.11: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Να δείξετε ότι αν $\det(A - I_\nu) = 0$ τότε $\det(\phi(A) - \phi(1)I_\nu) = 0$

Λύση : Για $x = 1$, η τιμή του πολυωνύμου $\phi(x) - \phi(1)$ είναιι ίση με $\phi(1) - \phi(1) = 0$.Άρα το $x - 1$ διαιρεί το $\phi(x) - \phi(1)$, δηλαδή υπάρχει $\theta(x) \in \mathbb{F}[x] : \phi(x) - \phi(1) = (x - 1)\theta(x)$. Άρα $\phi(A) - \phi(1)I_\nu = (A - I_\nu)\theta(A)$, οπότε

$$\det(\phi(A) - \phi(1)I_\nu) = \det((A - I_\nu)\theta(A)) = \underbrace{\det(A - I_\nu)}_{0}\det(\theta(A)) = 0$$

1.7 Πολυώνυμα και Γραμμικές Απεικονίσεις

Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση όπου V ένας $\mathbb{F}$ διανυσματικός χώρος .Τότε ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων $f \circ f : V \to V$, την οποία θα συμβολίζουμε με f^2.Ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι ότι η f^2 είναι γραμμική συνάρτηση . **Παράδειγμα:** Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, x - y)$. Τότε $f^2(x, y) = f(x + 2y, x - y) = (3x, 3y)$ **Παρατήρηση :** $(f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ και $\left(f^2 : \hat{e}, \hat{e}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ όπου $\hat{e} = (e_1, e_2)$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$, και παρατηρούμε

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ δηλαδή $(f : \hat{e}, \hat{e})^2 = \left(f^2 : \hat{e}, \hat{e}\right)$.

Όμοια ορίζεται η σύνθεση $f^n = \underbrace{f \circ f ... \circ f}_{n}$ που είναι γραμμική απεικόνιση $V \to V$. Επίσης αν $a \in \mathbb{F}$ τότε η απεικόνιση $af : V \to V$ με $(af)(v) = af(v)$ $v \in V$ επίσης είναι γραμμική.Ακόμη αν η $g : V \to V$ είναι γραμμική τότε ορίζεται η $f + g : V \to V$ με $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$,$v \in V$ η οποία είναι γραμμική .

<u>Συμπέρασμα:</u> αν $a_n, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{F}$, τότε ορίζεται η απεικόνιση $a_n f^n + ... + a_1 f + a_0 \mathbf{1}_V$

και είναι γραμμική απεικόνιση ($\mathbf{1}_V : V \to V$ η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{1}_V(v) = v$ για κάθε $v \in V$)

Ορισμός 1.7.1. *Αν $\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση όπου V ένας $\mathbb{F}$ διανυσματικός χώρος με $\phi(f)$ συμβολίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $\phi(f) = a_n f^n + ... + a_1 f + a_0 \mathbf{1}_V$, $\phi(f) : V \to V$*

Σύνδεση των $\phi(f)$ και $\phi(A)$

Πρόταση 1.7.2. *Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση , V ένας $\mathbb{F}$ πεπερασμένος διανυσματικός χώρος , $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.Έστω $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ (ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\hat{a}$ και $\hat{a}$ των V και V). Τότε*

$$\phi(A) = (\phi(f) : \hat{a}, \hat{a})$$

Απόδειξη Από Γραμμική Ι ξέρουμε ότι

(1) $(f^n : \hat{a}, \hat{a}) = (f : \hat{a}, \hat{a})^n = A^n$

(2) $(cf : \hat{a}, \hat{a}) = c\,(f : \hat{a}, \hat{a}) = cA$

(3) $(\mathbf{1}_V : \hat{a}, \hat{a}) = I_\nu$ όπου $dim V = \nu$

(4) $(f + g : \hat{a}, \hat{a}) = (f : \hat{a}, \hat{a}) + (g : \hat{a}, \hat{a})$,όπου $f, g : V \to V$ γραμμικές απεικονίσεις

έστω

$$\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

τότε

$$\phi(f) = a_n f^n + ... + a_1 f + a_0 \mathbf{1}_V$$

και άρα

$$\begin{aligned}(\phi(f(A)) : \hat{a}, \hat{a}) &= a_n\,(f : \hat{a}, \hat{a})^n + ... + a_1\,(f : \hat{a}, \hat{a}) + a_0 I_\nu \\ &= a_n A^n + ... + A_1 x + a_0 I_\nu = \phi(A)\end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Άσκηση 1.10: Έστω $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, όπου $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$. Έστω $\phi(x) = x^3 + 3x + 1$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση $\phi(A) = (\phi(f) : \hat{a}, \hat{a})$, όπου $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$, δηλαδή $(\phi(f) : \hat{a}, \hat{a}) = A^2 + 3A + I_3$ και κάνοντας τις πράξεις στο δεξί μέλος καταλήγουμε

$$(\phi(f) : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 4 \\ -6 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπενθύμιση από Γραμμική Ι (Γραμμική απεικόνιση - Πίνακας αναπαράστασης):

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x-y, x+4y)$.Έστω $\hat{e}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ Θεωρούμε τις εξής διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}^2$, (δηλαδή $\hat{e} = (e_1, e_2)$ όπου $e_1 = (1,0)$ και $e_2 = (0,1)$) και $\hat{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ όπου $\alpha_1 = (1,1)$ και $\alpha_2 = (1,-1)$.
Υπολογισμός του $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$: η πρώτη στήλη του A δίνεται από τους συντελεστές $f(e_1) = f((1,0)) = (1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$. Άρα η πρώτη στήλη του A είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Για τη δεύτερη στήλη του A ομοίως $f(e_2) = f((0,1)) = (-1,4) = -1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2$. Άρα η δεύτερη στήλη του A είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Οπότε $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Υπολογισμός του $B = (f : \hat{a}, \hat{a})$: η πρώτη στήλη του B δίνεται από τους συντελεστέσ(το πως βρίσκουμε τους συντελεστές το εξηγούμε αμέσως μετά) $f(a_1) = f((1,1)) = (0,5) = \frac{5}{2} \cdot a_1 - \frac{5}{2} \cdot a_2$. Άρα η πρώτη στήλη του B είναι $\begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$. Για τη δεύτερη στήλη του B ομοίως $f(a_2) = f((1,-11)) = (2,-3) = -\frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{5}{2} \cdot a_2$. Άρα η δεύτερη στήλη του A είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Οπότε $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
Υπολογισμός συντελεστών για την πρώτη στηλη του $B = (f : \hat{a}, \hat{a})$:
$f(a_1) = f((1,1)) = (0,5) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \Rightarrow (0,5) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$ άρα έχουμε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ και $\lambda_1 - \lambda_2 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ομοίως εργαζόμαστε και για τους συντελεστές για τη δεύτερη στήλη.

Παράδειγμα): Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $(f : \hat{a}, \hat{a}) \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$, όπου $\hat{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 = (1,1)$ και $\alpha_2 = (1,-1)$ Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^n$.Θέλουμε να βρούμε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^n$ με

$(x,y) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$. Δηλαδή $x = \lambda_1 + \lambda_2$ και $y = \lambda_1 - \lambda_2$ και λύνοντας το σύστημα ως προς λ_1, λ_2 έχουμε

$$\lambda_1 = \frac{x+y}{2}, \lambda_2 = \frac{x-y}{2}.$$

Τώρα $f(x,y) = f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) = \frac{x+y}{2} f(a_1) + \frac{x-y}{2} f(a_2)$ δηλαδή

$$f(x,y) = \frac{x+y}{2}\left(\frac{5}{2}a_1 - \frac{5}{2}a_2\right) + \frac{x-y}{2}\left(-\frac{1}{2}a_1 + \frac{5}{2}a_2\right) = \left(x + \frac{3y}{2}\right)a_1 + \left(0 - \frac{5y}{2}\right)a_2$$

με άλλο τρόπο (Από Γραμμική Ι):Έστω $(x,y) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Έστω $f(x,y) = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$. Τότε :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 2

Ιδιοτιμές -Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμές -Ιδιοδιανύσματα Γραμμικών Απεικονίσεων

Στην ενότητα αυτή θα θεωρούμε χωρίς να το ξαναγράψουμε ότι :

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

(2) V είναι ένας $\mathbb{F}$ διανυσματικός χώρος με $dimV < \infty$

Κίνητρο Ορισμού : Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση , $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V .Τότε ο πίνακας $(f : \hat{a}, \hat{a})$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $\boxed{f(a_i) = \lambda_i a_i}$, $i = 1, 2, ..., \nu$ όπου $\hat{a} = \{a_1, ..., a_\nu\}$

Ορισμός 2.0.3. *Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση . Αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$ $v \neq 0$ τέτοια ώστε $\boxed{f(v) = \lambda v}$, θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή της f και το v ένα ιδιοάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ*

(1)Παράδειγμα : Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα .
Λύση Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Τότε $f(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (x + 2y, 3x + 2y) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow x + 2y = \lambda x$ και $3x + 2y = \lambda y$ δηλαδή θέλουμε τη λύση του 2×2 γραμμικά ομογενούς συστήματος ως προς x, y

$$(1 - \lambda)x + 2y = 0,$$

$$(*) \qquad 3x + (2 - \lambda)y = 0$$

Άρα από Γραμμική Άλγεβρα Ι ξέρουμε ότι έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:
$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}, \boxed{\lambda = 4}$. Άρα οι ιδιοτιμές είναι δύο , οι $\lambda_1 = -1$,$\lambda_2 = -1$
Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων :

- Για $\lambda_1 = -1$ το σύστημα (*) γίνεται

$$2x + 2y = 0, 3x + 3y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

δηλαδή οι λύσεις του συστήματος είναι $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$.Άρα τα ιδιοδιανύσματα της f που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι τα $(x, -x)\mathbb{R}^2, x \neq 0$

- Για Για $\lambda_2 = 4$ το σύστημα (*) γίνεται

$$-3x + 2y = 0, 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y = 0$$

δηλαδή οι λύσεις του συστήματος είναι $\left(x, \frac{3}{2}x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.Άρα τα ιδιοδιανύσματα της f που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι τα $\left(x, \frac{3}{2}x\right), x \neq 0$

(2)Παράδειγμα : Έστω $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, με $f(x, y, z, w) = (x + w, 2y + z, 3z + w, x + w)$. Είναι το 2 ιδιοτιμή της f; Έιναι το $(1, 0, -1, 2)$ ιδιοδιάνυσμα της f;
Λύση

- το 2 είναι ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν υπάρχει $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$:$(x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0)$ με $f(x, y, z, w) = 2(x, y, z, w) \Leftrightarrow (x + w, 2y + z, 3z + w, x + w) = 2(x, y, z, w) \Leftrightarrow$

$$x + w = 2x$$
$$2y + z = 2y$$
$$3z + w = 2z$$
$$x + w = 2w$$

όπου η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $z = w = x = 0$ και $y \in \mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχει μη μηδενική λύση άρα το 2 είναι ιδιοτιμή .

- Υπολογίζοντας έχουμε :$f(1, 0, -1, 2) = (3, -1, -1, 3)$. Είναι σαφές ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με

$$(3, -1, -1, 3) = \lambda(1, 0, -1, 2).$$

Άρα δεν είναι ιδιοδιάνυσμα.

(3)Παράδειγμα : Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (-y, x)$. Να δειχθεί ότι η f δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία ;
Λύση

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$,$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Τότε $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (y, -x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow -y = \lambda x$ και $x = \lambda y$ δήλαδή θέλουμε τη λύση του 2×2 γραμμικά ομογενούς συστήματος ως προς x, y

$$-\lambda x - y = 0,$$

(**) $$x - \lambda y = 0$$

Άρα από Γραμμική Άλγεβρα Ι ξέρουμε ότι έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:
$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

Άρα το σύστημα (**) δεν έχει μη μηδενική λύση δηλαδή η f δεν έχει ούτε ιδιοτιμή και ούτε ιδιοδιάνυσμα.
(3)Παρατήρηση):Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση , $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{R}^2$ $v \neq 0$ τέτοια ώστε $g(v) = \lambda v$, δηλαδή το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της g.Έστω $U \leq \mathbb{R}^2$, $U = \langle v \rangle = \{\mu v \in \mathbb{R}^2 | \mu \in \mathbb{R}\}$.Τότε το U είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στη διεύθυνση του v.Έχουμε $g(\mu v) = \mu g(v) = \mu\lambda v \in U$.Δηλαδή αν $u \in U$, τότε $g(u) \in U$, άρα $\boxed{g(U) \subseteq U}$.Για την f της άσκησης :$f(1,0) = (0,1)$ και $f(0,1) = (-1,0)$, που σημαίνει γεωμετρικά ότι η f στρίβει το επίπεδο κατά $90°$ ανάποδα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού .Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα της f θα πρέπει λόγω της $\boxed{g(U) \subseteq U}$ να ισχύει $f(U) \subseteq U$, όπου $U = \langle v \rangle$.Αλλά $f(U) \subseteq$ κάθετης ευθείας στο v.Άρα $f(U) = \{0\}$. Αυτό είναι άτοπο αφού η f είναι 1-1

Πρόταση 2.0.4. *Έστω $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ γραμμική απεικόνιση , $\lambda \in \mathbb{F}$,$A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ όπου $\hat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V (με $dimV = \nu$).Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) *Η λ είναι ιδιοτιμή της f.*

(2) $Ker(f - \lambda \mathbf{1}_V) \neq \{0\}$

(3) $\det(A - \lambda I_\nu) = \{0\}$

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω λ ιδιοτιμή της f. Τότε υπάρχει $v \in V$, $v \neq 0$ τέτοιο ώστε $f(v) = \lambda v$. Δηλαδή $f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda\mathbf{1}_V)(v) = 0$ δηλαδή $v \in Ker(f - \lambda\mathbf{1}_V)$ οπότε $Ker(f - \lambda\mathbf{1}_V) \neq \{0\}$

(2) $\Rightarrow$ (3) Έχουμε τη γραμμική απεικόνιση $(f - \lambda\mathbf{1}_V) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ και, $Ker(f - \lambda\mathbf{1}_V) \neq \{0\}$ άρα η $(f - \lambda\mathbf{1}_V)$ όχι αντιστρέψιμη . Επειδή η $(f - \lambda\mathbf{1}_V)$ είναι γραμμική απεικόνιση $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$, με $\det(f - \lambda\mathbf{1}_V : \hat{a}, \hat{a}) = 0$, όμως $(f - \lambda\mathbf{1}_V : \hat{a}, \hat{a}) = (f : \hat{a}, \hat{a}) - \lambda(\mathbf{1}_V : \hat{a}, \hat{a}) = A - \lambda I_\nu$

(3) $\Rightarrow$ (1) Αφού $\det(A - \lambda I_\nu) = \{0\}$ και $A - \lambda I_\nu = (f - \lambda\mathbf{1}_V : \hat{a}, \hat{a})$ έχουμε ό-τι η $(f - \lambda\mathbf{1}_V)$ 1-1, άρα $Ker(f - \lambda\mathbf{1}_V) \neq \{0\}$ δηλαδή υπάρχει $v \in V$, $v \neq 0$ ώστε $(f - \lambda\mathbf{1}_V)(v) = 0$ επομένως $f(v) = \lambda v$. Άρα λ ιδιοτιμή (αφού $v \neq 0$)

Ορισμός 2.0.5. *Έστω $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ γραμμική απεικόνιση ,και $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή της f. Θέτουμε $V_f(\lambda) = Ker(f - \lambda\mathbf{1}_V)$. Το $V_f(\lambda)$ είναι υπόχωρος του V και λέγεται υπόχωρος της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ*

Παρατήρηση :
$V_f(\lambda) = \{v \in V : v$ ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda\} \cup \{0\}$
(1)Παράδειγμα : Να βρεθεί μια βάση για κάθε υπόχωρο της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -3y + 4z, -2x + 3z)$
Υπολογισμός Ιδιοτιμών :εδώ ας χρησιμοποιήσουμε το (3) της πρότασης .Αν $\hat{e}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$, τότε εύκολα επαληθεύεται ότι ο πίνακας $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$ Τώρα

$$\det(A-\lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((-3-\lambda)(3-\lambda)+8\right)$$

Άρα $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)\left(\lambda^2 - 9 + 8\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}, \boxed{\lambda = 1}$.Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ ή $\lambda_2 = -1$

Υπολογισμός Ιδιοχώρων :

(i) $V_f(1) : f(x, y, z) = 1 \cdot (x, y, z) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} -2y + 2z &= 0 \\ -4y + 4z &= 0 \\ -2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή αν και μόνο αν $-y + z = 0$. Άρα $V_f(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -y + z = 0\}$. Άρα $(x, y, z) \in V_f(1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 1, 1)$. Επομένως

$$V_f(1) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle .$$

Επειδή τα $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα , αυτά είναι βάση του $V_f(1)$

(ii) $V_f(-1) : f(x, y, z) = -1 \cdot (x, y, z) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 2z &= 0 \\ -2y + 4z &= 0 \\ -2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή αν και μόνο αν $-y+2z = 0$ και $x-y+z = 0$. Άρα $V_f(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -y+2z = 0, x-y+z = 0\}$. Άρα $(x, y, z) \in V_f(-1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 2x, x) = x(1, 2, 1)$. Επομένως

$$V_f(-1) = \langle (1, 2, 2) \rangle .$$

Επειδή τα $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$ Άρα μια βάση του $V_f(1)$ είναι η $\{(1, 2, 2)\}$

(2)Παράδειγμα : Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (0, 0, x + y)$
Ακριβώς όπως πριν , αν $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$ όπου $\hat{e}$ η συνήθεις βάση του $\mathbb{R}^2$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Έχουμε

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3$$

Άρα $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.Άρα η ιδιοτιμή είναι $\boxed{\lambda = 0}$

Υπολογισμός Ιδιοχώρου :

- $V_f(0) : f(x, y, z) = 0 \cdot (x, y, z) \Leftrightarrow$

$$0 = 0$$
$$0 = 0$$
$$x + y = 0$$

δηλαδή αν και μόνο αν $x + y = 0$. Άρα $V_f(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$. Άρα $(x, y, z) \in V_f(0) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -x, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1)$. Επομένως

$$V_f(0) = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle .$$

Επειδή τα $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα , αυτά είναι βάση του $V_f(0)$

(3)Παράδειγμα : Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των γραμμικών απεικονίσεων και οι διαστάσεις των ιδιοχώρων .

(i) $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $g(\phi(x)) = \phi(1)x$

(ii) $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $h(\phi(x)) = \phi'(x)$

Εδώ συμβολίζουμε $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x] | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
Λύση για το (i).
1ος τρόπος Έστω $\phi(x) = ax^2 + bx + c$. Τότε $g(\phi(x)) = \lambda\phi(x) \Leftrightarrow \phi(1)x = \lambda\phi(x) \Leftrightarrow$ $(a + b + c)x = \lambda(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 & = \lambda a \\ a + b + c & = \lambda b \\ 0 & = \lambda c \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda a + 0b + 0c & = 0 \\ a + (1 - \lambda)b + c & = 0 \\ 0a + 0b - \lambda c & = 0 \end{matrix}$ Το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους ως προς a, b, c έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν
$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda)(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

Υπολογισμός Ιδιοχώρου $V_f(0)$:

Για $\lambda = 0$ το παραπάνω σύστημα γίνεται $\begin{array}{ll} 0a + 0b + 0c & = 0 \\ a + (1-0)b + c & = 0 \\ 0a + 0b - 0c & = 0 \end{array}$.

Άρα $V_g(0) = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x] | a + b + c = 0\}$.Μια βάση του του $V_g(0)$ είναι το σύνολο $\{x^2 - x, x^2 + x - 2\}$ (γιατί ;;).Άρα $dimV_g(0) = 2$ (όμοια βρίσκουμε $dimV_g(1) = 1$ και αφήνεται σαν άσκηση)

2ος τρόπος με την Πρόταση . Μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι η $\hat{a} = \{1, x, x^2\}$. Ο αντίστοιχος πίνακας της g είναι : (Θυμηθείτε $g(\phi(x)) = \phi(1)x$)

$$g(1) = 1 \cdot x = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$g(x) = 1 \cdot x = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$g(x^2) = 1^2 \cdot x = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Άρα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Έχουμε

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)$$

Άρα $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως με το 1ο τρόπο

Λύση για το (ii)

1ος τρόπος

Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ $\hat{a} = \{1, x, x^2\}$. και υπολογίζουμε το πίνακα $A - (h : \hat{a}, \hat{a})$ έχουμε : (Θυμηθείτε $h(\phi(x)) = \phi'(x)$)

$$h(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$h(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$h(x^2) = 2 \cdot x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Άρα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ξέρουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της $h \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων για $\lambda = 0$:

Έστω $\phi(x) = ax^2 + bx + c$. Τότε $g(\phi(x)) = 0\phi(x) \Leftrightarrow \phi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow 2a = 0, b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Άρα το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στο $\lambda = 0$, είναι:

$$c \in \mathbb{R}_2[x]$$

δηλαδή τα μη μηδενικά σταθερά πολυώνυμα .
2ος τρόπος Έστω $\phi(x) = ax^2 + bx + c$. Τότε $g(\phi(x)) = \lambda\phi(x) \Leftrightarrow \phi'(x) = \lambda\phi(x) \Leftrightarrow$
$2ax + b = \lambda(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \lambda a + 0b + 0c & = 0 \\ 2a - \lambda b + 0c & = 0 \\ 0a + 1b - \lambda c & = 0 \end{array}$ Το παραπάνω ομογενές σύστημα με αγνώστους ως προς a, b, c έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν
$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda)(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Άρα η h έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 0$. Στη συνέχεια για να βρούμε ιδιοδιανύσματα εργαζόμαστε όπως με το 1ο τρόπο.

Ιδιοτιμές -Ιδιοδιανύσματα Πινάκων

(2)Παρατήρηση - Κίνητρο :Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \to \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ η γραμμική απεικόνιση με $\gamma_A(X) = A \cdot X$, όπου $X \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$,τότε παρατηρούμε ότι λ ιδιοτιμή της $\gamma_A \Leftrightarrow$ υπάρχει $X \in: \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq \mathbf{0}_{\nu\times\mathbf{1}} : \gamma_A(X) = \lambda \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X = \lambda \cdot X$

Ορισμός 2.0.6. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ $X \neq \mathbf{0}_{\nu\times\mathbf{1}}$ τέτοια ώστε $\boxed{A \cdot X = \lambda \cdot X}$, θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A και το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ*

Παρατήρηση : Έστω $\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \to \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ η γραμμική απεικόνιση με $\gamma_A(X) = A \cdot X$. Τότε το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν είναι ιδιοτιμή του γ_A. Όμοια για τα ιδιοδιανύσματα .

Πρόταση 2.0.7. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$,.Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(1) *Η λ είναι ιδιοτιμή του A.*

(2) $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ $X \neq \mathbf{0}_{\nu\times\mathbf{1}}$, $A \cdot X = \lambda \cdot X$

(3) $\det(A - \lambda I_\nu) = \{0\}$

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2) Άμεσο.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Έχουμε $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ $X \neq \mathbf{0}_{\nu\times\mathbf{1}}$, $A \cdot X = \lambda \cdot X$ Άρα

$$(A - \lambda I_\nu) \cdot X = \mathbf{0}_{\nu\times\nu}.$$

Το τετραγωνικό , γραμμικό , ομογενές σύστημα της προηγούμενης εξίσωσης έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν : $\det(A-\lambda I_\nu)=\{0\}$

Ορισμός 2.0.8. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ μια ιδιοτιμή του A. Θέτουμε*

$$V_A(\lambda)=\{X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} | A\cdot X=\lambda\cdot X\}$$

που ονομάζεται ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στο λ

Παρατήρηση :$V_A(\lambda)=\{X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} | X$ ιδιοδιάνυσμα του A $\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ .\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

Παράδειγμα (1): Έστω $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5\\ 1 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -5 & 1 & 1\\ -5 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Είναι το $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του A;Είναι το 6 ιδιοτιμή του A;

Λύση Ελέγχουμε αν ισχύει ο ορισμός που δώσαμε .Έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5\\ 1 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -5 & 1 & 1\\ -5 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=$ $-2\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. Επειδή $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, έχουμε ότι το $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A (που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2) Για το επόμενο ερώτημα ελέγχουμε αν ισχύει το (3) της προηγούμενης πρότασης . Έχουμε $\det(A-6I_4)=det\begin{pmatrix} 1-6 & 1 & 1 & -5\\ 1 & 1-6 & -5 & 1\\ 1 & -5 & 1-6 & 1\\ -5 & 1 & 1 & 1-6\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -5 & -5 & 1\\ 1 & -5 & -5 & 1\\ -5 & 1 & 1 & -5\end{pmatrix}=0$ (Ξέρουμε ότι αν στην ορίζουσα πίνακα έχουμε δύο ίσες γραμμές είναι ίση με μηδέν). Άρα 6 ιδιοτιμή

Παράδειγμα (2): Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A όταν

(i) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

(ii) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$

Λύση για το (i) Έστω $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ Ελέγχουμε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\det(A-\lambda I_2)=0$.Έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)-(-2)=\lambda^2+1\neq 0 \Rightarrow$ Δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ που να είναι ιδιοτιμή του A. Λύση για το (ii) Έστω $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ Ελέγχουμε αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{C}$ με $\det(A-\lambda I_2)=0$.Έχουμε από πριν $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2+1$. Άρα $\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \lambda=i$ ή $\lambda=-i$.

Τα ιδιοδιανύσματα για $\lambda=i$:

Το σύστημα $(A-iI_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}_{2\times1}$ είναι το

$$\begin{array}{rrl} (1-i)x & -y & =0 \\ 2x & +(-1-i)y & =0 \end{array} \Rightarrow (1-i)x-y=0 \Rightarrow$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι :$\begin{pmatrix} x \\ (1-i)x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$

Τα ιδιοδιανύσματα για $\lambda=-i$:

Το σύστημα $(A+iI_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}_{2\times1}$ είναι το

$$\begin{array}{rrl} (1+i)x & -y & =0 \\ 2x & +(-1+i)y & =0 \end{array} \Rightarrow (1+i)x-y=0 \Rightarrow$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι :$\begin{pmatrix} x \\ (1+i)x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$

Παράδειγμα (3): Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$

Ιδιοτιμές:

$\lambda\in R$, $\det(A-\lambda I_3)=0$. Έχουμε $\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=-(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ Άρα οι ιδοτιμές είναι $\boxed{\lambda_1=2}$,$\boxed{\lambda_2=3}$

Τα ιδιοδιανύσματα για $\lambda_1=2$:

Το σύστημα $(A+2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3\times 1}$ είναι το

$$\begin{array}{llll} 0x & +y & +z & =0 \\ 0x & -y & -z & =0 \\ 0x & +2y & +2z & =0 \end{array} \Leftrightarrow y=z=0 \Rightarrow$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι : $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Έτσι $V_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} | x \in \mathbb{R} \right\}$

Μια βάση είναι το μονοσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Τα ιδιοδιανύσματα για $\lambda_2 = 3$:

Το σύστημα $(A+3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3\times 1}$ είναι το

$$\begin{array}{llll} -x & +y & +0 & =0 \\ 0x & -2y & -z & =0 \\ 0x & +2y & +z & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} -x & +y & =0 \\ 2y & +z & =0 \end{array}$$

Άρα $V_A(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} | x \in \mathbb{R} \right\}$. Μια βάση είναι το μονοσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Πρόταση 2.0.9. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X, τότε το $\phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(A)$ και το X είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα*

Παράδειγμα : Έστω $\phi(x) = x^3 + 5$, αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A , τότε το $2^3 + 5$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(A) = A^3 + 5I_\nu$

Απόδειξη Πρότασης Έστω $AX = \lambda X$, $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ $X \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{F}$ παρατηρούμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n $A^n X = \lambda^n X$. Πράγματι για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή ότι $A^n X = \lambda^n X$. Τότε $A^{n+1}X = A^n AX = \lambda A^n X = \lambda^{n+1}X$. Άρα επαγωγικά ισχύει για κάθε $n \in N$. Έστω $\phi(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{F}$. Τότε

$$\phi(A)X = (a_m A^m + ... + a_1 A + a_0 I_\nu)X = a_m A^m X + ... + a_1 AX + a_0 I_\nu X = a_m \lambda^m X + ... + a_1 \lambda X + a_0 X$$

Επομένως

$$(*). \qquad \phi(A)X = (a_m \lambda^m + ... + a_1 \lambda + a_0)X = \phi(\lambda)X$$

Επειδή , ως ιδιοδιάνυσμα, $X \neq 0$ λόγω της (*) έπεται το ζητούμενο □

Είδαμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$, $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε λ ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I_\nu)=0$

2.1 Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο Πίνακα

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\chi_A(x) = det(A - xI_\nu)$$

Παρατήρηση : Το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αν και μόνο αν

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I_\nu) = 0$$

, δηλαδή λ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$.

Παράδειγμα (1) : Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $\chi_A(x) = det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} =$ $(2-x)(1-x)-3 = x^2-3x-1$. Γενικά αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ τότε $\chi_A(x) = x^2-(a+d)x+ad-bc$ και αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα (2) :Αν $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τότε $\chi_A(x) = det(A - xI_3) =$

$$\det\begin{pmatrix} -1-x & -3 & 0 \\ 2 & -2-x & 1 \\ -4 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (-1-x)\begin{vmatrix} -2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$(-1-x)(-2-x)(2-x) + 3(4-2x) - 3(-4) = (1+x)(2+x)(2-x) + 12 - 6x + 12 =$ $x^3 - x^2 - 2x + 36$.

2.1α′ Ιδιότητες του $\chi_A(x)$

Υπενθύμιση Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_{nu}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & & a_{\nu\nu}-x \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες :

(i) Αν ο A είναι ανω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός δηλαδή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\chi_A(x) = (a_{11} - x) \dots (a_{\nu\nu} - x)$$

(ii)

$$\chi_{A^t}(x) = \chi_A(x),$$

όπου A^t ο ανάστροφος του A

(iii) Έστω $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu_1 \times \nu_2}, D \in \mathbb{F}^{\nu_2 \times \nu_2}, C \in \mathbb{F}^{\nu_1 \times \nu_2}$, τότε

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_D(x)$$

Παράδειγμα (όμοιο με την άσκηση 2.16) : Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ Να υπολογιστεί το $\chi_A(x)$.

Λύση . Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Τότε $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.Από το (iii) των ιδιοτήτων

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_D(x)$$

Έχουμε: $\chi_B(x) = \det(B - xI_2) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

$\chi_D(x) = \det(D - xI_2) = (2-x)(3-x)$. Επειδή ο D είναι κάτω τριγωνικός (ιδιότητα) (i),άρα

$$\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2.$$

Απόδειξη των ιδιοτήτων

(i) Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{\nu\nu} \end{pmatrix}$ άνω τριγωνικός , τότε $\chi_A(x) = \det(A -$

$$xI_\nu) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & & & * \\ & a_{22}-x & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{\nu\nu}-x \end{pmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x)...(a_{\nu\nu}-x), \text{ αφού}$$

$A - xI_\nu$ άνω τριγωνικός (εφαρμόσαμε ιδιότητα ορίζουσας για τριγωνικούς πίνακες ,από Γραμμική Ι)
(ii) Υπενθυμίζουμε από Γραμμική Ι :αν $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε $\det B = \det B^t$, καθως $(\lambda B + \mu C)^t = \lambda B^t + \mu C^t$
Έτσι $\chi_A(x) = \det(A - xI_\nu) = \det(A - xI_\nu)^t = \det(A^t - xI_\nu^t) = \det(A^t - xI_\nu)\chi_A^t(x)$
(iii)Υπενθύμιση από Γραμμική Ι :Έστω A, B, C, D όπως στην ιδιότητα (iii).Τότε :$\det A = \det B \cdot \det D$. Απόδειξη της υπενθύμισης : Θα δείξουμε αρχικά το ζητούμενο στην ειδική περίπτωση όπου $B = I_{\nu_1}$ ή $D = I_{\nu_2}$. Έστω $B = I_{\nu_1}$ θα δείξουμε ότι $\det A = \det\begin{pmatrix} I_{\nu_1} & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \det D$. Θα κάνουμε επαγωγή ως προς ν_1. Για $\nu_1 = 1$, $\det A = \det\begin{pmatrix} \{1\} & C \\ \mathbf{0}_{\nu_2\times 1} & D \end{pmatrix} = \det D$. (κάναμε ανάπτυγμα Laplace ως προς τη πρώτη στήλη)
Έστω ότι ισχύει για $\nu_1 - 1$ στη θέση του ν_1 , $\nu_1 \geq 2$. τότε $\det A = \det\begin{pmatrix} I_{\nu_1} & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_{\nu_1-1} & C^* \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ (πάλι κάναμε ανάπτυγμα Laplace ως προς τη πρώτη στήλη) όπου C^* έχει ληφθεί από το C με διαγραφή της πρώτης γραμμής του . Η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι $\det\begin{pmatrix} I_{\nu_1-1} & C^* \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \det D$. Όμοια αποδεικνύεται η άλλη περίπτωση $(D = I_{\nu_2}.)$ Θα δείξουμε τώρα την γενική περίπτωση της υπενθύμισης . Παρατηρούμε ότι
$A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\nu_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I_{\nu_2} \end{pmatrix}$ άρα
$\det A = \det\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_{\nu_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I_{\nu_2} \end{pmatrix} = \det D \cdot \det B$ από την ειδική περίπτωση που αποδείξαμε προηγουμένως.
Απόδειξη του (iii) συνέχεια :
με βάση την υπενθύμιση έχουμε

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} B - xI_{\nu_1} & C \\ 0 & D - xI_{\nu_2} \end{pmatrix} = \det(B - xI_{\nu_1}) \cdot \det(D - xI_{\nu_2}) = \chi_B(x)\chi_D(x).$$

Άλλες ιδιότητες : Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

(i) ο βαθμός του $\chi_A(x)$ είναι ν και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι το $(-1)^\nu$

(ii) ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με $\det A$, δηλαδή $\chi_A(0) = \det A$

(iii) ο συντελεστής του $x^{\nu-1}$ είναι ίσος με $(-1)^{\nu-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{\nu\nu})$, $A = (a_{ij})$.

Πόρισμα: ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\chi_A(0) \neq 0$
Παραδείγματα:

(i) Έστω $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. Τότε $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} a-x & c \\ b & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(d-x) - cb = x^2 - (a+d)x + ad - bc$. Παρατηρούμε ότι πράγματι $\chi_A(0) = ad - bc = \det A$

(ii) Έστω $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ με $\chi_A(x) = -x^5 - 6x^4 + 4x - 3$. Έχουμε $\det A = -3$ ιδιότητα (ii). Επίσης, αν $A = (a_{i,j})$
,τότε $-6 = (-1)^{5-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{55}) \Rightarrow a_{11} + a_{22} + ... + a_{55} = -6$ (ιδιότητα (iii))

Απόδειξη των ιδιοτήτων
(ii) $\chi_A(x) = \det(A - xI_\nu)$, θέτουμε όπου $x = 0$ και παίρνουμε $\chi_A(0) = \det A$
(i) και (iii)) Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής **λήμμα** :

$$\chi_A(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)...(a_{\nu\nu} - x) + \beta(x)$$

όπου $\deg \beta(x) \leq \nu - 2$
Από το λήμμα είναι άμεσο ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με $(-1)^\nu$ καθώς και ότι ο συντελεστής του x^{n-1} είναι ίσος με το συντελεστή του x^{n-1} στο $(a_{11} - x)(a_{22} - x)...(a_{\nu\nu} - x)$, παρατηρούμε ότι ο συντελεστής αυτός είναι ίσος με $(-1)^\nu(a_{11} + ... + a_{\nu\nu})$.
Μένει ποιπόν η απόδειξη του λήμματος :
Παρατήρηση Έστω $B = (b_{ij})$ ένας $\nu \times \nu$ πίνακας τέτοιος ώστε κάθε στοιχείο είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1 . Τότε $\deg(\det B) \leq \nu$

Απόδειξη Παρατήρησης: Με επαγωγή στο ν. Για $\nu = 1$, προφανώς ισχύει, έστω ότι ισχύει όταν ο B έχει μέγεθος $\nu - 1, \nu \geq 2$ Έστω B_{ij} ο πίνακας που προκύπτει από τον B αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη του B.Κάνοντας ανάπτυγμα Laplace ως προς τη πρώτη γραμμη του B παίρνουμε

$$(*) \qquad \det B = b_{11} \det B_{11} - b_{12} \det B_{12} + ... + (-1)^{\nu+1} b_{1\nu} B_{1\nu}.$$

Τώρα κάθε B_{ij} είναι ένας $(\nu - 1)(\nu - 1)$ πίνακας. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\deg(\det B_{ij}) \leq \nu - 1$.Τότε από την $(*)$ έχουμε $\deg(\det B_{ij}) \leq 1 + (\nu - 1) = \nu$.
Απόδειξη του λήμματος : Με επαγωγή ως προς ν :
Για $\nu = 2$ ισχύει αφού $\det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(b-x) \underbrace{-bc}_{\beta(x)}$.Υποθέτουμε ότι ισχύει το λήμμα για $\nu - 1$ στη θέση του ν. Έστω $B = A - xI_\nu$.

Έχουμε $\chi_A(x) = \det B =$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & & a_{\nu\nu}-x \end{pmatrix} = (a_{11}-x) \det \begin{pmatrix} a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \cdots & a_{\nu\nu}-x \end{pmatrix} -$$

$a_{12} \det B_{12} + a_{13} \det B_{13} - ... + (-1)^{\nu+1} a_{1\nu} \det B_{1\nu} = (a_{11}-x)\chi_{A_{11}}(x) - a_{12} \det B_{12} + a_{13} \det B_{13} - ... + (-1)^{\nu+1} a_{1\nu} \det B_{1\nu}$

Κάναμε ανάπτυγμα Laplace ως προς τη πρώτη γραμμή , στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την επαγωγική μας υπόθεση οπότε

$= (a_{11}-x)\left((a_{22}-x) \cdot ... \cdot (a_{\nu\nu}-x) + \beta_1(x)\right) - a_{12} \det B_{12} + a_{13} \det B_{13} - ... + (-1)^{\nu+1} a_{1\nu} \det B_{1\nu}$
όπου $\deg \beta_1(x) \leq \nu-3$. Επομένως μένει να δείξουμε ότι για κάθε $i \geq 2$, $\deg \det B_{1i} \leq \nu-2$.

Παρατηρούμε ότι $B_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu}-x \end{pmatrix}$. Η πρώτη στήλη του B_{12} είναι σταθερά πολυώνυμα . Αναπτύσσοντας την $\det B_{12}$ ως προς τη στήλη αυτή και εφαρμόζοντας την Παρατήρηση , έχουμε $\deg \det B_{12} \leq \nu-2$. Όμοια τα B_{1i}, $i \geq 2$.

Άσκηση 2.11α)
Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\nu} : \forall j = 1, 2, ..., \nu$ ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} = 1$. Τότε υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$, $X \neq 0 : AX = X$.
Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι : $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοτιμή του A, θεωρούμε τον ανάστροφο $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{\nu 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix}$ αρκεί να δείξουμε ότι το $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοτιμή του ανάστροφου A^t, πράγματι παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{\nu 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} a_{i\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Υπενθύμιση: $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\exists X \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}, X \neq 0 : AX = \lambda X$

Άσκηση 2.15)
Έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v. τότε

(i) Τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(ii) Για κάθε $a, b \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$, το $au + bv$ <u>δεν</u> είναι ιδιοδιάνυσμα της f

Λύση (i). Έστω $a, b \in \mathbb{F}$ με $au+bv = \mathbf{0}_V$. Τότε $f(au+bv) = f(\mathbf{0}_V) \Rightarrow af(u)+bf(v) = \mathbf{0}_V$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι f γραμμική , επιπλέον επειδή u, v ιδιοδιανύσματα της f, η τελευταία σχέση γίνεται $\boxed{a\lambda u + b\mu v = \mathbf{0}_V.}$ Από την $au+bv = \mathbf{0}_V \Rightarrow a\lambda u+b\lambda v = \mathbf{0}_V$ και αφαιρώντας από την $a\lambda u + b\mu v = \mathbf{0}_V$ παίρνουμε $b(\mu - \lambda) = \mathbf{0}_V$. Επειδή $v \neq \mathbf{0}_V$ (ως ιδιοδιάνυσμα) από την τελευταία έπεται $b = 0$, άρα $au = \mathbf{0}_V$ και επειδή $u \neq \mathbf{0}_V$ (ως ιδιοδιάνυσμα) παίρνουμε $a = 0$, άρα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα .
Λύση (ii).Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{F}$ με $f(au + bv) = \xi(au + bv)$. Τότε

$$af(u) + bf(v) = \xi a\xi bv \Rightarrow$$

$$(*) \qquad a\lambda u + b\mu v = \xi au + \xi bv.$$

Από το ερώτημα (i) ξέρουμε πως τα u, v είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> , άρα από το (*) $a\lambda = \xi a$ και $b\mu = \xi b$. Από την υπόθεση , $a, b \neq 0$, άρα $\underline{\lambda = \xi \text{ και } \mu = \xi \Rightarrow} \lambda = \mu$. <u>Άτοπο.</u>

Άσκηση 2.18 α)

Έστω A αντιστρέψιμος . Το λ είναι ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^{-1}

Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$.
" $\Rightarrow$ " Έστω λ ιδοτιμή του A. Επειδή A αντιστρέψιμος έχουμε $\lambda \neq 0$, αφού $0 \neq \det A = \chi_A(0)$ (δηλαδή 0 όχι ρίζα του $\chi_A(x)$. Τώρα έστω $AX = \lambda X, X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq 0$. Τότε $A^{-1}(AX) = A^{-1}\lambda X \Rightarrow X = A^{-1}\lambda X \Rightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ αφού $\lambda \neq 0$ και επειδή $X \neq 0, X \in \mathbb{F}^{\nu-1} \Rightarrow$ το $\frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^{-1}
" $\Leftarrow$ " Από πριν το $\frac{1}{1/\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του $\left(A^{-1}\right)^{-1}$, δηλαδή το λ είναι ιδιοτιμή του A, δηλαδή το λ είναι ιδιοτιμή του A.

Άσκηση 2.29

Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο , τις ιδιοτιμές και μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
Λύση
$\chi_A(x) = \det(A - xI_4) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$ αναπτύσσοντας ως προς τη πρώτη στήλη παίρνουμε $\chi_A(x) = -x \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{pmatrix} = +(-x)(-x)\cdot$ $\det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} - (+1)\det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2$. Άρα $\chi_A(x) = (x^2 - 1)^2$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 1, \lambda = -1$

Βάσεις για $\lambda_1 = 2$:

$V_A(1) = \{X \in \mathbb{R}^{4\times 1} | (A - I_4)X = 0\}$. Έχουμε $(A + 1I_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{4\times 1}$ είναι το

$$\begin{array}{ccccc} -x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +x_4 & = 0 \\ 0x_1 & -x_2 & +x_3 & +0x_4 & = 0 \\ 0x_1 & +x_2 & -x_3 & +0x_4 & = 0 \\ x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$-x_1 + x_4 = 0$
$-x_2 + x_3 = 0$

Επομένως $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Έτσι $V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί αν

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

Άρα μια βάση του $V_A(1)$ είναι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Βάσεις για $\lambda_1 = -1$:
Ομοίως $V_A(-1) = \{X \in \mathbb{R}^{4\times 1} | (A + I_4)X = 0\}$. Έχουμε
$x_1 + x_4 = 0$
$x_2 + x_3 = 0$

Επομένως $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Έτσι $V_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Άρα μια βάση του $V_A(-1)$ είναι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Άσκηση 2.34

Σωστό ή Λάθος -Ζητείται αιτιολόγηση

(i) λ ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}, \Rightarrow \lambda + \mu$ ιδιοτιμή του $A + B$

(ii) λ ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}, \Rightarrow \lambda \cdot \mu$ ιδιοτιμή του $A \cdot B$

(iii) Κάθε $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή

(iv) Κάθε $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή

(v) Αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A τότε το 11 είναι ιδιοτιμή του $2A^2 + 3I_\nu$

(vi) Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $\chi_A(x) = (x^2-1)(x-5)$. Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του $\mathbb{R}^3$ με $f(1,0,0) = 3(1,0,0)$ και $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$

(vii) Αν το -1 είναι ιδιοτιμή του A τότε υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq 0, A^2X = X$.

(viii) Αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A^2 τότε το $\sqrt{2}$ είναι ιδιοτιμή του A

Λύση

(i)Λάθος

Αντιπαράδειγμα:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το 0 είναι ιδιοτιμή και του A και του B (οι A, B είναι τριγωνικοί και ένα διαγώνιο στοιχείο στο καθένα είναι το 0.) Όμως το $0+0=0$ δεν είναι ιδιοτιμή του $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii)Λάθος

Αντιπαράδειγμα:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το 1 είναι ιδιοτιμή και του A και του B Όμως το $1 \cdot 1 = 1$ δεν είναι ιδιοτιμή του $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iii)Λάθος

Αντιπαράδειγμα:$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(x) = x^2 + 1$, που δεν έχει πραγματική ρίζα.

(iv)Σωστό
έχουμε $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $\deg \chi_A(x) = 3$ περιττός .Άρα το $\chi_A(x)$ έχει πραγματική ρίζα.
(v)Σωστό

Υπενθύμιση : Έστω $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και λ ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε το $\phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(x)$. Άρα εδώ αν $\phi(x) = 2x^2 + 3$ το $\phi(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 = 11$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(A) = 2A^2 + 3I_\nu$, αφού το 2 είναι ιδιοτιμή του A.
(vi)Λάθος

Υπενθύμιση : Έστω $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ γραμμική απεικόνιση , $\lambda \in \mathbb{F}$,$A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ όπου $\hat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V (με $dimV = \nu$).Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(1) Η λ είναι ιδιοτιμή της f.

(2) $\det(A - \lambda I_\nu) = \{0\}$

(3) Η λ είναι ιδιοτιμή του A.

Εδώ λόγω $f(1,0,0) = 3(1,0,0)$ και του (3) από την υπενθύμιση το 3 είναι ιδιοτιμή του A επομένως $\chi_A(3) = 0$, άτοπο αφού $\chi_A(x) = (x^2 - 1)(x - 5)$.//
(vii) Σωστό
-1 ιδιοτιμή του A άρα $(-1)^2$ ιδιοτιμή του $A^2 \Rightarrow \exists X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq 0 : A^2X = X$
Σωστό: -1 ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \exists X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq 0 : AX = -X \Rightarrow A^2X = A(-X) \Rightarrow A^2X = -AX \Rightarrow A^2X = -(-X) \Rightarrow A^2X = X$.
(viii)Λάθος
Αντιπαράδειγμα:$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Στη συνέχεια θα δούμε τη σχέση που έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενος πίνακα με το ίχνος και την ορίζουσα του.

2.2 Ίχνος Πίνακα

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{nu-1} + ... + a_1x + a_0$. Τότε $a_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}(a_{11} + ... + a_{\nu\nu})$

Ορισμός 2.2.1. *Το ίχνος του A είναι $Tr(A) = a_{11} + a_{22}... + a_{\nu\nu}$ (δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του)*

π.χ Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $Tr(A) = 1 + 4 = 5$.
Ξέρουμε ότι ο συντελεστής του $x^{\nu-1}$ στο $\chi_A(x)$ είναι $(-1)^{\nu-1}Tr(A)$.
Υπενθύμιση από Γραμμική Άλγεβρα Ι:Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $c \in \mathbb{F}$ τότε

(1) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

(2) $Tr(cA) = cTr(A)$

(3) $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$

Παρατήρηση :

- (1),(2)$\Rightarrow Tr : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \to \mathbb{F}$ είναι γραμμική απεικόνιση

- (1),(2),(3)$\Rightarrow Tr(AB - BA) = 0$.

Απόδειξη ιδιοτήτων: Τα (1),(2) προκύπτουν άμεσα , για το (3) παρατηρήστε ότι το στοιχείο του AB στην θέση (i,i) είναι $\sum_j a_{ij}b_{ji}$. Επομένως $Tr(AB) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij}b_{ji}\right) = Tr(BA)$

2.3 Ίχνος ,Ορίζουσα και ιδιοτιμές

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{nu-1} + ... + a_1x + a_0$. Θεωρώντας $\chi_A(x) \in \mathbb{C}[X]$, έχουμε $\chi_A(x) = (-1)^\nu(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_\nu)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας).Θα λέμε ότι $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ είναι ιδιοτιμές του A στο $\mathbb{C}$. Ο συντελεστής του $x^{\nu-1}$ στο $\chi_A(x)$ είναι :$(-1)^{\nu-1}Tr(A) = (-1)^\nu(-\lambda_1 - \lambda_2 - ... - \lambda_\nu)$ όπου το αριστερό μέλος το έχουμε υπολογίσει από πριν και το δεξί μέλος κάνοντας πράξεις στο •χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = (-1)^\nu(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_\nu)$. Άρα $\boxed{Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\nu}$.Επίσης παλιότερα είδαμε ότι $\chi_A(0) = \det(A)$ και από το $\chi_A(x) = (-1)^\nu(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_\nu)$, υπολογίζουμε $\chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2... \cdot \lambda_\nu$. Άρα $\boxed{\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2... \cdot \lambda_\nu}$.
Συνοψίζοντας τα παραπάνω δείξαμε

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$ είναι ιδιοτιμές του A στο $\mathbb{C}$.Τότε*

(1) $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\nu$

(2) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2... \cdot \lambda_\nu$

(1) Παράδειγμα / Άσκηση 2.19 :Έστω $A \in \mathbb{C}^{4\times4} : \chi_A(x) \in \mathbb{R}[x], \det A = -13, Tr(A) = 4$ και μια ιδιοτιμή του A είναι $2 - 3i$. Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του .
Λύση Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του A. Ξέρουμε (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) , ότι $\lambda_1 = 2 - 3i$. Επειδή το $\lambda_1 = 2 - 3i$ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$ και $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ έπεται ότι το $\lambda_2 = 2 + 3i$ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$. Από την προηγούμενη πρόταση :
$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \Leftrightarrow -13 = 13\lambda_3 \cdot \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$ και $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \Leftrightarrow 4 = 4 + \lambda_3 + \lambda_4 \Leftrightarrow \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Επομένως λύνοντας το σύστημα

$$\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

έχουμε ότι $\lambda_3 = 1$ και $\lambda_4 = -1$. (ή $\lambda_3 = -1$ και $\lambda_4 = 1$) άρα οι ιδιοτιμές είναι :

$$2 - 3i, 2 + 3i, 1, -1.$$

(2) Παράδειγμα / Άσκηση 2.4 : Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \chi_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

(α) Είναι ο A αντιστρέψιμος ;

(β) Είναι ο $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος ;

(γ) Υπολογίστε την ορίζουσα του $A^2 - 2A - 15I_3$.

(δ) Να βρεθεί το $\chi_{A^2}(x)$.

(ε) Αληθεύει ότι υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $AB - BA = A^k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k ;

Άπαντήσεις :
(α) A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq 0$. Άρα A όχι αντιστρέψιμος //

(β)1ος τρόπος Έχουμε $\det(A - 3I_3)\ neq 0$ αφού το 3 όχι ιδιοτιμή του A, άρα $A - 3I_3$ αντιστρέψιμος . Όμοια $\det(A - 4I_3)\ neq 0$ αφού το 4 όχι ιδιοτιμή του A, άρα $A - 4I_3$ αντιστρέψιμος , συνεπώς $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος
2ος τρόπος $\det(A - 3I_3)(A - 4I_3) = \det(A - 3I_3)\det(A - 4I_3) = \chi_A(3)\chi_A(4) \neq 0$, άρα $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος

(γ)Έχουμε $A^2 - 5A - 15I_3 = (A - 5I_3)(A + 3I_3)$. Άρα $\det(A^2 - 5A - 15I_3) = \det(A - 5I_3)\det(A + 3I_3) = \chi_A(5)\chi_A(-3) = -5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = -3600$
(Παρατηρήστε ότι $\chi_A(x) = -x(x - 1)(x - 2)$)

(δ) Οι ιδιοτιμές του A είναι $0, 1, 2$. Άρα καθένας από τους $0^2, 1^2, 2^2$ είναι ιδιοτιμή του A^2 (ξαναθυμίζουμε ότι αν $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και λ ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε το $\phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(x)$.) Συνεπώς καθένας από τους $0, 1, 4$ είναι ιδιοτιμή του A^2. Επειδή ο A^2 είναι 3×3, αυτές είναι όλες οι ιδιοτιμές του $A^2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Άρα

$$\chi_{A^2}(x) = -(x - 0)(x - 1)(x - 4).$$

(ε) Αν υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $AB - BA = A^k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k ,τότε $Tr(AB - BA) = Tr(A^k) \Rightarrow 0 = Tr(A^k)$. Όπως στο (δ) επειδή οι ιδιοτιμές του A στο $\mathbb{C}$ είναι $0, 1, 2$ οι ιδιοτιμές του A^k θα είναι $0^k, 1^k, 2^k$. Άρα

$$Tr(A^k) = 0 + 1 + 2^k \Rightarrow 0 = 1 + 2^k$$

άτοπο, άρα δεν υπάρχει τέτοιος B.

2.4 Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης .

Υπενθίμιση από Γραμμική Ι (Όμοιοι Πίνακες)

Ορισμός 2.4.1. *:Οι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ λέγονται όμοιοι στο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος $P\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $B = P^{-1}AP$.*

Ξέρουμε ότι οι $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ και διατεταγμένες βάσεις $\hat{a}, \hat{b}$ τοψ V τέτοιοι ώστε $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ και $B = (f : \hat{b}, \hat{b})$

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\nu}$,όμοιοι πίνακες .Τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x)$*

Απόδειξη :
Έστω $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος με $B = P^{-1}AP$. Υπολογίζουμε : $\chi_B(x) = \det(B - xI_{nu}) = \det(P^{-1}AP - xI_{nu}) = \det(P^{-1}(A - xI_{nu})P = \det P^{-1}\det(A - xI_{nu})\det P = (\det P^{-1})\det(A - xI_{nu})\det P = \det(A - xI_{nu}) = \chi_A(x)$
Από την προηγούμενη πρόταση άμεση συνέπεια είναι τα εξής:
Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ όμοιοι πίνακες τότε:

- λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του B
- $Tr(A) = Tr(B)$
- $\det A = \det B$

Παράδειγμα : οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι όμοιοι αφού έχουν διαφορετικά ίχνη .

Ορισμός 2.4.3. *Έστω γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ (όπως πάντα $dimV < \infty$)Έστω $\hat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x)$ είναι $\chi_f(x) = \chi_A(x)$*

Παρατήρηση : Ο ορισμός του $\chi_f(x)$ δεν εξαρτάται από τη διατεταγμένη βάση $\hat{a}$
(1)Παράδειγμα : Έστω γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση με $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$ έστω $\hat{e}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $\hat{e} = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Τότε $A = (f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, επομένως $\chi_f(x) = \chi_A(x) = x^2 - 4x + 3$.
(2)Παράδειγμα : Έστω $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ η γραμμική απεικόνιση με $f(\phi(x)) = \phi'(x) - 2\phi(x), \phi(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. θεωρούμετη διατεταγμένη βάση $\hat{a} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}^2[x]$.
$f(1) = -2 = -2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$
$f(x) = 1 - 2x = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 0 \cdot x^2$
$f(x^2) = 2x - 2x^2 = 0 \cdot 11 + 2 \cdot x + (-2) \cdot x^2$
Άρα $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Άρα αν $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$, $\chi_A(x) = -(x + 2)^3$ (ο A είναι άνω τριγωνικός) άρα $\chi_f(x) = -(x + 2)^3$

2.5 Διαγωνίσιμοι Πίνακες .

Ορισμός 2.5.1. *Ένας $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ λέγεται διαγωνίσιμος , αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος . Δηλαδή $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ διαγωνίσιμος αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα στον $\mathbb{F}^{\nu \times \nu}$*

(1)Παράδειγμα : Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ διαγωνίσιμος αφού για $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ έχουμε P αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.(μετά από πράξεις)
Σημείωση : Το πως βρήκαμε τον P θα το δούμε μετά την επόμενη πρόταση .
(2)Παράδειγμα : Ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ δεν είναι διαγωνίσιμος :
Έστω (για άτοπο) ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $P^{-1}AP = D$ διαγώνιος .Τότε A, D όμοιοι άρα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές . Οι ιδιοτιμές του A είναι το 1 (και το 1 πάλι) οι ιδιοτιμές του $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, δηλαδή $D = I_2$. Τότε : $P^{-1}AP = I_2 \Rightarrow AP = P \Rightarrow A = I_2$ άτοπο.
Υπενθύμιση από Γραμμική Ι : Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Με $B^{(k)} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ συμβολίζουμε την $k-$ στήλη του B .Π.χ αν $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, τότε $B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 1}$ και $B^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 1}$. Επίσης υπενθυμίζουμε από τη Γραμμική Αλγ. Ι ότι $(AB)^{(k)} = A \cdot B^{(k)}$.

Απόδειξη : Γράφουμε $B = \left(B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(\nu)}\right)$. Από τον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε : $AB = A \cdot \left(B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(\nu)}\right) = \left(AB^{(1)}, AB^{(2)}, ..., AB^{(\nu)}\right)$, οπότε $(AB)^{(k)} = A \cdot B^{(k)}$.

Πρόταση 2.5.2. *Ο $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A*

Απόδειξη :
" $\Rightarrow$ " έστω A διαγωνίσιμος . Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με $P^{-1}AP = D$ όπου $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_\nu \end{pmatrix}$ διαγώνιος άρα $AP = PD \Rightarrow (AP)^{(k)} = (PD)^k \Rightarrow A \cdot P^{(k)} = P \cdot D^k = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k \cdot P^{(k)}$. Δηλαδή $\boxed{A \cdot P^{(k)} = \lambda_k \cdot P^{(k)}}$ $\forall k = 1, 2, ..., \nu$. Επειδή $P^{(k)} \neq 0$ (αφού P αντιστρέψιμος), έχουμε $P^{(k)}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k. Το $\{P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(\nu)}\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ (αφού P αντιστρέψιμος).

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι υπάρχει βάση $\{X_1,...,X_\nu\}$ του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ τέτοια ώστε κάθε X_i είναι ιδιοδιάνυσμα του A $\forall i=1,2,...,\nu$. Θα δείξουμε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος . Υπάρχουν $\lambda_1,..,\lambda_\nu\in\mathbb{F}$ με $AX_i=\lambda_i X_i$.Έστω $P\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$,με $P^{(k)}=X_k$ $\forall k=1,2,...,\nu$. $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_\nu\end{pmatrix}$ διαγώνιος θα δείξουμε ότι P αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP=D$. Έχουμε

- P αντιστρέψιμος (αφού $P^{(1)},P^{(2)},...,P^{(\nu)}$ βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$)
- $P^{-1}AP=D\Leftrightarrow AP=PD\Leftrightarrow (AP)^{(k)}=(PD)^k\Rightarrow A\cdot P^{(k)}=P\cdot D^k\Leftrightarrow A\cdot X_k=\lambda_k P^{(k)}=\lambda_k\cdot X_k$.

που θέλαμε να δείξουμε .

Απόδειξη : Έστω $\lambda\in\mathbb{F}$ ιδιοτιμή του $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στο λ είναι $V_A(\lambda)=\{X\in\mathbb{F}^{\nu\times 1}|AX=\lambda X\}$.
Παράδειγμα : Εξετάστε αν ο $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Αν είναι διαγωνίσιμος , να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A , ένας αντιστρέψιμος $P\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$: $P^{-1}AP=D$ διαγώνιος , και ο D

(i) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

(ii) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

(iii) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

(iv) $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

(v) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

(vi) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$

(i) Με συνήθεις υπολογισμούς (που εδώ παραλείπονται) βρίσκουμε :
$\chi_A(x)=(x+1)(x-4)$, οι ιδιοτιμές είναι $-1,-4$,
$V_A(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$, $V_A(4)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$. Τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\in$

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$. Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (κατά την απόδειξη της πρότασης) έχουμε P αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $(= D)$ και άρα το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Σχόλιο : ο P δεν είναι μοναδίκός αφού ισχύει και για $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, όπου $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) Με συνήθεις πράξεις :

$\chi_A(x) = (x-1)^2$, μοναδική ιδιοτιμή το 1

$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Άρα κάθε δύο ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικά εξαρτημένα . Συνεπώς δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A. Από την πρόταση A όχι διαγωνίσιμος .

(iii) Με συνήθεις πράξεις :

$\chi_A(x) = -(x-2)^2(x-3)$, οι ιδιοτιμές είναι $2, 3$,

$V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Επειδή $dimV_A(2) = 1 = dimV_A(3)$ είναι σαφές $(*)$ ότι <u>δεν</u> υπάρχουν 3 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Άρα ο A <u>όχι</u> διαγωνίσιμος .

$(*)$:γιατί θα είχαμε ή 2 στοιχεία από το $V_A(2)$ ή 2 στοιχεία από το $V_A(3)$

(iv) Με συνήθεις πράξεις :

$\chi_A(x) = -(x+2)^2(x-4)$, οι ιδιοτιμές είναι $-2, 4$

$V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Επειδή $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$. Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έχουμε P αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $(= D)$ διαγώνιος , και άρα το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ είναι μια βάση του } \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

(v) Εδώ $\chi_A(x) = x^2+1$ και άρα ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ δεν έχει ιδιοτιμές . Άρα ο A όχι διαγωνίσιμος

(vi) (να συγκριθεί με το v) πάλι $\chi_A(x) = x^2+1$ οι ιδιοτιμές είναι $i, -i$,
$V_A(i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_A(-i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$.
Επειδή $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \neq 0$,
έχουμε μια βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\}$ του $\mathbb{C}^{2\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .
Αν $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, έχουμε P αντιστρέψιμος (αφού $\det P \neq 0$) και ξέρουμε $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.}$
Σχόλιο : από τα (v),(vi) βλέπουμε ότι ο μόνος τρόπος ο A να είναι διαγωνίσιμος , είναι ο P να έχει στοιχεία του $\mathbb{C}$.

Άσκηση 3.3 : Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγωνίσιμος.

(i) Για κάθε θετικό ακέραιο k ,A^k διαγωνίσιμος και γενικά για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x], \phi(A)$ διαγωνίσιμος.

(ii) Αν $A^k = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k , τότε $A = 0$.

(iii) Αν A αντιστρέψιμος τότε $\phi(A^{-1})$ διαγωνίσιμος για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

(iv) Αν $\chi_A(x) = (x-3)^{10}$, να βρεθεί ο A.

(v) Αν $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ με $A^kX = 0$ για κάποιο k, τότε $AX = 0$.

(vi) Έστω A αντιστρέψιμος και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Είναι δυνατό ο $A + A^{-1}$ να είναι όμοιος με τον $diag(1, 3, 3, ..., 3)$;

Λύση :
(i)Επειδή $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγωνίσιμος, υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος με

$$P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_\nu).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1, ..., \lambda_\nu$.
(i) Έχουμε $\left(P^{-1}AP\right)^k = D^k = diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_\nu^k)$ διαγώνιος . Θα δείξουμε ότι $\boxed{\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP}$

για κάθε $k \geq 1$. Με επαγωγή στο k :

- Για $k = 1$ είναι προφανές
- Έστω $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ για κάποιο $k \geq 1$ θα δείξουμε ότι

$$\left(P^{-1}AP\right)^{k+1} = P^{-1}A^{k+1}P.$$

Πράγματι $\left(P^{-1}AP\right)^{k+1} = \left(P^{-1}AP\right)^k \cdot \left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^k(PP^{-1})AP = P^{-1}A^kI_\nu AP = P^{-1}A^{k+1}P$. Δηλαδή $\left(P^{-1}AP\right)^k = D^k$ διαγώνιος , άρα A^k διαγωνίσιμος

Γενικά αν $\phi(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$, τότε
$P^{-1}\phi(A)P = P^{-1}(a_nA^n)P + ... + P^{-1}(a_1A)P + P^{-1}a_0I_\nu P =$
$= a_n\left(P^{-1}AP\right)^n + ... + a_1\left(P^{-1}AP\right) + a_0I_\nu = a_nD^n + ... + a_1D + a_0I_\nu =$
$= a_n \cdot diag(\lambda_1^n, ..., \lambda_\nu^n) + a_{n-1} \cdot diag(\lambda_1^{n-1}, ..., \lambda_\nu^{n-1}) + a_1 \cdot diag(\lambda_1, ..., \lambda_\nu) + a_0I_\nu = diag\left(\phi(\lambda_1), ..., \phi(\lambda_\nu)\right)$
που είναι διαγώνιος .Άρα $\phi(A)$ διαγωνίσιμος.
(ii) Έστω $A^k = 0$. Τότε $P^{-1}A^kP = 0$, δηλαδή (από πριν) $\left(P^{-1}AP\right)^k = 0 \Rightarrow D^k = 0 \Rightarrow$
$diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_\nu^k) = 0 \Rightarrow \lambda_i^k = 0\ \forall i \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_\nu = 0$. Δηλαδή $D = 0 \Rightarrow P^{-1}AP = 0 \Rightarrow$
$P\left(P^{-1}AP\right)P^{-1} = 0 \Rightarrow A = 0$
(iii) από το (i) αρκεί να δείξουμε ότι A^{-1} είναι διαγωνίσιμος. Επειδή A διαγωνίσιμος , D αντιστρέψιμος και $D^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_\nu^{-1})$ διαγώνιος.
Από $P^{-1}AP = D \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = D^{-1}$
(iv) Επειδή $\chi_A(x)(x-3)^{10}$, αν λ ιδιοτιμή του A τότε $\lambda = 3$. Επειδή A διαγωνίσιμος , A όμοιος με $diag(3, 3, , ..., 3) = 3 \cdot I_{10}$. Δηλαδή $P^{-1}AP = 3 \cdot I_{10} \Rightarrow$

$$A = P(3 \cdot I_{10})P^{-1} = 3 \cdot I_{10}.$$

(v)Έστω $A^kX = 0$, $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Όπως πριν έχουμε $A^k = PD^kP^{-1}$
$(P^{-1}AP = D\left(P^{-1}AP\right)^k = D^k \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1})$.
Άρα $PD^kP^{-1}X = 0 \Rightarrow D^k(P^{-1}X) = 0(*)$.
Έστω $P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\nu \end{pmatrix}$. Έχουμε $D^k = diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_\nu^k)$. Τότε $(*) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^k y_1 = 0 \\ \lambda_2^k y_2 = 0 \\ ... \\ \lambda_\nu^k y_\nu = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{ή } y_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 & \text{ή } y_2 = 0 \\ ... \\ \lambda_\nu = 0 & \text{ή } y_\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 y_1 = 0 \\ \lambda_2 y_2 = 0 \\ ... \\ \lambda_\nu y_\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D(P^{-1}X) = 0.$$

Άρα $P \cdot \left(D(P^{-1}X)\right) = 0 \Rightarrow (PDP^{-1})X = 0 \Rightarrow AX = 0$.

(v)Έχουμε από πριν $P^{-1}AP = D$ και $P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$. Άρα $P^{-1}(A + A^{-1})P = D + D^{-1}diag(\lambda_1^{-1} + \lambda_1, ..., \lambda_\nu^{-1} + \lambda_\nu)$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Δηλαδή οι ιδιοτιμές του $A^{-1} + A$ είναι οι $\lambda_1^{-1} + \lambda_1, ..., \lambda_\nu^{-1} + \lambda_\nu$). Ξέρουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές .Άρα αν $A^{-1} + A$ όμοιος με $diag(1, 3, 3, ..., 3)$ τότε και το 1 και το 3 είναι ιδιοτιμή του του $A^{-1} + A$ Άρα για κάποιο i έχουμε $\lambda_i^{-1} + \lambda_i = 1 \Leftrightarrow \lambda_i^2 - \lambda_i + 1 = 0$. Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικη ρίζα <u>άτοπο.</u> ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

2.6 Εφαρμογές διαγωνιοποίησης .

Εφαρμογές :

(i) Δυνάμεις πινάκων :
Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να βρεθεί ο A^k για κάθε θετικό ακέραιο k

(ii) Ρίζες πινάκων :
Έστω A όπως πριν . Να βρεθεί $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : B^3 = A$.

(iii) Αναδρομικές Ακολουθίες :

Έστω a_n η ακολουθία που ορίζεται από : $a_1 = 1, a_2 = 4, a_\nu = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Να υπολογιστεί ο όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n.

Λύσεις :

Υπενθύμιση :Έστω $A, P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με P αντιστρέψιμο . Τότε $\boxed{\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP}$ για κάθε k θετικό ακέραιο

(i) Με συνήθεις πράξεις βρίσκουμε τα εξής :

$\chi_A(x) = -(x+1)(x-1)(x-2)$, οι ιδιοτιμές είναι $-1, 1, 2$

- Βάση του $V_A(-1)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Βάση του $V_A(1)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Βάση του $V_A(2)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ παρατηρούμε $\det P = -1 \neq 0$. Άρα μια βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ είναι $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος . Επίσης P αντιστρέψιμος . Ξέρουμε $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (= D)$. Από την υπενθύμιση , $P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1} = ...$ και κάνουμε πράξεις

(ii) είδαμε πριν ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. όπου $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ θέτουμε $B = P \begin{pmatrix} (-1)^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1/3} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Από την υπενθύμιση $B^3 = P \begin{pmatrix} (-1)^{3/3} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{3/3} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{3/3} \end{pmatrix} P^{-1} =$

$= P \begin{pmatrix} (-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = A$.

(iii) Παρατηρούμε ότι το σύστημα :$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$ γράφεται $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A\left(A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}\right) = A^2 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = ... = A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Δηλαδή :

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε τον A^{n-2} όπως στο (i). Για τον $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, έχουμε

$\chi_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, οι ιδιοτιμές είναι $-1, 1, 2$

- $V_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ Επίσης P αντιστρέψιμος Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος . Επίσης P αντιστρέψιμος . Ξέρουμε $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (= D)$. Άρα ,
$A^{n-2} = P \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} & -3(-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} & 3(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{pmatrix}$.
Από $(**)$

$$a_n = \frac{1}{4}\left[\left((-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right) a_2 + \left(-3(-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right) a_1\right] = \frac{1}{4}\left((-1)^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-1}\right)$$

2.7 Διαστάσεις Ιδιόχωρων .

Κίνητρο: Σε όσα παραδείγματα είδαμε που ένας A δεν ήταν διαγωνίσιμος , A δεν είχε ¨αρκετά' γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα .Γιάυτό μελετάμε τις διαστάσεις των ιδιόχωρων
Υπενθύμιση από Γραμμική Άλγεβρα I :Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και U_1, U_2 υπόχωροι του V. Το άθροισμα των U_1, U_2 είναι :
$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \in V | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Τότε $U_1 + U_2 \leq V$ και $U_1 \leq U_1 + U_2$, $U_2 \leq U_1 + U_2$.
Ξέρουμε

$$dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2).$$

Παράδειγμα :
$V = \mathbb{R}^{3\times 1}$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in V | x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} \in V | y, z \in \mathbb{R} \right\}$. Εδώ
$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in V | y \in \mathbb{R} \right\}$, $dimU_1 = 2$, $dimU_2 = 2$, $dimU_1 \cap U_2 = 1$. Άρα $dim(U_1 + U_2) = 3$

ΕΙΚΟΝΑ
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu, \lambda.\mu\mathbb{F}}$ με $\lambda \neq \mu$. Έχουμε τους διανυσματικούς χώρους $V_A(\lambda), V_A(\mu)$ που είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{\nu\times 1}$

Πρόταση 2.7.1.

$$V_A(\lambda) \cap V_A(\mu) = \{\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{\nu\times 1}}\}$$

Πόρισμα 2.7.2. (i) *Αν* $X_1 \in V_A(\lambda)$ *και* $X_2 \in V_A(\mu)$ *και* $X_1 + X_2 = 0$*, τότε* $Q_1 = Q_2 = 0$.

(ii) *Επίσης , αν* $X_1, X_2 \neq 0$*, τότε* X_1, X_2 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Πόρισμα 2.7.3. $dim\,(V_A(\lambda) + V_A(\mu)) = dimV_A(\lambda) + dimV_A(\mu)$.

Απόδειξη Πρότασης :
Έστω $X \in V_A(\lambda) \cap V_A(\mu)$. Τότε $X \in V_A(\lambda)$ και $X \in V_A(\mu)$, δηλαδή
$AX = \lambda X$ και $AX = \mu X$. Άρα $\lambda X = \mu X \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\lambda \neq \mu} X = 0 \Rightarrow X = 0 (= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{\nu\times 1}})$

Απόδειξη Πορίσματος 2.0.18 :
(i)1ος τρόπος : $X_1 + X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2 \in V_A(\lambda) \cap V_A(\mu) = \{0\} \Rightarrow X_1 = X_2 = 0$
2ος τρόπος (χωρίς την πρόταση) : $X_1 + X_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 + X_2) = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow AX_1 + AX_2 = 0 \Rightarrow \lambda X_1 + \mu X_2 = 0$. Από $X_1 + X_2 = 0$ και $\lambda X_1 + \mu X_2 = 0$ παίρνουμε $\mu X_1 + \mu X_2 = \mu \cdot 0$ οπότε $\lambda X_1 - \mu X_1 = 0 \Rightarrow X_1 \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\lambda \neq \mu} = 0 \Rightarrow X_1 = 0$. Άρα και $Q_2 = 0$

(ii) Αν $aX_1 + bX_2 = 0$, τότε $aX_1 = bX_2 = 0$ (από πριν). Άρα $a = b = 0$, αφού $X_1, X_2 \neq 0$.

Λήμμα 2.7.4. *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *και* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *διακεκριμένες ιδιοτιμές του* A*. Τότε*

$$dim\,(V_A(\lambda_1 + ... + V_A(\lambda_k))\,.$$

Ειδικά , αν B_i *βάση του* $V_A(\lambda_i)$*, τότε* $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$ *είναι βάση του* $V_A(\lambda_1 + ... + V_A(\lambda_k)$.

Προσοχή :

- Αν $A = diag(2, 2, -3)$ διαγώνιος , τότε οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$. Οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι οι $2, -3$
- Μπορεί ο A να μην έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{F}$ (δηλ. $k = 0$)

Απόδειξη Λήμματος :
Έστω B_i βάση του $V_A(\lambda_i)$. Θα δείξουμε ότι $\cup_i B_i$ βάση του $V_A(\lambda_1 + ... + V_A(\lambda_k)$.

- Ότι το σύνολο $\cup_i B_i$ παράγει το $V_A(\lambda_1 + ... + V_A(\lambda_k)$ είναι σαφές (αφού το B_i παράγει το $V_A(\lambda_i)\forall i$)
- Το $\cup_i B_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (για να το δείξουμε θα εφαρμόσουμε το παρακάτω λήμμα).

Λήμμα 2.7.5. *Έστω* A, λ_i *όπως πριν . Αν* $X_i \in V_A(\lambda_i)$ *με* $X_1 + ... + X_k = 0$ *τότε* $X_i = 0 \forall i$

Πόρισμα 2.7.6. *Αν $X_i = 0$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ_i, τότε τα $X_1, ...X_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη Λήμματος :
Έχουμε $X_1 + ... + X_k = 0(*)$, $X_i \in V_A(\lambda_i)$ και λ_i ανα δύο διάφορα
Επαγωγή στο :k

- Για $k = 1$ ισχύει,
- έστω ότι αληθεύει για $k-1$ στη θέση του k ,$k \geq 2$
  Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ από αριστερά:
  $$\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_k X_k = 0(**).$$

Από την $(*)$ παίρνουμε $\lambda_k X_1 + ... + \lambda_k X_k = 0$ και αφαιρούμε από την $(**)$
οπότε $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)X_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)X_2 + ... + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)X_{k-1}}_{\lambda_i \neq \lambda_k \forall i=1,2...,k-1} = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = ... = X_{k-1} = 0$. Από $(*) \Rightarrow X_k = 0$
Απόδειξη Πρότασης (συνέχεια) :

Θα δείξουμε ότι το $\cup_i B_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο . Έστω $B_i = \{b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{r_1 i}\}$. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\cup_i B_i$:
$\underbrace{a_{11}b_{11} + ... + a_{r_1 1}b_{r_1 1}}_{\in V_A(\lambda_1)} + ... + \underbrace{a_{1k}b_{1k} + ... + a_{r_k 1}b_{r_k 1}}_{\in V_A(\lambda_k)} = 0$ όπου $a_{ij} \in \mathbb{F}$ Από το λήμμα παίρνουμε $\Rightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11} + ... + a_{r_1 1}b_{r_1 1} = 0 \\ ... \\ a_{1k}b_{1k} + ... + a_{r_k 1}b_{r_k 1} = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = ... = a_{r_1 1} = 0 & \text{αφού } B_1 \text{ βάση} \\ ... \\ a_{1k} = ... = a_{r_k 1} = 0 & \text{αφού } B_k \text{ βάση} \end{cases}$
Απόδειξη Πορίσματος :
Έστω X_i ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο λ_i και
$a_1 X_1 + ... + a_k X_k = 0, a_i \in \mathbb{F}$. Από το λήμμα :$\underbrace{a_1 X_1 = ... = a_k X_k}_{X_i \neq 0} = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_k = 0$

Βασικό Θεώρημα : Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) A διαγωνίσιμος

(ii) $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x - \lambda_1)^{\nu_1} ... (x - \lambda_k)^{\nu_k}$, $\nu_1 + ... + \nu_k = \nu$ και $dimV_A(\lambda_i) = \nu_i$

(iii) $\nu = dimV_A(\lambda_1) + ... + dimV_A(\lambda_k)$

(iv) Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ από ίδιοδιανύσματα του A.

Πόρισμα 2.7.7. *Αν ο $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές , τότε A διαγωνίσιμος*

Προσοχή (στο Πόρισμα!!) :<u>ΔΕΝ</u> ισχύει γενικά το αντίστροφο για παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές , αλλά είναι διαγωνίσιμος ως διαγώνιος

Υπενθύμιση από Γραμμική Αλγεβρα Ι :
<u>rank A</u> Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, με rank A είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A που είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

- Αν ο B προκύπτει από το A με στοιχειώδης πράξεις γραμμών ή /και στηλών , τότε rank A=rank B
- όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο rank
- Αν $A = diag(\lambda_1, ...\lambda_\nu)$, τότε $rankA = \#\{\lambda_i | \lambda_i \neq 0\} = \nu - \#\{\lambda_i | \lambda_i = 0\}$
- $dim\{X \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu} | AX = 0\} = \nu - rankA$.

Απόδειξη θεωρήματος :
$(i) \Rightarrow (ii)$: Έστω A διαγωνίσιμος . Άρα A όμοιος με διαγώνιο $D = diag(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{\nu_1}, ..., \underbrace{\lambda_k, ..., \lambda_k}_{\nu_k})$, όπου $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ανα δύο διάφορα .$\chi_A(x) = \chi_D(X) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)^{\nu_1} ... (x-\lambda_k)^{\nu_k}$
Από την υπενθύμιση έχουμε $dimV_A(\lambda_i) = dim\{(A - \lambda_i I_\nu)X = 0\} = \nu - rank(A - \lambda_i I_\nu) = \nu - rank(D - \lambda_i I_\nu) =$
$= \nu - (\nu - \#\{\text{διαγώνια στοιχεία του } D - \lambda_i I_\nu \text{ που είναι ίσα με } 0\ \}) = \nu_i$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: άμεσο :$\nu = \sum_i \nu_i \sum_i V_A(\lambda_i)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Από την υπόθεση και πρόταση : $\nu = dimV_A(\lambda_1) + ... + dimV_A(\lambda_k) = dim\,(V_A(\lambda_1) + ... + dimV_A(\lambda_k))$. Άρα $V_A(\lambda_1) + ... + V_A(\lambda_k) = \mathbb{F}^{\nu-1}$. Από το β′ μέρος της Πρότασης υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα. $(iv) \Rightarrow (i)$: Το ξέρουμε.

παραδείγματα :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Είδαμε σε παλιό παράδειγμα $\chi_A(x) = -x^2(x-3)$. Εδώ (με το συμβολισμό του θεωρήματος), $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \nu_1 = 2, \nu_2 = 1$. Εφαρμόζουμε το (iii) του Θεωρήματος : $dimV_A(0) = 3 - rank(A - 0 \cdot I_3) = 3 - rank = 3 - 1 = 2$. Επίσης , $dimV_A(3) = 3rank(A - 3I_3) = 3 - rank \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1 \to \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = 3 -$

$\underbrace{rank\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2 \to \sigma_2 - \sigma_3 =} = 3-2=1$. Άρα $dimV_A(0)+dimV_A(3)=2+1=3$. Άρα ο A διαγωνίσιμος.

- (=3.14) Να βρεθούν τα $a,b,c\in\mathbb{R}$: ο $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ να είναι διαγωνίσιμος Λύση :$\chi_A(x)-(x-3)^2(x+2), \lambda_1=3, \lambda_2=-2, \nu_1=2, \nu_2=1$.

$$dimV_A(3)=3-rank(A-3I_3)=3-rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & -5 \end{pmatrix}=\begin{cases} 3-1=2, & \text{αν } a=0 \\ 3-2, & \text{αν } a\neq 0. \end{cases}$$

$$dimV_A(-2)=3-rank\,(A-(-2I_3))=3-rank\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}=3-2=1.$$

Τελικά

$$dimV_A(3)+dimV_A(-2)=\begin{cases} 3, & \text{αν } a=0 \\ 2, & \text{αν } a\neq 0 \end{cases}$$

Από το (iii) του Θεωρήματος , A διαγωνίσιμος αν και μόνοα αν $a=0, b, c\in\mathbb{R}$

Ορισμός 2.7.8. *Έστω $\phi(x)\in\mathbb{F}[x], \phi(x)\neq 0$ και $\lambda\in F$ ρίζα του $\phi(x)$. Ξέρουμε $x-\lambda|\phi(x)$. στο $\mathbb{F}[x]$. Έστω $m(\lambda)$ ο θετικός ακέραιος : $(x-\lambda)^{m(\lambda)}|\phi(x)$ και $(x-\lambda)^{m(\lambda)+1}$ να μη διαιρεί το $\phi(x)$. Το $m(\lambda)$ λέγεται πολλαπλότητα της ρίζας λ στο $\phi(x)$.*

Παρατήρηση : λ απλή ρίζα $\Leftrightarrow m(\lambda)=1$.
Π.χ: $\phi(x)=(x-1)^3(x-4)^5$, $m(1)=3, m(4)=5$.

Ορισμός 2.7.9. *Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda\in\mathbb{F}$ ιδιοτιμή του A. Με $m(\lambda)$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα του λ στο $\chi_A(x)$.*

Θεώρημα 2.7.10. *Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και λ ιδιοτιμη του A με πολλαπλότητα $m(\lambda)$ τότε $dimV_A(\lambda)\leq m(\lambda)$.*

Απόδειξη Έστω $\hat{b}$ διατεταγμένη βάση $\{X_1,...,X_t\}$ του $V_A(\lambda)$. Θα δείξουμε ότι $t\leq m(\lambda)$. Από Γραμμική Άλγεβρα Ι υπάρχει βάση $\hat{a}=\{X_1,...,X_t,Y_{t+1},...Y_\nu\}$ του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\gamma_A:\mathbb{F}^{\nu\times 1}\to\mathbb{F}^{\nu\times 1}, \gamma_A(X)=A\cdot X, X\in\mathbb{F}^{\nu\times 1}$.

Ξέρουμε ότι $(\gamma_A:\hat{E},\hat{E})=A$, όπου $\hat{E}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

Ας υπολογίσουμε τον $(\gamma_A:\hat{a},\hat{a})$. Έχουμε $AX_i=\lambda_i X_i, \forall i=1,2,...,t$.

Άρα $(\gamma_A : \hat{a}, \hat{a}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_t & * \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right)$. Άρα ο A είναι όμοιος με τον $B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_t & * \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right)$. Άρα $\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{\lambda I_\nu}(x) \cdot \chi_C(x) = (-1)^t(x-\lambda)^t \chi_C(x)$. Άρα $t \leq m(\lambda)$ από ορισμό του $m(\lambda)$. Άρα $dimV_A(\lambda) \leq m(\lambda)$

Υπενθύμιση : Έστω $A_1 \in \mathbb{F}^{\nu_1 \times \nu_1}, A_2 \in \mathbb{F}^{\nu_2 \times \nu_2}$ και $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot A_1 & * \\ \hline \mathbf{0} & A_2 \end{array}\right) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}, \nu = \nu_1 + \nu_2$. Τότε $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) \cdot \chi_{A_2}(x)$.

Παραδείγματα :

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να εξετάσετε αν ο A είναι διαγωνίσιμος .

Λύση :
Με πράξεις : $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$. Ιδιοτιμές : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Με το συμβολισμό του Βασικού Θεωρήματος έχουμε $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $dimV_A(1) = 3 - rank(A - I_3) = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \nu_1 = 2$.
Άρα ο A όχι διαγωνίσιμος.(Τουλάχιστον ένας ιδιόχωρος δεν έχει σωστή διάσταση)

(ii) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$. Είναι ο A διαγωνίσιμος αν

(α) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;

(β) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$;

Λύση :
Με πράξεις $\chi_A(x) = -x(x^2+1)$

(α) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ τότε A όχι διαγωνίσιμος , αφού το $\chi_A(x)$ δεν είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$ (πρώτη συνθήκη στο (ii) του Βασικού Θεωρήματος)

(β) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ τότε οι ιδιοτιμές είναι $0, i, -i$. Δηλαδή σε έναν 3×3 πίνακα έχουμε 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές . Άρα $A \in C^{3\times 3}$ διαγωνίσιμος (από Πρόταση αρχικής Υπενθύμισης)

Ασκήσεις :

(i) (3.3) Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ άνω τριγωνικός της μορφής $A = \begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{pmatrix}$. Τότε να δείξετε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είναι διαγώνιος.
Λύση : $chi_A(x) = (-1)^\nu(x-\lambda)^\nu$ (A τριγωνικός). Από το Βασικό Θεώρημα : A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow \nu = dimV_A(\lambda)$. Αλλά $dimV_A(\lambda) = \nu rank(A - \lambda I_\nu) = \nu -$

$rank \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$. Άρα A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow rank \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} = 0$,
δηλαδή $A - \lambda I_\nu = 0 \Leftrightarrow A$ διαγώνιος

(ii) (3.15) Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$: η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ να είναι ίση με 3 .

Λύση :
Με το συμβολισμό του Βασικού Θεωρήματος , ρωτάμε για ποια $a \in \mathbb{R}$, $dim\,(V_A(\lambda_1) + ... + V_A(\lambda_k)) = 3$. Ξέρουμε ότι το $dim\,(V_A(\lambda_1) + ... + V_A(\lambda_k)) = dimV_A(\lambda_1) + ... + dimV_A(\lambda_k)$. Δηλαδή ρωτάμε για ποια a $dimV_A(\lambda_1) + ... + dimV_A(\lambda_k) = 3$, δηλαδή για ποια a ο $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ είναι διαγωνίσιμος . Με πράξεις : $\chi_A(x) = -x(x^2 - 2a)$.

- Αν $a < 0$, τότε το $\chi_A(x)$ δεν είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$, άρα ο A όχι διαγωνίσιμος
- Αν $a > 0$, τότε ο A διαγωνίσιμος γιατί έχει 3 διακεκριμένες τιμές , τις $0, \sqrt{2a}, -\sqrt{2a}$.
- Αν $a = 0$, τότε το $\chi_A(x) = -x^3$ και υπάρχει μοναδική ιδιοτιμή το 0.
  $dimV_A(0)3 - rankA = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 3$, άρα A όχι διαγωνίσιμος .Άρα πρέπει $a > 0$.
-

(iii) Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $AB = BA$. Δείξτε ότι αν A έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε B διαγωνίσιμος.

Λύση :
Έστω $\lambda_1, ..., \lambda_\nu$ οι ιδιοτιμές του A (από υπόθεση $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i, j$). Τότε $chi_A(x) = (-1)^{nu}(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - lambda_\nu)$. Αφού $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i, j$ έπεται $dimV_A(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$, όπου $m(\lambda_i) = 1$, δηλαδή $dimV_A(\lambda_i) = 1, \forall i$.
Άρα $V_A(\lambda_i) = \langle X_i \rangle, X_i \in \mathbb{F}^{\nu\times1}, X_i \neq 0$. Τώρα από $AB = BA$ έχουμε $ABX_i = BAX_i \Rightarrow A(BX_i) = B(\lambda_i X_i) = \lambda_i BX_i \Rightarrow BX_i \in V_A(\lambda_i)$, όπου $V_A(\lambda_i) = \langle X_i \rangle$, άρα $BX_i = \mu_i X_i$ όπου $\mu_i \in \mathbb{F}$. Επειδή $X_i \neq 0$, X_i ιδιοδι·ανψσμα του B. Επειδή $\{X_1, ..., X_\nu\}$ βάση $*$ του $\mathbb{F}^{\nu\times1}$ έχουμε ότι ο B είναι διαγωνίσιμος.
$*$:ισχύει, γιατί ξέρουμε ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του λ αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

2.8 Διαγωνίσιμες Γραμμικές Απεικονίσεις .

Ορισμός 2.8.1. *Έστω $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ γραμμική ($dimV < \infty$ όπως πάντα). Η f λέγεται διαγωνίσιμη , αν υπάρχει διατεταγμένη βάση του V $\hat{a}$ τέτοια ώστε ο $(f : \hat{a}, \hat{a})$ διαγώνιος . Δηλαδή f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν [υπάρχει διτεταγμένη βάση $\hat{a}$ του ἄπό ιδιοδιανύσματα της f]*

Βασικό Θεώρημα (για γραμμικές απεικονίσεις) : Έστω $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ γραμμική απεικόνιση και $\lambda_1, ..., \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) f είναι διαγωνίσιμη

(ii) $\chi_f(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)^{\nu_1}...(x-\lambda_k)^{\nu_k}$, $\nu_1 + ... + \nu_k = \nu$ και $dimV_A(\lambda_i) = \nu_i$

(iii) $\nu = dimV_f(\lambda_1) + ... + dimV_f(\lambda_k)$

(iv) Υπάρχει βάση του V από ίδιοδιανύσματα της f

Πόρισμα 2.8.2. *Αν η $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές , τότε η f είναι διαγωνίσιμη .*

Θεώρημα 2.8.3. *Έστω $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ και λ ιδιοτιμη της f με πολλαπλότητα $m(\lambda)$ τότε $dimV_f(\lambda) \leq m(\lambda)$.*

Ασκήσεις

- (3.1). Εξετάστε ποιες γραμμικές απεικονίσεις είναι διαγωνίσιμες

  (β) $g : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3, g(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$

  (γ) $h : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x], h(\phi(x)) = \phi(1)x$.

  (β) 1ος τρόπος(με υπολογισμό ιδιοδιανυσμάτων)
  Αν $\hat{e}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{F}^3$, $(g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι (πράξεις):$\chi_g(x) = -(x-2)^2(x-3)$ και οι ιδιοτιμές της g είναι: $2, 2, 3$.
  $V_g(2)$:$g(x,y,z) = 2(x,y,z) \Leftrightarrow (y, -y-z, 2y+2z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (0,0,0) \Leftrightarrow y = z = 0$. Άρα $V_g(2) = \{(x,0,0) \in \mathbb{F}^3 | x \in F\} = \langle(1,0,0)\rangle$. Όμοια $V_g(2) = \langle(1,1,-2)\rangle$. Άρα δεν υπάρχει βάση από ιδιοδιανύσματα της g αφού κάθε 3 στοιχεία από τον $\langle(1,0,0)\rangle \cap \langle(1,1,-2)\rangle$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

  2ος τρόπος
  Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές όπως πριν τότε $V_g(2) = V_A(2)$ όπου $A = (g : \hat{e}, \hat{e}) =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Έχουμε $rank(A-2I_3) = rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$. Άρα $dimV_g(2) \neq m(2)$. Άρα g όχι διαγωνίσιμη $(*)$

$(*)$ Γενικά ξέρουμε :$dimV_g(2) = dimKer(g - 2\mathbf{1}_v) = dimV - Im(g - 2\mathbf{1}_v) = dimV - rank(A - 2I_\nu)$

(γ)Έστω $\hat{a} = \{1, x, x^2\}$ (διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}_2[x]$). Υπολογίζουμε τον $A = (h : \hat{a}, \hat{a})$. Έχουμε :

$$h(1) = 1 \cdot x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + o \cdot x^2$$

$$h(x) = 1 \cdot x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + o \cdot x^2$$

$$h(x^2) = 1 \cdot x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + o \cdot x^2.$$

Άρα έχουμε $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Έχουμε $\chi_h(x) = \chi_A(x) = -x^2(x-1)$. Ιδιοτιμές : $0, 0, 1$. $dimV_h(0) = 3 - rank(A - 0 \cdot I_3) = 3 - rankA = 3 - 1 = 2 = m(0)$. Για τον $V_h(1)$, ξέρουμε ότι $1 \leq dimV_h(1) \leq m(1) = 1 \Rightarrow dimV_h(1) = 1$. Τελικά , $dimV_h(1) + dimV_h(0) = 1{+}2 = 3 = dim\mathbb{F}_2[x]$, άρα από το Βασικό Θεώρημα η h είναι διαγωνίσιμη.

Παρατήρηση 2.8.4. *Αν $f : V \to V$ γραμμική και $A = (h : \hat{a}, \hat{a})$ για κάποια διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V,τότε για κάθε ιδιοτιμή λ της f,*

$$dimV_f(\lambda) = dimV - rank(A - \lambda \cdot I_\nu)$$

- (3.11): Να βρεθούν όλα τα $a \in \mathbb{F}$: η γραμμική $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$, με $f(x, y, z) = (x + az, 2y, ay + 2z)$ να είναι διαγωνίσιμη .
  Λύση

  Έστω $A = (h : \hat{e}, \hat{e})$, όπου $\hat{e}$ κανονική βάση του $\mathbb{F}^3$. Τότε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$.Έχουμε $\chi_f(x) = \chi_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Ιδιοτιμές της φ είναι :$1, 2, 2$. $dimV_f(2) = 3 - rank(A - 2 \cdot I_3) = 3 - rank \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 - 1 = 2, & \text{αν } a = 0 \\ 3 - 2 = 1, & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$ Άρα $dimV_f(2) = 2 \Leftrightarrow a = 0$. Έχουμε $1 \leq dimV_f(1) \leq dimV_f(1) \leq m(1) = 1 \Rightarrow dimV_f(1) = 1$. Τελικά $dimV_f(2) + dimV_f(1) = 3 \Leftrightarrow a = 0$. Δηλαδή f διαγωνίσιμη αν και μονο αν $\boxed{a = 0.}$

- (3.16):Έστω $f : V \to V$, γραμμική : κάθε $v \in V \backslash \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f. Τότε υπάρχει $\lambda \in F$ με $f = \lambda \cdot \mathbf{1}_V$
  Λύση

Έστω $\{u_1, ..., u_\nu\}$ βάση του V. Τότε για κάθε i υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F} : f(u_i) = \lambda_i u_i$. Επίσης υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ με $f(u_1 + u_2 + ... + u_\nu) = \lambda(u_1 + u_2 + ... + u_\nu)$. Άρα $\lambda u_1 + \lambda u_2 + ... + \lambda u_\nu) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_\nu u_\nu)$ και επειδή u_i είναι γραμμικα ανξάρτητα παίρνουμε ότι $\lambda = \lambda_1 \lambda = \lambda_2, ..., \lambda = \lambda u_\nu) \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda u_\nu)$. Άρα $f(u_i) = \lambda u_i, \forall i$. Αν $u \in V$ τυχαίο , τότε υπάρχουν $a_i \in \mathbb{F}$ με $u = a_1 u_1 + ... + a_\nu u_\nu$. Άρα $f(u) = f(a_1 u_1 + ... + a_\nu u_\nu) = a_1 f(u_1) + ... + a_\nu f(u_\nu) = a_1 \lambda u_1 + ... + a_\nu \lambda u_\nu = \lambda \cdot (a_1 u_1 + ... + a_\nu u_\nu) = \lambda \cdot u$ για κάθε $u \in V$.

-)(3.39): Σωστό ή Λάθος

  (i) Υπάρχει διαγωνίσιμη $f : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$ με $\chi_f(x) = x^2(x-3)^2$ και $dim(Imf) = 3$

  (ii) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ b & 4 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι .

  (i) Λάθος.
  Αν $dim(Imf) = 3$, τότε $dimKerf = 4 - dim(Imf) = 4 - 3 = 1$. Αλλά f διαγωνίσιμη $\Rightarrow dimV_f(0) = 2$, δηλαδή $dimKerf = 2$. Άτοπο
  (ii) Σωστό .
  Ο A είναι 2×2 και έχει 2 διαφορετικές ιδιοτιμές. Άρα A διαγωνίσιμος . Επειδή οι ιδιοτιμές είναι $4, 5$ έχουμε A όμοιος με $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ επίσης και ο B είναι όμοιος με τον $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Άρα ο A είναι όμοιος με τον B.

- Σωστό ή Λάθος

  (i) Έστω $A \in \mathbb{R}^4 \times 4$ με $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$
    - Υπάρχουν γραμμικά ανξάρτητα $X, Y \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ με $AX = X$ και $AY = Y$.
    - A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα $X, Y \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ με $AX = 2X$ και $AY = 2Y$.

  (ii) Κάθε $x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$ είναι χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάποιου διαγωνίσιμου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

  (iii) Κάθε $x^2 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$ είναι χαρακτηριστικό πολυώνυμο κάποιου διαγωνίσιμου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

  (i)

  - Λάθος: $X, Y \in V_A(1)$. Αλλά από $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$ έπεται $1 \leq dimV_A(1) \leq 1 = m(1)$, δηλαδή $dimV_A(1) = 1$. Άρα τα X, Y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

– Σωστό : A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow 4 = V_A(1) + V_A(2) + V_A(3)$. Αλλά όπως πριν $dimV_A(1) = dimV_A(3) = 1$. Άρα A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $dimV_A(2) = 2 \Leftrightarrow_{(*)} dimV_A(2) \geq 2 \Leftrightarrow X, Y \in V_A(2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα .
$((*)$ αφού $dimV_A(2) \leq 2 = m(2)$, από Θεώρημα)
(ii) Λάθος:π.χ. $\chi_A(x) = x^2 + 1, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) Σωστό : Έστω λ_1, λ_2 οι ρίζες του $x^2 + ax + b$ στο $\mathbb{C}$ και $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Τότε :$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 + ax + b$.

- (3.18): $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\hat{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$ με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

  (i) f^2 διαγωνίσιμη
  (ii) αληθεύει f διαγωνίσιμη ;
  (iii) Αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ τότε $\sqrt{\lambda_1}a_1 + \sqrt{\lambda_3}a_3$ ιδοδιάνυσμα της f

  Λύση

  (i) Ξέρουμε ότι $(f^2 : \hat{a}, \hat{a}) = (f : \hat{a}, \hat{a})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_3 \end{pmatrix}$ διαγώνιος , άρα f^2 διαγωνίσιμη. (ii) Όχι . Π.χ για $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, τότε $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αν f διαγωνίσιμη , τότε $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ όμοιος με διαγώνιο πίνακα τον $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (διαγώνιος πίνακας με ιδιοτιμές τις ιδιοτιμές του $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, δηλαδή $0, 0, 0$). Άρα $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, άτοπο .
  (iii) $f(\sqrt{\lambda_1}a_1 + \sqrt{\lambda_3}a_3) = \sqrt{\lambda_1}f(a_1) + \sqrt{\lambda_3}f(a_3) = \sqrt{\lambda_1}\lambda_3 a_3 + \sqrt{\lambda_3}\lambda_1 a_1 = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_3}(\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3)$. Αφού a_1, a_3 στοιχεία βάσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Άρα $\sqrt{\lambda_1}a_1 + \sqrt{\lambda_3}a_3 \neq 0$, αφού $\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_3} \neq 0$

- (3.37): Έστω $A \in \mathbb{F}$ $\hat{b} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$ και $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ που ορίζεται από $f(\nu_1) = \nu_1, f(\nu_2) = 2\nu_1 - a\nu_2 - \nu_3, f(\nu_3), f(\nu_3) = a^2\nu_2 + a\nu_3$.

(α) f όχι διαγωνίσιμη
(β) f^n διαγωνίσιμη για κάθε $n \geq 2$.

Λύση

(α) Κατά τα γνωστά $A = (f : \hat{b}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & a^2 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ $\chi_f(x) = \chi_A(x) = -(x-1)x^2$.
Ιδιοτιμές $0, 0, 1$. Έχουμε $dimV_f(0) = 3 - rank \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & a^2 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq$ $m(0) = 2$. Άρα f όχι διαγωνίσιμη .
(β) Με πράξεις:$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Επαγωγικά $A^n = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $rankA^n = 1, \forall n \geq 2$. Άρα $dimV_{f^n}(0) = 3 - rankA^n = 3 - 1 = 2 = m(0). \forall n \geq 2$. Επειδή προφανώς $dimV_{f^n}(1) = 1$ έχουμε $dimV_{f^n}(1) + dimV_{f^n}(0) = 3$ για κάθε $n \geq 2$. Άρα f^n διαγωνίσιμη για κάθε $n \geq 2$.

2.9 Τριγωνισιμότητα ,Θεώρημα Cayley- Hamilton .

Κίνητρο : Αν ο $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ δεν είναι διαγωνίσιμος , μπορούμε να βρούμε άλλη απλή μορφή του A ;

Ορισμός 2.9.1. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο A λέγεται τριγωνίσιμος στο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αν είναι όμοιος με τριγωνικό πίνακα , δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$: $P^{-1}AP$ να είναι τριγωνικός. Π.χ:Ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ δεν είναι διαγωνίσιμος (γιατί;), αλλά είναι τριγωνίσιμος (αφού είναι ήδη τριγωνικός)*

Παρατήρηση Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ τριγωνίσιμος στο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε A όμοιος με πίνακα της μορφής $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_\nu \end{pmatrix}$ και άρα το $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda\nu)$ δηλαδή γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.
Ισχύει και το αντίστροφο :

Θεώρημα 2.9.2. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε A τριγωνίσιμος στο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu} \Leftrightarrow \chi_A(x) =$ (γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$)*

Παρατήρηση : Η κατασκευή που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί και παρακάτω .
Απόδειξη Θεωρήματος
($\Leftarrow$) Επαγωγή στο ν :

- Για $\nu = 1$ είναι άμεσο

- Έστω ότι αλήθεύει για το $\nu - 1$ στην θέση του ν. Έχουμε από υπόθεση : $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)...(x-\lambda\nu)$. Έστω $u_i \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ_i. Από Γραμμική Άλγεβρα Ι ξέρουμε ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ της μορφής $\{u_1, ..., u_\nu\}$. Έστω $U_1 \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με στήλες $u_1, ..., u_\nu$ με αυτή τη σειρά . Τότε U_1 αντιστράψιμος . Επίσης παρατηρούμε ότι $U^{-1}AU_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline \mathbf{0}_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right)$. Πράγματι , ο $U^{-1}AU_1$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης $\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \to \mathbb{F}^{\nu\times 1}, \gamma_A(X) = AX$, ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{u_1, u_2, ...u_\nu\}$ (Γρ.Αλ.Ι). Αλλά $\gamma_A(u_1) = Au_1 = \lambda_1 u_1$. Δηλαδή η πρώτη στήλη του $U^{-1}AU_1$ είναι $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Τώρα $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\cdot\chi_{B_1}(x)$. Άρα $\chi_{B_1}(x) | \chi_A(x)$.
  Από υπόθεση έπεται ότι $\chi_{B_1}(x) =$ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$. Άρα στο B_1 εφαρμόζει η επαγωγική υπόθεση :Υπάρχει $U_2 \in \mathbb{F}^{\nu-1\times\nu-1}$ αντιστρέψιμος : $\boxed{U_2^{-1}B_1U_2 = \text{τριγωνικός}}$. Θέτουμε $U = U_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{0}_{\nu-1\times 1} & U_2 \end{array}\right) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Είναι σαφές ότι U είναι αντιστρέψιμος (ως γινόμενο αντιστρέψιμων). Θα δείξουμε ότι $U^{-1}AU$ είναι τριγωνικός.

  Υπολογίζουμε : $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}^{-1} U^{-1}AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{0}_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} =$ $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{0}_{\nu-1\times 1} & U_2^{-1}B_1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{0}_{\nu-1\times 1} & U_2^{-1}B_1U_2 \end{array}\right)$ που είναι τριγωνικός αφού και ο $U_2^{-1}B_1U_2$ είναι τριγωνικός .

($\Rightarrow$) Δείτε παρατήρηση πριν το Θεώρημα.

Παράδειγμα :

- Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, Έχουμε $\chi_A(x) = x^2$. Ο A <u>δεν</u> είναι διαγωνίσιμος (γιατί ;). Επειδή $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$, το Θεώρημα δίνει : A τριγωνίσιμος . Θα βρούμε έναν αντιστρέψιμο U με $U^{-1}AU$ να είναι τριγωνικός . Με συνηθεις υπολογισμούς $V_A(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.
  Έστω $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (πρώτο βήμα στην απόδειξη του Θεωρήματος). Βρίσκουμε $u_2 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ έτσι ώστε $\{u_1, u_2\}$ βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ (από Γρ.Αλ.Ι) π.χ : $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Θέτουμε $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Από την απόδειξη ξέρουμε ότι $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Πόρισμα 2.9.3. *Κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι τριγωνικός*

Εφαρμογή (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης)

Θεώρημα 2.9.4. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, ...\lambda_\nu \in \mathbb{C}$, δηλαδή $\chi_A(x) = (-1)^\nu(x-\lambda_1)...(x-\lambda_\nu)$. Για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$ οι ιδιοτιμές του $\phi(A)$ είναι οι $\phi(\lambda_1), ..., \phi(\lambda_\nu)$,δηλαδή $\chi_{\phi(A)}(x) = (-1)^\nu(x-\phi(\lambda_1))...(x-\phi(\lambda_\nu))$. Ειδικά*

$$Tr\,(\phi(A)) = \phi(\lambda_1) + ... + \phi(\lambda_\nu), \det(\phi(A)) = \phi(\lambda_1)\cdot ... \cdot \phi(\lambda_\nu).$$

Απόδειξη: Ξέρουμε ότι αν $T \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ τριγωνικός , τότε T^k τριγωνικός για κάθε $k \geq 1$, γιατί αν $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_\nu \end{pmatrix}$, τότε $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_\nu^k \end{pmatrix}$. Άρα για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\phi(T)$ τριγωνικός . Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Από Πόρισμα , υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με $P^{-1}AP = T$ τριγωνικός . Άρα για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\phi(T) = \phi(P^{-1}AP) = \underbrace{P^{-1}\phi(A)P}_{!(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP}$, δηλαδή $\phi(A)$ όμοιος με $\phi(T)$. Άρα $\chi_{\phi(A)}(x) = (-1)^\nu(x-\phi(\lambda_1))...(x-\phi(\lambda_\nu))$, αφού $\phi(T) = \begin{pmatrix} \phi(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \phi(\lambda_\nu) \end{pmatrix}$ τριγωνικός .

Παραδείγματα

(i) Αν $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$, τότε $\chi_{A^2}(x) = (x-1)^2(x-4)^2$.

(ii) Αν $\chi_A(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$, $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ τότε $\chi_{A^2}(x) = (x-1)^2(x-1)^2$, αφού οι ιδιοτιμές του A <u>στο $\mathbb{C}$</u> είναι $-1, -1, i, -i$ οπότε οι ιδιοτιμές του A^2 στο $\mathbb{C}$ είναι οι $(-1)^2, (-1)^2, i^2, (-i)^2$ δηλαδή οι $1, 1, -1, -1$

Ασκήσεις

Αν ο $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ έχει μια τουλάχιστον ιδιοτιμή , τότε ο A είναι τριγωνίσιμος

Απόδειξη: Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του . Ξέρουμε ότι $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)\mathbb{R}$ άρα $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Άρα $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ που είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$ άρα $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ είναι τριγωνίσιμος. (4.3): Να βρείτε τα $a \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε ο $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ να είναι τριγωνίσιμος και όχι διαγωνιμοποιήσιμος.

Λύση: $\chi_A(x) = x^2 - 7x + 12 - 3a$. Έχουμε $\Delta = 49 - 4(12-3a) = 1 - 12a$.

- $\Delta < 0$, δηλ. $a < -\frac{1}{12}$, τότε A όχι τριγωνίσιμος και ούτε διαγωνίσιμος

- $\Delta > 0$ δηλ. $a > -\frac{1}{12}$, τότε A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές (στο $\mathbb{R}$) και επομένως είναι διαγωνίσιμος .

- $\Delta=0$ δηλ. $a = -\frac{1}{12}$ τότε $\chi_A(x) = x^2 - 7x + 12 - 3(-\frac{1}{12}) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ και ο A είναι τριγωνίσιμος . $dimV_A(7/2) = 2 - rank\left(A - \frac{7}{2}I_2\right) = 2 - rank\begin{pmatrix} 1/2 & -1/12 \\ 3 & -1/2 \end{pmatrix} 2 - 1 = 1 < 2 = m(7/2)$. Άρα ο A δεν είναι διαγωνίσιμος , αλλά είναι τριγωνίσιμος. Άρα το ζητούμενο ισχύει αν και μόνο αν $\boxed{a = -\frac{1}{12}}$

Αντίστοιχα απότελέσματα για γραμμικές απεικονίσεις:

Ορισμός 2.9.5. *Έστω V ένας $\mathbb{F}$ διανυσματικός χώρος ($dimV < \infty$) και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση . Η f λέγεται τριγωνίσιμη αν για κάποια διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V , ο πίνακας $(f : \hat{a}, \hat{a})$ είναι τριγωνικός .*

Θεώρημα 2.9.6. *Μια γραμμική απεικόνιση είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν το $\chi_f(x)$ γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.*

Παρατήρηση 2.9.7. *f τριγωνίσιμη αν και μόνο αν για κάποια διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V ο πίνακας $(f : \hat{a}, \hat{a})$ είναι τριγωνίσιμος .*

Παραδείγματα

- Η $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$ με $f(x, y) = (4x + y, -2x + y)$ είναι τριγωνίσιμη .
  Λύση: Έστω $\hat{e}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$. Τότε $A = (f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Άρα $\chi_f(x) = \chi_A(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, το οποίο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Άρα η f είναι τριγωνίσιμη .

- Έστω $\{u_1, u_2, u_3\}$ διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = u_1 + u_2 + 2u_3$, $f_(u_3) = au_2 + u_3$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι f τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $a \geq 0$.
  Λύση:Ο πίνακας της f ως προς τη δεδομένη βάση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, άρα $\chi_A(x) = -(x-2)\left((x-1)^2 - 2a\right) = -(x-2)(x^2 - 2x + 1 - 2a)$, δηλαδή $\chi_f(x) = -(x-2)(x^2 - 2x + 1 - 2a)$ όμως ξέρουμε από Θεώρημα ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν το $\chi_f(x)$ γραφεται σα γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x] \Leftrightarrow$ $\Delta = 4 - 4(1 - 2a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$.

Ασκήσεις

(i) Αν $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $\chi_A(x) = x^2 - 2x + 5$, ποιο είναι το $\chi_A^2(x)$;
Στο $\mathbb{C}[x]$: $\chi_A(x) = (x - (1+2i))\,(x - (1-2i))$. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης : $\chi_{A^2}(x) = \left(x - (1+2i)^2\right)\left(x - (1-2i)^2\right) = x^2 - 6x + 45$.

(ii) Αν $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ έχει $\chi_A(x) = x^2 + ax + b$, ποιο είναι το $\chi_A^2(x)$;
$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. Τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = -a, \lambda_1\lambda_2 = b$. Από το Θ.Φασματικής Απεικόνισης $\chi_{A^2}(x) = (x - \lambda_1^2)(x - \lambda_2^2) = x^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2\lambda_1^2\lambda_2^2 =$
$= x^2 - \left((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\right) + (\lambda_1\lambda_2)^2 = x^2 - (a^2 - b2)x = b^2$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κίνητρο :Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ξέρουμε ότι $dim\mathbb{R}^{2\times 2} = 4$. Μια βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Άρα κάθε 5 στοιχεία του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.Ειδικά τα I_2, A, A^2, A^3, A^4 είναι γραμμικά εξαρτημένα .Δηλαδή υπάρχουν $c_i \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν ώστε

$$c_0 I_2 + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + c_4 A^4 = 0.$$

Δηλαδή το A μηδενίζει το πολυώνυμο : $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \in \mathbb{R}[x]$. Γενικά αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}, f(x) \neq 0$ με $f(A) = 0$. Θα δούμε ότι ένα τέτοιο $f(x)$ είναι το $f(x) = \chi_A(x)$

Θεώρημα Cayley-Hamilton

- Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + a_1 x + a_0$. Τότε $(-1)^\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu = 0$
- Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και $\chi_f(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + a_1 x + a_0$. Τότε $(-1)^\nu f^\nu + a_{\nu-1}f^{\nu-1} + ... + a_1 f + a_0 \mathbf{1}_V = 0$.

(1)Παράδειγμα$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.Τότε $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$. Άρα $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Παρατήρηση 2.9.8. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ αντιστρέψιμος και $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Τότε:* $f(A) = 0 \Leftrightarrow f(P^{-1}AP) = 0$.

Πράγματι ξέρουμε ότι $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$ Από παρατήρηση , μπορώ να υποθέσω ότι ο Aείναι τριγωνικός (γιατί κάθε $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ είναι τριγωνίσιμος). Έστω $A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ τριγωνικός με ιδιοτιμές λ, λ, μ. Έχουμε $\chi_A(x) = -(x - \lambda)^2(x - \mu)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(A - \lambda I_3)^2(A - \mu I_3) = 0 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \mu-\lambda \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \mu-\lambda \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-\mu & * & * \\ 0 & \lambda-\mu & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & (\mu-\lambda)^2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-\mu & * & * \\ 0 & \lambda-\mu & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 0$$

Απόδειξη
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Θεωρούμε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Τότε A τριγωνίσιμος στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος : $P^{-1}AP$ τριγωνικός.Άρα υπάρχει βάση $\{X_1, ..., X_\nu\}$ του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$:
$AX_1 = \lambda_1 X_1,$
$AX_2 = a_{12}X_1 + \lambda_2 X_2$
$AX_3 = a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + \lambda_3 X_3$
$\vdots$
$AX_\nu = a_{1\nu}X_1 + a_{2\nu}X_2 + ... + \lambda_\nu X_\nu.$
Έστω $B_i = A - \lambda_i I_\nu$. Τότε:
$BX_1 = 0,$
$BX_2 = a_{12}X_1$
$BX_3 = a_{13}X_1 + a_{23}X_2$
$\vdots$
$BX_\nu = a_{1\nu}X_1 + a_{2\nu}X_2 + ... + a_{(\nu-1)\nu}X_\nu.$
Θα δείξουμε ότι

$$B_1B_2...B_iX_j = 0, \forall j \leq i \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι αν η (1) αληθεύει , τότε για $i = \nu$ παίρνουμε $B_1B_2...B_\nu = 0$, δηλαδή : $(A - \lambda_1 I_\nu)...(A - \lambda_\nu I_\nu) = 0 \Rightarrow \chi_A(A) = 0.$

Απόδειξη της (1)
Επαγωγή στο i.

- Για $i = 1, B_1X_1 = 0$
- Ψπόθέτουμε ότι ισχύει η (1) και θα τη δείξουμε για $i+1$ στην θέση του i, δηλαδή $B_1B_2...B_iB_{i+1}X_j = 0, \forall j \leq i+1.$

  Παρατήρηση 2.9.9. *Επειδή τα B_i είναι πολυώνυμα του A μετατίθενται μεταξύ τους .*

  συνέχεια της απόδειξης της (1)

  - Αν $j \leq i$ τότε από την παρατήρηση και την υπόθεση έχουμε $B_1B_2...B_iB_{i+1}X_j = B_{i+1}(B_1B_2...B_iX_j) = B_{i+1}0 = 0.$

– Έστω $j = i+1$. Τότε $B_{i+1}X_{i+1} = a_{1(i+1)}X_1+...+a_{i(i+1)}X_i$. Άρα : $B_1B_2...B_i(B_{i+1}X_{i+1}) =$
$B_1B_2...B_i(a_{1(i+1)}X_1 + ... + a_{i(i+1)}X_i) =$
$= a_{1(i+1)}B_1B_2...B_iX_1 + ... + a_{i(i+1)}B_1B_2...B_iX_i = 0$

Ασκήσεις :

(4.15): Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(i) Να παρασταθεί ο A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των I_3, A, A^2.

(ii) $\forall n \geq 0$, $A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A$.

(iii) Να βρεθεί $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού ≤ 2 : $A^5 - 2A^4 + 2A + 3I_3 = \phi(A)$

(i) Με πράξεις $\chi_A(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 2$. Από Cayley-Hamilton: $-A^3 - 2A^2 + A - 2I_3 = 0(*)$. Ο A είναι αντιστρέψιμος , π.χ. :$\chi_A(0) = -2 \neq 0$. Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ με $A^{-1} : -A^2 - 2A + A - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 - A + I_3)$.
(ii) Επαγωγή στο n

- Για $n = 1$ άμεσο
- υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii) και θα δείξουμε ότι $A^{2(n+1)} - 2A^{2n+1} = A^2 - 2A$.
$A^{2(n+1)} - 2A^{2n+1} = (A^{2n} - 2A^{2n-1})A^2 = (A^2 - 2A)A^2 = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$, γιατί από $(*)$
$$A^3 = 2A^2 + A - 2I_3 \Rightarrow A^4 = 2A^3 + A^2 - 2A$$
Άρα $A^4 - 2A^3 = 2A^3 + A^2 - 2A - 2A^3 = A^2 - 2A$

(iii)Έστω $f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x + 3$. Από την ευκλείδεια διαίρεση υπάρχουν $p(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $f(x) = p(x)\chi_A(x) + r(x), \deg r(x) < \deg \chi_A(x) = 3$. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton $f(A) = p(A)\underbrace{\chi_A(A)}_{0} + r(A) = r(A)$. Συγκεκριμένα, $x^5 - 2x^4 + 2x + 3 = (-x^2 - 1)\chi_A(x) + 3x + 1$. Άρα $A^5 - 2A^4 - 2A + 3I_3 = 3A + I_3$.

(4.7): Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $\chi_A(x) = -x^3 + x$

(i) A^k διαγωνίσιμος για κάθε $k \geq 1$.

(ii) $A^{2k} = A^2$ και $A^{2k+1} = A$ για κάθε $k \geq 1$.

(i) Παρατηρούμε $\chi_A(x) = -x(x-1)(x+1)$, επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι $-1, 0, 1$. Ο A είναι 3×3 και έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές . Άρα A διαγωνίσιμος . Άρα A^k διαγωνίσιμος . Άρα A^k διαγωνίσιμος (γιατί;)
(ii) Από Cayley-Hamilton ,$-A^3 + A = 0$, δηλαδή $\boxed{A = A^3}$
Επαγωγή στο k

- $k = 1$, $A^2 = A^2, A^3 = A$
- $A^{2(k+1)} = A^{2k}A^2 = A^2A^2 = A \cdot A = A^2$. Όμοια για το $A^{2(k+1)+1}$

(4.7): Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ τριγωνίσιμος με $Tr(A^2) = 0$ τότε $A^\nu = 0$.

Λύση

επειδή A τριγωνίσιμος , $\chi_A(X) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_\nu)$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης :$\chi_{A^2}(x)(\lambda_1^2 - x)(\lambda_2^2 - x)...(\lambda_\nu - x.)$ Άρα $0 = Tr(A^2) = \lambda_1^2 + ... + \lambda_\nu^2 \Rightarrow \lambda_1^2 + ... + \lambda_\nu^2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$, αφού $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Τότε $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu$ και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα Cayley-Hamilton.

(4.10): Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(i) Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ είναι ίση με 0.

(ii) $A^k = 0$ για κάποιο $k > 0$.

(iii) $A^\nu = 0$

Λύση

$(i) \Rightarrow (ii)$: Αν κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ είναι ίση με 0, τότε $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu$. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, $A^\nu = 0$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Έστω $A^k = 0$. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A, τότε επιδή $A^k = 0$, παίρνουμε $\lambda_k = 0$,δηλαδή $\lambda = 0$. Άρα $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu$ και από θεώρημα Cayley-Hamilton, $A^\nu = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: έγινε πριν.

(4.14):Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$.

(i) Αν A όχι αντιστρέψιμος ,τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg f(x) \leq \nu - 1$ και $Af(A) = 0$

(ii) Αν A αντιστρέψιμος ,τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg f(x) \leq \nu - 1$ και $A^{-1} = f(A)$.

Λύση

(i) : Επειδή A όχι αντιστρέψιμος, $\chi_A(0) = 0$ (ξέρουμε $\chi_A(0) = \det A = 0$). Άρα : $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + a_1 x = 0$. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, $(-1)^\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1} + ... + a_1 A = 0 \Leftrightarrow A\left((-1)^\nu A^{\nu-1} + a_{\nu-1}A^{\nu-2} + ... + a_1 = 0\right)$. Άρα μπορώ να θέσω $f(x) = (-1)^\nu x^{\nu-1} + a_{\nu-1}x^{\nu-2} + ... + a_1$.

(ii) : Έστω A αντιστρέψιμος και $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + a_1 x + a_0$. Τότε $a_0 \neq 0$. (αφού $a_0 = \det A \neq 0$). Από το θεώρημα Cayley-Hamilton: $(-1)^\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu = 0 \Leftrightarrow A^{-1}\left((-1)^\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1} + ... + a_1 A + a_0 I_\nu\right) = A^{-1}0 \Rightarrow (-1)^\nu A^{\nu-1} + a_{\nu-1}A^{\nu-2} + ... + a_1 I_\nu + a_0 A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left((-1)^\nu A^{\nu-1} + a_{\nu-1}A^{\nu-2} + ... + a_1 I_\nu\right)$. Άρα μπορώ να θέσω $f(x) = -\frac{1}{a_0}\left((-1)^\nu x^{\nu-1} + a_{\nu-1}x^{\nu-2} + ... + a_1\right)$

- Έστω γραμμική $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με $\chi_f(x) = x^4 - 1$.
    (i) Είναι η f τριγωνίσιμη ;

(ii) Να βρεθεί το $\chi_{f^2}(x)$

(iii) Να βρεθεί ένα $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $f^{-1} = \phi(f)$.

(iv) Να βρεθεί ένα $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $f^5 + 2f^{-2} = \phi(f)$ και $\deg f(x) \leq 3$

Λύση (i) : Έχουμε $\chi_f(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$ και το (x^2+1) δεν είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Άρα f όχι τριγωνίσιμη.

(ii) : Έχουμε $\chi_f(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x-i)(x+i)(x-1)(x+1)$ στο $\mathbb{C}[x]$. Έστω $\phi(x) = x^2$. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης :$\chi_{f^2}(x) = (-1)^4(x - i^2)(x-(-i)^2)(x-1^2)\left(x-(-1)^2\right) = (x+1)(x+1)(x-1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)^2$

(iii) : Επειδή $\chi_f(0) \neq 0$, η f είναι αντιστρέψιμη . Από το θεώρημα Cayley-Hamilton: $f - \mathbf{1}_{\mathbb{R}^4} = 0 \Rightarrow f^3 - f^{-1} = 0$, δηλαδή $f^{-1} = f^3$.

(iv) : Μπορούμε να διαιρέσουμε το $x^5 + 2x^2$ με το $x^4 - 1$:
$x^5 + 2x^2 = q(x)(x^4-1) + r(x), \deg r(x) < 4$. Τότε :
$f^5 + 2f^2 = q(f)\underbrace{(f^4 - \mathbf{1}_V)}_{0} + r(f) = r(f)$ (βγαίνει άμεσα :$f^4 - \mathbf{1}_V = 0$ επίσης κάνοντας την διαίρεση βλέπουμε $r(x) = 2x^2 + x$). Άρα $f^5 + 2f^2 = r(f) = 2f^2 + f$ άρα μπορούμε να θέσουμε : $\phi(x) = 2x^2 + x$.

- Υπάρχουν άπειροι το πλήθος $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$

Λύση
Κάθε πίνακας της μορφής $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$ από το θεώρημα Cayley-Hamilton.

- Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και W_A ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ που παράγεται από τους $I_\nu, A, A^2, ...$ Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 1, A^k \in \left\langle I_{nu}, A, A^2, ..., A^{\nu-1}\right\rangle$ και άρα $dimW_A \leq \nu$.

Λύση
Από την Ευκλείδεια διαίρεση υπάρχουν $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $x^k = q(x)\cdot\chi_A(x) + r(x), \deg r(x) < \deg \chi_A(x) = \nu$. Επομένως $r(x) == r_0 + r_i x + ... + r_{\nu-1}x^{\nu-1} \Rightarrow r(A) = r_0 + r_1 A + ... + r_{\nu-1}A^{\nu-1}$. Τότε $A^k = q(A)\chi_A(A) + r(A)$. Αλλά $\chi_A(A) = 0$. Άρα $A^k = r(A)$. Επειδή $\deg r(x) < \nu$ έχουμε $A^k = r(A) \in \left\langle I_{nu}, A, A^2, ..., A^{\nu-1}\right\rangle$. Άρα $W_A \subseteq \left\langle I_{nu}, A, A^2, ..., A^{\nu-1}\right\rangle$. Επειδή $W_A \supseteq \left\langle I_{nu}, A, A^2, ..., A^{\nu-1}\right\rangle$, έχουμε ισότητα.

- Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $rankA = 1$

  (i) $A^2 = Tr(A)\cdot A$

  (ii) $A^\nu = 0 \Leftrightarrow Tr(A) = 0$

(iii) A τριγωνίσιμος

(iv) A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $Tr(A) \neq 0$

Λύση
Επειδή $rankA = 1$ έπεται ότι κάθε 2 στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες . Άρα υπάρχουν $a_1, ...a_\nu, b_1, ..., b_\nu \in \mathbb{F}$ με :

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_\nu \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_\nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\nu b_1 & a_\nu b_2 & \cdots & a_\nu b_\nu \end{pmatrix}. \text{ Παρατηρούμε πως } A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\nu \end{pmatrix}}_{\nu\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\nu \end{pmatrix}}_{1\times\nu}$$

$$(i)\ A^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\nu \end{pmatrix} = (b_1a_1 + b_2a_2 + ... + b_\nu a_\nu) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\nu \end{pmatrix} = Tr(A) \cdot A$$

(ii) Από το (i): $A^k = Tr(A)^{k-1} \cdot A, \forall k \geq 2$ (βγαίνει εύκολα με επαγωγή).Έχουμε $A^\nu = 0 \Leftrightarrow \underbrace{Tr(A)^{\nu-1} \cdot A}_{A\neq 0} = 0 \Leftrightarrow Tr(A)^{\nu-1} = 0 \Leftrightarrow Tr(A) = 0$.

(iii) Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A, τότε από (α):$\lambda^2 - Tr(A) \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \in \mathbb{F} \\ Tr(A) \in \mathbb{F} \end{cases}$

Άρα A τριγωνίσιμος (στο $\mathbb{F}^{nu\times\nu}$)
(iv) $dimV_A(0) = \nu - rank(A - 0 \cdot I_\nu) = \nu - rankA = \nu - 1$.

- Αν $Tr(A) = 0$, τότε έχουμε μοναδικό ιδιόχωρο και αυτός έχει διάσταση $\nu - 1 \neq \nu$, οπότε A όχι διαγωνίσιμος
- Αν $Tr(A) \neq 0$ τότε $dim\left(V_A\left(Tr(A)\right)\right) \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε : $\nu \geq dim\left(V_A(0) + V_A(Tr(A))\right) = dimV_A(0) + dim(V_A(Tr(A)) = \nu - 1 + dim(V_A(Tr(A))$ οπότε $dimV_A\left(Tr(A)\right) \leq 1 \Rightarrow dimV_A\left(Tr(A)\right) = 1$. Τότε $= dimV_A(0) + dim(V_A(Tr(A)) = \nu - 1 + dim(V_A(Tr(A)) = \nu - 1 + 1 = \nu$, δηλαδή A διαγωνίσιμος

2.10 Ελάχιστο Πολυώνυμο

κίνητρο: Ξέρουμε ότι αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε υπάρχει $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού με $\phi(A) = 0$.
Π.χ Μπορούμε να θέσουμε $\phi(x) = \chi_A(x)$, λόγω Cayley-Hamilton.

Πρόταση 2.10.1. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε υπάρχει μοναδικό μονικό $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$:*

(i) $m_A(A) = 0$

(ii) *αν $\phi(x) \in \mathbb{F}[x] : \phi(A) = 0$, τότε $m_A(x)|\phi(x)$.*

Ορισμός 2.10.2. *Το $m_A(x)$ λέγεται το ελάχιστο πολυώνυμο του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$*

Απόδειξη Πρότασης

- Ύπαρξη:

Έστω $S = \{\phi(x) \in \mathbb{F}[x]|\phi(x)$ μονικό και $\phi(A) = 0\}$. $S \neq$, αφού $(-1)^\nu\chi_A(x) \in S$ (από Cayley-Hamilton.) Έστω $m_A(x) \in S$ ελάχιστου βαθμού. Από τον ορισμό του $S, m_A(A) = 0$. Έστω $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\phi(A) = 0$. Θα δείξουμε ότι $m_A(x)|\phi(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση , υπάρχουν $q(x), r(x)\mathbb{F}[x]$ με $\phi(x) = q(x)m_A(x) + r(x), \deg r(x) < \deg m_A(x)$. Άρα $\phi(A) = q(A)m_A(A) + r(A) \Rightarrow 0 = q(A)\cdot 0 + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$. Έστω $r(x) \neq 0$ και r_m ο μεγιστοβάθμιος όρος του $r(x)$. Τότε $r_m^{-1}r(x) \in S$ και $\deg\left(r_m^{-1}r(x)\right) = \deg r(x) < \deg m_A(x)$, άτοπο, λόγω ελαχίστου στον ορισμό του $m_A(x)$.

- Μοναδικότητα:

Έστω $m_A(x)$ και $\overline{m_A}(x)$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του ορισμού . Έχουμε $m_A(x)|\overline{m_A}(x)$ (αφού $m_A(x)$ ικανοποιεί την ιδιότητα (ii)). Όμοια $\overline{m_A}(x)|m_A(x)$. Άρα $\overline{m_A}(x) = m_A(x)$ γιατί είναι μονικά .

Παρατήρηση 2.10.3. *Από τον ορισμό και Cayley-Hamilton,$m_A(x)|\chi_A(x)$. Ειδικά κάθε ρίζα του $m_A(x)$ στο $\mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A.*

Πρόταση 2.10.4. *Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$.Τα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.*

Απόδειξη
Έστω λ ιδιοτιμή του A, δηλαδή υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}, X \neq 0, AX = \lambda X, \lambda \in \mathbb{F}$. Ξέρουμε ότι για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x], \phi(A)X = \phi(\lambda)X$. Για $\phi(x) = m_A(A)$ παίρνουμε : $m_A(A)X = m_A(\lambda)X$, δηλαδή $0 = \underbrace{m_A(\lambda)X}_{X\neq 0} \Rightarrow m_A(\lambda) = 0$, δηλαδή λ ρίζα του $m_A(x)$. Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο και την παρατήρηση.

Παραδείγματα :

(i) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Τότε $m_A(x) = x - 1$. Έχουμε $\chi_B(x) = (x-1)^2$.
Ξέρουμε ότι :

- $m_B(x)|(x-1)^2$.
- $m_B(x)$ και $(x-1)^2$ έχουν τις ίδιες ρίζες .

Άρα $m_B(x)=(x-1)^2$ ή $m_B(x)=(x-1)$. Παρατηρούμε ότι $B-I_2\neq 0$, δηλαδή ο B δεν μηδενίζει το $x-1$. Άρα $m_B(x)=(x-1)^2$

(ii) Έστω $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. Να βρεθούν τα $m_A(x),m_B(x)$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(x)=-(x-2)^3$. Επειδή $m_A(x)|\chi_A(x)$, έχουμε $m_A(x)=\begin{cases}(x-2)^3 & \text{ή}\\(x-2)^2 & \text{ή}\\(x-2)\end{cases}$

Έχουμε

- $A-2I_3\neq 0\Rightarrow m_A(x)\neq(x-2)$
- $(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{0}_{3\times 3}$. Άρα $m_A(x)=(x-2)^2$.

Όμοια για το B έχουμε Έχουμε $\chi_B(x)=-(x-2)^3$. Επειδή $m_B(x)|\chi_B(x)$, έχουμε $m_B(x)=\begin{cases}(x-2)^3 & \text{ή}\\(x-2)^2 & \text{ή}\\(x-2)\end{cases}$ Έχουμε

- $B-2I_3\neq 0\Rightarrow m_B(x)\neq(x-2)$
- $(B-2I_3)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Άρα $m_B(x)\neq(x-2)^2$. Συνεπώς $m_B(x)=(x-2)^3$

(iii) Έστω $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&2&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

(α′) Να βρεθεί πολυώνυμο $\phi(x)$ βαθμού 1 με $A^{-1}=\phi(A)$

(β′) Να βρεθεί πολυώνυμο $\psi(x)$ βαθμού 1 με $A^4+A-2I_3=\psi(A)$ Λύση
Με συνήθεις πράξεις $\chi_A(x)-(x-2)^2(x-3)$. Επειδή το $m_A(x)|\chi_A(x)$ και τα $m_A(x),\chi_A(x)$ έχουν τις <u>ίδιες ρίζες</u>, έχουμε $m_A(x)=\begin{cases}(x-2)^2(x-3) & \text{ή}\\(x-2)(x-3)\end{cases}$
Με πράξεις επαληθεύεται ότι $(A-2I_3)(A-3I_3)=0$. Άρα :
$m_A(x)=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$. Συνεπώς $A^2-5A+6I_3=0.(*)$
(α′) Ο A είναι αντιστρέψιμος (π.χ: $\chi_A(0)\neq 0$).Πολλαπλασιάζοντας την $(*)$ με

A^{-1} παίρνουμε $A - 5I_3 + 6A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}(-A + 5I_3)$. Άρα μπορούμε να θέσουμε $\phi(x) = \frac{1}{6}(-x+5)$.
(β′) Από την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε : $x^4 + x - 2 = (x^2 + 5x + 19)m_A(x) + 66x - 166$. Άρα $A^4 + A - 2I_3 = 66A - 166I_3$. Άρα $\psi(x) = 66x - 166$

(iv) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(α′) Να βρεθεί το $m_A(x)$

(β′) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $B^3 = A$.

Λύση
(α′) $\chi_A(x) = -x^3$. Άρα $m_A(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ή} \\ x^2 & \text{ή} \\ x & \end{cases}$ Παρατηρούμε ότι $A^2 \neq 0$. Άρα $m_A(x) = x^3$
(β′) Έστω ότι $B^3 = A$. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του B, τότε λ^3 ιδιοτιμή του B^3, δηλαδή λ^3 ιδιοτιμή του A δηλαδή $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Άρα $\chi_B(x) = -x^3$. Από Cayley-Hamilton $B^3 = 0$ δηλαδή $A = 0$ άτοπο

2.11 Ιδιότητες Του Ελάχιστου Πολυωνύμου και το Βασικό Θεώρημα

→ Ιδιότητα 1: Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο
Απόδειξη
Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ όμοιοι , Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $B = P^{-1}AP$. Ξέρουμε για $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ έχουμε $\phi(B) = \phi(P^{-1}AP) = P^{-1}\phi(A)P$. Άρα $\phi(B) = 0 \Leftrightarrow \phi(A) = 0$.
Συνεπώς $m_A(x) = m_B(x)$. (Ξέρουμε ότι το $m_A(x)$ είναι το μοναδικό μοναδικό πολυώνυμα ελάχιστου βαθμού στο σύνολο $\{\phi(x) \in \mathbb{F}[x] | \phi(A) = 0, \phi(x) \neq 0\}$).
2ος τρόπος : $m_B(B) = 0 \Rightarrow m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A(x) | m_B(x)$. Όμοια $m_B(x) | m_A(x)$. Επειδή $m_B(x), m_A(x)$ μονικά $m_B(x) = m_A(x)$.

Παραδείγματα:

(i) Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι όμοιοι : Σε προηγούμενες σελίδες είδαμε ;;;;;;; $m_A(x) = (x-2)^2$ και $m_B(x) = (x-2)^3$, δηλαδή $m_A(x) \neq m_B(x)$, οπότε A, B όχι όμοιοι.

(ii) Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του $\mathbb{R}_2[x]$: $(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

όπου $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], f(\phi(x)) = \phi'(x) - \phi(x)$;

Απάντηση

Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{b} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ και υπολογίζουμε το $B = (f : \hat{b}, \hat{b})$.

$f(1) = 0 - 1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + o \cdot x^2$.

$f(x) = 1 - x = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot x + o \cdot x^2$.

$f(x^2) = 2x - x^2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + (-1) \cdot x^2$.

Επομένως $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Υπολογισμός του $m_B(x)$:</u> $\chi_B(x) = -(x+1)^3$. Επειδή $m_B(x) | \chi_B(x)$ $m_B(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ή \\ (x+1)^2 & ή \\ (x+1) \end{cases}$ Με πράξεις έχουμε $(B + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Άρα $m_B(x) = (x+1)^3$.

<u>Υπολογισμός του $m_A(x)$:</u> $\chi_A(x) = -(x+1)^3$. Όπως πριν επειδή $m_A(x) | \chi_A(x)$ $m_A(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ή \\ (x+1)^2 & ή \\ (x+1) \end{cases}$ Υπολογίζουμε $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ 0. Επειδή $A \neq -I_3$, $m_A(x) = (x+1)^2 \neq (x+1)^3 = m_B(x)$. Δηλαδή A, B <u>όχι</u> όμοιοι, οπότε <u>δεν</u> υπάρχει βάση $\hat{a}$ όπως στην εκφώνηση.

$\to$ <u>Ιδιότητα 2:</u> Έστω $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}, B \in \mathbb{F}^{\nu_1 \times \nu_1}, C \in \mathbb{F}^{\nu_2 \times \nu_2} : \nu_1 + \nu_2 = \nu$.

Τότε : $\boxed{m_A(x) = \varepsilon\kappa\pi\,(m_B(x), m_C(x))\,.}$

Ειδικά αν $A = diag(\underbrace{\lambda_1, ...\lambda_1}_{\nu_1}, ..., \underbrace{\lambda_k, ...\lambda_k}_{\nu_k})$ διαγώνιος και $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$, τότε $m_A(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$

Παράδειγμα:

$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Έστω $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε :$m_A(x) = \varepsilon\kappa\pi\,(m_B(x), m_C(x))$. Με απλές πράξεις :

$m_B(x) = (x-2)(x-5)$ και $m_C(x) = x(x-2)$. Άρα $m_A(x) = x(x-2)(x-5)$.

Προσοχή !:
Αν $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$. Τότε

(i) $\chi_A(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_C(x)$

(ii) Γενικά $m_A(x) \neq \varepsilon\kappa\pi\,(m_B(x), m_C(x))$.
Αντιπαράδειγμα $A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$, $m_A(x) = (x-1)^2 \neq \varepsilon\kappa\pi\,((x-1),(x-1))$.

Απόδειξη ιδιότητας 2
Από $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C \end{pmatrix}$ έπεται ότι για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$

(1) $$\phi(A) = \begin{pmatrix} \phi(B) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \phi(C) \end{pmatrix}.$$

Για $\phi(x) = m_A(x), 0 = m_A(A) = \begin{pmatrix} m_A(B) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m_A(C) \end{pmatrix}$. Άρα $m_A(B) = 0, m_A(C) = 0$, οπότε $m_B(x)|m_A(x)$ και $m_C(x)|m_A(x)$ άρα

(2). $$\varepsilon\kappa\pi\,(m_B(x), m_C(x))\,|m_A(x)$$

Έστω $\psi(x)$ κοινό πολλαπλάσιο των $m_A(x), m_A(x)$. Τότε $\psi(C) = 0, \psi(B) = 0$. Από (1) $\psi(A) = \begin{pmatrix} \psi(B) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \psi(C) \end{pmatrix} = \mathbf{O}$.. Άρα

(3). $$m_A(x)|\psi(x)$$

Άρα από (1) και (2) ,$\varepsilon\kappa\pi\,(m_B(x), m_C(x)) = m_A(x)$

Τελευταίος ισχυρισμός (της Ιδιότητας 2): Άμεση Επαγωγή : Αν $A = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$
τότε $m(A)(x) = \varepsilon\kappa\pi\,(m_{B_1}(x), ..., m_{B_k}(x))$ και $m_{\lambda I_\nu} = (x - \lambda.)$

Θεώρημα 2.11.1. *Ενας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $m_A(x) =$γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.*

Απόδειξη
($\Rightarrow$) Έστω A διαγωνίσιμος . Τότε A όμοιος $diag(\lambda_1 I_{\nu_1}, ..., \lambda_k I_{\nu_1})$ όπου $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$. Από Ιδιότητα (1) και (2) ,$m_A(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$.

($\Leftarrow$) Έστω $m_A(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$ όπου $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$. Θα δείξουμ ότι : $\mathbb{F}^{\nu\times 1} = V_A(\lambda_1) + ... + V_A(\lambda_k)$.

Για το σκοπό αυτό , αρκεί να δείξουμε ότι : $\boxed{\mathbb{F}^{\nu\times 1} \subseteq V_A(\lambda_1) + ... + V_A(\lambda_k)}$
Θέτουμε $a_i(x) = \prod_{j\neq i}(x - \lambda_j \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, ..., k)$
Π.χ για $k = 3$:$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, τότε $a_1(x) = (x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, $a_2(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_3)$, $a_3(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. Παρατηρούμε ότι $\mu\kappa\delta\,(a_1(x), ..., a_k(x)) = 1$.
Άρα υπάρχουν $b_1(x), ..., b_k(x) \in \mathbb{F}[x]$ με
$1 = a_1(x)b_1(x) + ... + a_k(x)b_k(x)$. Άρα $I_\nu = a_1(A)b_1(A) + ... + a_k(A)b_k(A)$. Συνεπώς για κάθε $X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ έχουμε

$$X = a_1(A)b_1(A)X + ... + a_k(A)b_k(A)X.$$

Θα δείξουμε ότι $a_i(A)b_i(A)X \in V_A(\lambda_i)$:
Πράγματι έχουμε $\underbrace{(A - \lambda I_{nu})a_i(A)}_{=m_A(A)=0(*)} = 0\ (*)$ αφού $\forall i, j, (A - \lambda I_i)(A - \lambda I_j) = (A - \lambda I_i)(A - \lambda I_j)$.

2.12 Ελάχιστο Πολυώνυμο Γραμμικής Απεικόνισης

Ορισμός 2.12.1. *Έστω $f : V :\to V$ γραμμική απεικόνιση και $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V. Το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι : $m_f(x) = m_A(x)$, όπου $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$*

Ιδιότητες
(1) Αν $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\phi(f) = 0$, τότε $m_f(x)|\phi(x)$. Ειδικά , $m_f(x)|\chi_f(x)$
(2) Τα $m_f(x), \chi_f(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.
Βασικό Θεώρημα: (1) f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν $m_f(x) =$ με γινόμενο μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.
Απόδειξη ιδιοτήτων

Έστω $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Ξέρουμε $(\phi(f) : \hat{a}, \hat{a}) = \phi(A)$. Αν $\phi(f) = 0, \Rightarrow \phi(A) = 0 \Rightarrow m_A(x)|\phi(x) \Rightarrow m_f(x)|\phi(x)$.
(2) Άμεσο από αυτά που ξέρουμε για πίνακες.

Απόδειξη Βασικού Θεωρήματος : Άμεσο από το ότι f διαγωνίσιμη αν και μόνο αν A διαγωνίσιμος.

2.12α΄ Ασκήσεις

- (1) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (3x+y+2z, 4y+z, y)$. Να υπολογιστεί το $m_f(x)$ και να εξεταστεί αν η f είναι διαγωνίσιμη.

Λύση

Έστω $\hat{e}$ η συνήθεις βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε $A = (f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, κατά τα γνωστά βρίσκουμε $\chi_A(x) = -(x-3)^2(x-1)$. Άρα $m_f(x) = \begin{cases} (x-3)^2(x-1) & \text{ή} \\ (x-3)(x-1) \end{cases}$ αφού $m_f(x)|\chi_A(x)$ και $m_f(x), \chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες .Έχουμε $(A-3I_3)(A-I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. Άρα $m_A(x) = (x-3)^2(x-1)$. Άρα $m_f(x) = (x-3)^2(x-1)$. Από το Βασικό Θεώρημα η f δεν είναι διαγωνίσιμη.

- (2) (η άσκηση 5.5 του βιβλίου). Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], f(\phi(x)) = \phi'(x) - 2\phi(x)$

  (i) Να βρεθεί το $m_f(x)$ και να εξεταστεί αν η f είναι διαγωνίσιμη.

  (ii) Βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου της f.

  Λύση

  (i) Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{a} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ και υπολογίζουμε το $A = (f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

  Εδώ $\chi_A(x) = -(x+2)^3$. Επειδή $m_A(x)|\chi_A(x)$ $m_A(x) = \begin{cases} (x+2)^3 & \text{ή} \\ (x+2)^2 & \text{ή} \\ (x+2) \end{cases}$ <u>Υπολογισμός του $m_A(x)$:</u>

  Με πράξεις έχουμε $(B+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Άρα $m_A(x) = (x+2)^3$. Επειδή $m_f(x) = (x+2)^3$, έπεται ότι η f είναι διαγωνίσιμη

  (ii) $dimV_F(-2) = 3 - rank\,(A-(-2)I_3) = 3 - rank\,(A+2I_3) = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$.

- (3) (η άσκηση 5.6 του βιβλίου). Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με

  $$(A+3I_\nu)(A-4I_\nu)(A+7I_\nu) = 0$$

  (i) Είναι ο A διαγωνίσιμος ;

  (ii) Είναι ο A αντιστρέψιμος ;

  (iii) Να βρεθούν οι A με $\det A = 64$ ο A

  Λύση
  (i) Έστω $\phi(x) = (x+3)(x-4)(x+7)$. Τότε $\phi(A) = 0$ από υπόθεση . Άρα

$m_A(X)|\phi(x)$. Επειδή $\phi(x) =$ γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{C}[x]$, το ίδιο συμβαίνει για το $m_A(X)$. Άρα A διαγωνίσιμος.
(ii) Από $\phi(A) = 0$ οι πιθανές ιδιοτιμές του A είναι οι $-3, 4, -7$ Άρα 0 όχι ιδιοτιμή του A, δηλαδή A αντιστρέψιμος .
(iii) Ξέρουμε ότι $\det A =$ γινόμενο ιδιοτιμών του A. Επειδή οι πιθανές ιδιοτιμές του A είναι $-3, 4, -7$ έχουμε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 ... \lambda_\nu = 64$ όπου $\lambda_i \in \{-3, 4, -7\}$. Άρα $\nu = 3$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Από (i) , ο A είναι διαγωνίσιμος . Άρα ο A είναι όμοιος με το $diag(4, 4, 4) = 4I_3$.Συνεπώς $A = 4I_3$.

- (4) (η άσκηση 5.7του βιβλίου). Να καθοριστούν οι $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A^3 - 3A^2 + 2I_\nu = 0$ και $TrA = 6$.
  Λύση:
  Έχουμε $\phi(A) = 0$, όπου $\phi(x) = x(x-1)(x+2)$. Άρα $m_A(X)|\phi(x)$., οπότε γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$ συνεπώς ο A είναι διαγωνίσιμος. οι πιθανες ιδιοτιμές του A είναι οι ιδιοτιμές του $\phi(x)$ δηλαδή $0, 1, 2$. Άρα ο A είναι όμοιος με τον $diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,)$ όπθ $\lambda_i \in \{0, 1, 2\}$. Από $Tr(A) = 6$ έχουμε $6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Τότε A είναι όμοιος με το $diag(2, 2, 2) = 2I_3$.Συνεπώς $A = 2I_3$.

- (5) (η άσκηση 5.11 του βιβλίου). Να δείξετε ότι $m_A(x) = m_{A^t}(x)$
  Λύση:
  Έχουμε $\forall \phi(x) \in \mathbb{F}[x]$, $(\phi(A))^t = \phi(A^t)$ (γιατί;) Άρα $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow \phi(A^t) = 0$. Συνεπώς $m_A(x) = m_{A^t}(x)$

- (6) (η άσκηση 5.12 του βιβλίου). Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $W_A \leq \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ που παράγεται από τα $I_\nu, A, A^2, ...$ Δείξτε ότι $dimW_A = \deg m_A(x)$ Λύση:
  Έστω $k = \deg m_A(x)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{I_\nu, A, A^2, ..., A^{k-1}\}$ είναι βάση του W_A :

- <u>Γραμμικά Ανεξάρτητα:</u> Αν υπάρχουν $c_i \in \mathbb{F}$ με $c_0 I_\nu + c_1 A + ... + c_{k-1}A^{k-1} = 0$. Τότε Άρα $\phi(A) = 0$ όπου $\phi(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_{k-1}x^{k-1}$. Αλλά $\deg m_A(x) = k$. Επειδή $\deg \phi(x) < k$ παίρνουμε $\phi(x) = 0$, δηλαδή $c_i = 0$. Για κάθε i $m_A(X)|\phi(x)$.

- <u>Παράγουν τον W_A:</u> Έστω $B \in W_A$. Τότε $B = \phi(A)$ για κάποιο $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ Από την <u>Ευκλείδεια διαίρεση</u> υπάρχουν $q(x), r(x)$ με $\phi(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$ και $\deg r(x) < k$ τότε $\phi(A) = q(A)m_A(A) + r(A) = r(A)$, δηλαδή $\phi(A) = r_0 I_\nu + r_1 A + ... + r_{k-1}A^{k-1}$. Δηλαδή B γραμμικός συνδυασμός των $I_\nu, A, A^2, ..., A^{k-1}$.

- (7) (η άσκηση 5.13 του βιβλίου). Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $D \in \mathbb{F}^{2\nu\times 2\nu}$ $D = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & C \end{pmatrix}$

  (i) Αν D διαγωνίσιμος, τότε A, C διαγωνίσιμοι

(ii) Αληθεύει το αντίστροφο του (i) ;

Λύση:

(i) Ξέρουμε ότι $\forall \phi(x) \in \mathbb{F}[x], \phi(A)\begin{pmatrix} \phi(A) & 8 \\ \mathbf{O} & \phi(C) \end{pmatrix}$. Έστω $\phi(x) = m_D(x)$ και $m_C(x) = m_D(x)$. Από υπόθεση , D διαγωνίσιμος , δηλαδή $m_D(x) =$ γινόμενο διακεκριμένων μονίκών πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα το ίδιο ισχύει και για $m_A(x)$ και $m_C(x)$, δηλαδή A, C διαγωνίσιμοι .

(ii) (Αντιπαράδειγμα) : <u>δεν</u> ισχύει γενικά το αντίστροφο , π.χ : $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ή $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αν $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ παρατηρούμε $m_D(x) = x^2$, αν $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. τότε $m_D(x) = (x-1)^2$.

- (7) (η άσκηση 5.19 του βιβλίου). Να βρεθούν οι τιμές του $c \in \mathbb{R}$: το $f(x) = (x-3)^{2010}(x^{2009} - 5x + c)$ να μηδενίζεται από τον $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ Λύση:

  Έστω $k = \deg m_A(x)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{I_\nu, A, A^2, ..., A^{k-1}\}$ είναι βάση του W_A :

Σσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσς Λειπει κατισσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσσ

2.13 Διαγωνιοποίση Ερμιτιανών Πινάκων

Στη συνέχεια θέλουμε να ορίσουμε τις έννοιες ¨μήκος διανύσματος ' και κάθετα διανύσματα σε υπόχωρους του $\mathbb{R}^\nu$ και $\mathbb{C}^\nu$.

<u>Κίνητρο :</u>

Υπενθύμιση στο $\mathbb{R}^2$.

Το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ είναι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, και του $\overrightarrow{ON}$ είναι $|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Σχέση $\theta, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$:

Από το Νόμο συνημιτόνων έχουμε :

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 - 2|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\cos\theta, \tag{1}$$

επειδή $|\overrightarrow{MN}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\boxed{\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2} + \sqrt{v_1^2+v_2^2}}}$

<u>Συμπέρασμα :</u> στο $\mathbb{R}^2$, και το $\cos\theta$ και το μήκος διανύσματος εκφράζονται μέσω της συνάρτησης $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : ((u_1, u_2) \times (v_1, v_2)) \rightarrow u_1v_1 + u_2v_2$.

Ορισμός 2.13.1. *Το σύνηθες (ή κανονικό) εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^\nu$ *είναι η απεικόνιση* $\langle , \rangle : \langle u, v\rangle = u_1v_1 + ... + u_\nu v_\nu$, *όπου* $u = (u_1, ..., u_\nu), v = (v_1, ..., v_\nu)$. *Το μήκος του* u *είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός* $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_\nu^2}$.
Παρατήρηση : $|u|^2 = \langle u, u\rangle$

Ιδιότητες: Έστω $u, v \in \mathbb{R}^\nu, a \in \mathbb{R}$

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(iii) $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$

(iv) $\langle u, av\rangle = a\langle u, v\rangle$

(v) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(vi) $\langle u, u\rangle \geq 0$

(vii) $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Απόδειξη ενδεικτικά τη (ii)
Έχουμε $u = (u_1, ..., u_\nu), v = (v_1, ..., v_\nu), w = (w_1, ..., w_\nu)$.
Τότε $\langle u, v+w\rangle = u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+...+u_\nu(v_\nu+w_\nu) = \underline{u_1v_1}+u_1w_1+...+\underline{u_\nu v_\nu}+u_\nu w_\nu = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
Απόδειξη ενδεικτικά της (vii)
$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + ... + u_\nu^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = ... = u_\nu = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Παράδειγμα:
Έστω $u, v \in \mathbb{R}^\nu$ με $|u| = 1, |v| = 2, \langle u, v\rangle = -1$. Να βρεθεί το μήκος του $u + 3v$.
Έχουμε $|u + 3v|^2 = \langle u + 3v, u + 3v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, 3v\rangle + \langle 3v, u\rangle + \langle 3v, 3v\rangle = \langle u, u\rangle + 3\langle u, v\rangle + 3\langle v, u\rangle + 9\langle v, v\rangle = |u|^2 + 6\langle u, v\rangle + 9|v|^2 = 1 - 6 + 36 = 31$. Άρα $|u + 3v| = \sqrt{31}$.

- Ένας λάθος ορισμός στο $\mathbb{C}^2 : u = (u_1, u_2), v + (v_1, v_2)$. Μπορώ να θεωρήσω $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$; Αυτό δεν ισχύει γιατί για παράδειγμα αν θεωρήσουμε $u = \langle 1, -i\rangle$ τότε $\langle u, u\rangle = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$, δηλαδή το u θα είχε ¨μήκοσ' 0 αλλά $u \neq 0$.

Ορισμός 2.13.2. *Το σύνηθες (ή κανονικό) εσωτερικό γινόμενο στο* $\mathbb{C}^\nu$ *είναι η απεικόνιση* $\langle , \rangle : \mathbb{C}^\nu \times \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}, \langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + ... + u_\nu\overline{v_\nu}$, *όπου* $u = (u_1, ..., u_\nu), v = (v_1, ..., v_\nu)$. *Το μήκος του* u *είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός* $|u| = \sqrt{|u_1|^2 + ... + |u_\nu|^2}$, *όπου* $|u_i|$ *=το μέτρο του* $u_i \in \mathbb{C}, \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Ιδιότητες: Έστω $u, v \in \mathbb{R}^\nu, a \in \mathbb{R}$

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(iii) $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$

(iv) $\langle u, av\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle$

(v) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

(vi) $\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$ και $\langle u, u\rangle \geq 0$

(vii) $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Έστω $u, v \in \mathbb{C}^\nu$. Τότε $\underbrace{|\langle u, v\rangle|}_{*} \leq \overbrace{|u||v|}^{**}$ (όπου το το $*$ δηλώνει ότι μιλάμε για μέτρο μιγαδικού και το $**$ για μήκος διανύσματος).
Απόδειξη :
Αν $v = 0$ ισχύει . Έστω $v \neq 0$. Θεωρούμε το $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2} \cdot v$. Τότε $\langle w, w\rangle \geq 0$.
Υπολογίζουμε το $\langle w, w\rangle = \left\langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2} \cdot v, u - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2} \cdot v\right\rangle = \langle u, u\rangle - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{|v|^2}\langle u, v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\langle v, u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{|v|^2}\langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\langle v, u\rangle = \langle u, u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{|v|^2}\overline{\langle u, v\rangle} = \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{|v|^2} = \frac{|u|^2|v|^2 - |\langle u,v\rangle|^2}{|v|^2}$.
Δηλαδή αρκεί

$$(|u||v|) - |\langle u, v\rangle|^2 \geq 0,$$

οπότε $|u||v| \geq |\langle u, v\rangle|$

- Στον $\mathbb{R}^\nu$: $|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$, δηλαδή $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \leq 1, u, v \neq 0$. Άρα υπάρχει μοναδικό θ με $0 \leq \theta \leq \pi$ και $\cos\theta = frac\langle u, v\rangle|u||v|$. Το θ αυτό λέγεται <u>γωνία</u> των u και v. Τα u, v λέγονται <u>κάθετα</u> , αν $\langle u, v\rangle = 0$.

Ορισμός 2.13.3. *Έστω $u, v \in \mathbb{C}^\nu$. Τα u και v λέγονται <u>κάθετα</u> , αν $\langle u, v\rangle = 0$.*

Παραδείγματα:

(i) Ποια είναι η γωνία των $u, v \in \mathbb{R}^3$, όπου $u = (0, 5, 0), v = (3, 3, 0)$; $\langle u, v\rangle = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 15, |u| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5, |v| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}$. Άρα $frac\langle u, v\rangle|u||v| = \frac{15}{5\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα η γωνία είναι $\frac{\pi}{4}rad$.

(ii) Για ποιο $k \in \mathbb{R}$ τα $u = (1, k, 2), v = (-1, 1, k)$ είναι κάθετα ;
$\langle u, v\rangle = 1 \cdot (-1) + k \cdot 1 + 2 \cdot k = 3k - 1$. Άρα u, v κάθετα αν και μόνο αν $3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$.

(iii) Έστω $u, v \in \mathbb{R}^\nu$:

(α′) $\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ (για $\nu = 2$ εκφράζει το πυθαγόρειο θεώρημα) (β′) $|u| = |v| \Rightarrow \langle u+v, u-v\rangle = 0$

Για το (α')
$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = |u|^2 + 2\cdot\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0} + |v|^2 =$
$|u|^2 + |v|^2$
Για το (β')
$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle = |u|^2 - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - |v|^2 = 0$

σχήμα οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα

Κεφάλαιο 3

Ορθοκανονικές Βάσεις

Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{F}^\nu$. Μια βάση $\{u_1, u_2, ..., u_\nu\}$ του V λέγεται ορθοκανονική αν :

- $\langle u_i, u_i \rangle = 1, \forall i = 1, 2, ..., m$
- $\langle u_i, u_j \rangle = 0, \forall i \neq j$

Παράδειγμα :
Στον $\mathbb{R}^2$ οι παρακάτω βάσεις είναι ορθοκανονικές :

(i) $\{e_1, e_2\}$ όπου $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$

(ii) $\{u_1, u_2\}$ όπου $u_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), u_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(iii) $\{u_1, u_2\}$ όπου $u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

η χρησιμότητα της ορθοκανονικής βάσης φαίνεται στη παρακάτω Πρόταση

Πρόταση 3.0.4. *Έστω $\{u_1, u_2, ..., u_\nu\}$ ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου V ($V \subset \mathbb{F}^\nu$). Έστω $u \in V$. Τότε $u = \sum_{i=1}^{m} \langle u, u_i \rangle u_i$.*

Απόδειξη
Επειδή $\{u_1, u_2, ..., u_\nu\}$ βάση, υπάρχουν $a_i \in \mathbb{F}$ με $u = a_1 u_1 + ... + a_m u_m$. Υπολογίζουμε το $\langle u, u_i \rangle$: ,$\langle u, u_1 \rangle = a_1 \langle u_1, u_1 \rangle + a_2 \langle u_2, u_1 \rangle + ... + a_m \langle u_m, u_1 \rangle = a_1$. Όμοια $\langle u, u_i \rangle = a_i, \forall i = 1, 2, ..., m$

Παράδειγμα :
Δείξτε ότι το $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, όπου $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$. Να παρασταθεί το $u = (2, 1, 3)$ ως γραμμικός συνδυασμός

των u_i.
Λύση:
Με απλές πράξεις επαληθεύεται ότι το $\langle u_i, u_i\rangle = 1, \forall i = 1,2,3$. Για παράδειγμα $|u_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$. Επίσης $\langle u_i, u_j\rangle = 0, \forall i \neq j$. Για παράδειγμα $\langle u_1, u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 0 \cdot 1 = 0$. Τα u_1, u_2, u_3 είναι βάση :
1ος τρόπος: (άσκηση με βάσεις , για παράδειγμα αρκεί να δείξουμε ότι η ορίζουσα είναι διάφορη του 0)

-

Λήμμα 3.0.5. *Αν $u_1, u_2, ..., u_m \in \mathbb{F}^\nu$ ικανοποιούν :*

- $\langle u_i, u_j\rangle = 0, \forall i \neq j$.
- $u_i \neq 0, \forall i$.

Τότε τα u_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη :
Έστω $u = a_1u_1 + ... + a_mu_m = 0, a_i \in \mathbb{F}$. Τότε $0 = \langle 0, u_1\rangle = a_1\langle u_1, u_1\rangle + a_2\langle u_2, u_1\rangle + ... + a_m\langle u_m, u_1\rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, u_1\rangle}_{u_1 \neq 0} = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$. (Όμοια $a_i = 0, \forall i$
2ος τρόπος:(Με βάση το Λήμμα)
Από το λήμμα έπεται ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επειδή $dim\mathbb{R}^3 = 3$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Από τη Πρόταση $u = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 + \langle u, u_3\rangle u_3 = ... = \frac{3}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}u_2 + \frac{5}{\sqrt{6}}u_3$.

Θεώρημα 3.0.6. *Κάθε υπόχωρος του $\mathbb{F}^\nu$ έχει μια ορθοκανονική βάση .*

3.1 Μέθοδος Gram-Schmidt

Μέθοδος Gram-Schmidt: Από βάση του V κατασκευάζει ορθοκανονική βάση του V

Gram-Schmidt για διάσταση 3 :
Δεδομένο:$\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του V.
Εξαγόμενο:$\{\frac{u_1}{|u_1|}, \frac{u_2}{|u_2|}, \frac{u_3}{|u_3|}\}$ βάση του V.
Μέθοδος Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1}_{*}, u_3 = v_3 - \underbrace{\frac{\langle v_3, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1}_{**} - \underbrace{\frac{\langle v_3, u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2}_{***}.$$ Όπου :

- $*$ η προβολή του v_2 στο u_1

- $**$ η προβολή του v_3 στο u_1
- $***$ η προβολή του v_3 στο u_2

Υπολογισμός $\langle u_i, u_j \rangle$. Π.χ :
$\langle u_2, u_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1, u_1 \right\rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{|u_1|^2} \langle u_1, u_1 \rangle = 0$. Όμοια και οι άλλες περιπτώσεις .

Παραδείγματα :

(i) Να εκφραστεί η μέθοδος Gram-Schmidt στη βάση $v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1), v_3 = (2,2,1)$ του $\mathbb{R}^3$

(ii) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που $\boxed{\text{παράγεται}}$ από τα $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,1,-1), v_3 = (3,3,3,-1)$

(iii) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που $\boxed{\text{παράγεται}}$ από τα διανύσματα $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), v_2 = (0,0,1)$

Λύση : Για το (i)
Κατά Gram-Schmidt έχουμε :$u_1 = v_1 = (1,1,0)$
$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1 = (2,0,1) - \frac{2}{2}(1,1,0) = (1,-1,1)$
$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{|u_2|^2} u_2 = (2,2,1) - \frac{4}{2}(1,1,0) - \frac{1}{3}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(-1,1,2)$, επομένως $\frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση .
Για το (ii)
<u>1ο Βήμα:</u> Εύρεση βάσης

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου για να πάρουμε το δεύτερο πίνακα κάναμε τις γραμμοπράξεις $r_2 \to r_2 - r_1, r_3 \to r_3 - 3r_1$ ενώ για να πάρουμε το τρίτο κάναμε τις γραμμοπράξεις $r_2 \to -\frac{1}{2}r_2, r_3 \to r_3 - 2r_2$. Άρα μια βάση (του υπόχωρου V) είναι η $v_1' = (1,1,1,1), v_2' = (0,0,0,1)$

<u>2ο Βήμα:</u> Gram-Schmidt στη βάση v_1', v_2' του V
$u_1 = v_1' = (1,1,1,1)$
$u_2 = v_2' - \frac{\langle v_2', u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1 = (0,0,0,1) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(-1,-1,-1,3)$
Για το (iii)
<u>1ος τρόπος :</u> Θα βρούμε $v_3 = (x,y,z), v_3 \neq 0$, ώστε :
$\overline{\langle v_1, v_3 \rangle} = \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y = z = 0 \Leftrightarrow v_3 = (x,-x,0), x \neq 0$.
πχ :για $x = 1 \Rightarrow v_3 = (1,-1,0)$ τότε το $\frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ έχει μέτρο 1 και είναι κάθετο στα v_1, v_2. Άρα $v_1, v_2, \frac{v_3}{|v_3|}$ ορθοκανονική βάση (είναι βάση ως ορθογώνιο σύνολο

μη μηδενικών στοιχείων)
2ος τρόπος : Συμπληρώνουμε το σύνολο v_1, v_2 σε βάση v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^3$. (Όπως ξέρουμε από Γραμμική Άλγεβρα Ι) και σε αυτή εφαρμόζουμε Gram-Schmidt

3.2 Μοναδιαίοι πίνακες

σκοπός : Να δείξουμε ότι ειδικοί πίνακες διαγωνοποιούνται μέσω ‶άλλων ειδικών ' πινάκων. Οι ‶άλλοι ειδικοί ' είναι οι μοναδιαίοι πίνακες .

Ορισμός 3.2.1. *Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με $\overline{A}$ συμβολίζουμε τον $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$, όπου $\overline{a_{ij}}$ συζυγής του $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Με A^* συμβολίζουμε τον πίνακα $A^* = (A^*)^t$, όπου $()^t$ σημαίνει ‶ανάστροφος.'*

Π.χ: Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-4i \\ 5+6i & i \end{pmatrix}$, τότε $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3+4i \\ 5-6i & -i \end{pmatrix}$, και $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5-6i \\ 3+4i & -i \end{pmatrix}$,

Ιδιότητες: Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $c \in \mathbb{C}$

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(cA)^* = \overline{c}A^*$

(iii) $A^* = \overline{A^t}$

(iv) $(A^*)^* = A$

(v) $(AB)^* = B^*A^*$.

Απόδειξη ενδεικτικά των i και v
Για το i : Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), A+B = (c_{ij})$, όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. $(A+B)^* = (\overline{c_{ij}})^t = (\overline{c_{ji}})$. Επίσης $A^* = \overline{a_{ji}}, B^* = \overline{b_{ji}}$, άρα $A^* + B^* = (\overline{a_{ji}} + \overline{b_{ji}}) = (\overline{a_{ji} + b_{ji}}) = (\overline{c_{ji}})$.

Για το v.Από Γραμμική Ι γνωρίζουμε ότι $\boxed{(AB)^t = B^tA^t}$ με $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Επίσης ξέρουμε ότι $\overline{cd} = \overline{c}\overline{d}, \forall c, d \in \mathbb{C}$. Επομένως $(AB)^* = (\overline{AB})^t = (\overline{A}\cdot\overline{B})^t = (\overline{B})^t(\overline{A})^t = B^*A^*$.

Παρατήρηση 3.2.2. *Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος , τότε $(A^{-1})^* = (A*)^{-1}$*

Απόδειξη
Αφού A αντιστρέψιμος υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με $AB = BA = I_\nu$, άρα $B^*A^* = A^*B^* = I_\nu$, δηλαδή A^* αντιστρέψιμος και $(A^*)^{-1} = B^* = (A^*)^{-1}$

Ορισμός 3.2.3. *Ένας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ λέγεται μοναδιαίος αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^*$. (Ισοδύναμα αν $AA^* = A^*A = I_\nu$)*

Παραδείγματα :

- Ο ταυτοτικός πίνακας I_ν είναι μοναδιαίος αφού $I_\nu^* = I_\nu = I_\nu^{-1}$

- Ο $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος αφού $AA^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και όμοια $A^*A = I_2$

Παρατήρηση:
Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $AA^* = I_\nu$ τότε $A^*A = I_\nu$. Άρα αρκεί να επαληθεύσουμε μία από τις σχέσεις $AA^* = I_\nu, A^*A = I_\nu$.

- Έστω $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Τότε $AA^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ο πίνακας στο δεύτερο παράδειγμα ήταν ο παραπάνω για $\theta = 60°$. Γεωμετρικά, ο A στρέφει το επίπεδο κατά γωνία θ στη φορά $\circlearrowleft$ ΣΧΗΜΑ
Εδώ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ έχει πίνακα τον A ως προς τη συνήθη βάση $\{e_1, e_2\}$ του $\mathbb{R}^2$.
$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

- Με όμοιο τρόπο , ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (ανάκλαση ως προς την ευθεία που έχει γωνία $\theta/2$) είναι μοναδιαίος
ΣΧΗΜΑ

- Ο $\begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος .
Π.χ: αν $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $AA^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

- **Σχέση μοναδιαίων πινάκων με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο .**

Θα δουλεύουμε στήλες : αν $X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\nu \end{pmatrix}$, τότε :

$$\langle X, Y\rangle = x_1\overline{y_1} + ... + x_\nu\overline{y_\nu}$$

Παρατήρηση :

$$\langle X, Y\rangle = \underbrace{X^t}_{1\times\nu}\underbrace{\overline{Y}}_{\nu\times 1}$$

(γινόμενο πινάκων)

Λήμμα 3.2.4. *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$

(1) $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$

(2) *Αν* $\langle AX, Y\rangle = 0, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$, *τότε* $A = 0$.

Απόδειξη:
Για το (1) . Από την παρατήρηση , $\langle AX, Y\rangle = (AX)^t\overline{Y} = X^tA^t\overline{Y}$, επίσης $\langle X, A^*Y\rangle = X^t(\overline{A^*Y}) = X^t\overline{A^*}\overline{Y} = X^t(\overline{\overline{A^t}})\overline{Y} = X^tA^t\overline{Y}$ και το ζητούμενο έπεται.
Για το (2) . Αν $A \neq 0$, τότε $\exists X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$ με $AQ \neq 0$. Πράγματι , αν $a_{ij} \neq 0$ για κάποια i, j τότε $AE_j = a_{ij}E_j \neq 0$. (Διαφορετικά, αν $AX = 0, \forall X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$ η γραμμική απεικόνιση $\gamma_A : C^{\nu\times 1} \to \mathbb{C}^{\nu\times 1}, X \to AX$ είναι η μηδενική απεικόνιση .Άρα $A = 0$.) Τότε $\langle AX, AX\rangle = 0$ από υπόθεση . Άρα $AX = 0$ από ιδιότητα του $\langle , \rangle$, <u>άτοπο.</u>

Πρόταση 3.2.5. *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε* A *μοναδιαίος αν και μόνο αν*

$$\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$$

Απόδειξη:

$\langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1} \Leftrightarrow \langle AA^*X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle, \forall X, Y \Leftrightarrow \langle AA^*X - X, Y\rangle = 0, \forall X, Y \Leftrightarrow \langle (AA^* - I_\nu)X, Y\rangle = 0, \forall X, Y \Leftrightarrow AA^* - I_\nu = 0 \Leftrightarrow A$ μοναδιαίος .
Όπου για την τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε το λήμμα.

Πόρισμα 3.2.6. *Έστω* A *μοναδιαίος . Τότε :*

(1) $|AX| = |X|, \forall X, \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$

(2) *Αν* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ιδιοτιμή του* A *τότε* $|\lambda| = 1$.

Απόδειξη:
Για το (1). Από την πρόταση για $X = Y$: $\langle AX, AX\rangle = \langle X, X\rangle \Rightarrow |AX|^2 = |X|^2 \Rightarrow |AX| = |X|$.

Για το (2). Υπάρχει $X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}, X \neq 0$ τέτοιο ώστε $AX = \lambda X$ από το (1) έχουμε $|\lambda X| = |X| \Rightarrow |\lambda||X| = \underbrace{|X|}_{X\neq 0} \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Παρατήρηση :
Αν A μοναδιαίος , τότε $|\det A| = 1$. (Από το ότι $\det A = \lambda_1 ... \lambda_\nu$ και το (2) του Πορίσματος .)

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(1) A *μοναδιαίος .*

(2) *Οι στήλες του* A *είναι ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$

(3) *Οι γραμμές του* A *είναι ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{C}^{\nu}$

Π.χ: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Το σύνολο $\{X, Y\}$, όπου $X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Παρατήρηση :

Αν $A, B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, τότε $A \times B = I_\nu \Leftrightarrow \langle A_i^t, \overline{B}^{(j)} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{i=j} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Απόδειξη του Θεωρήματος

A μοναδιαίος $\Leftrightarrow A^*A = I_\nu \Leftrightarrow \langle A^{(i)}, \overline{A}^{(j)} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{i=j} \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overline{\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{i=j} \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases} \Leftrightarrow \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{i=j} \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

$\Leftrightarrow A^{(1)}, \ldots A^{(\nu)}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$.

Π.χ:Για $\nu = 2 : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A μοναδιαίος $\Rightarrow A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}a + \overline{c}c = 1 \rightarrow & \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ έχει μήκος 1} \\ \overline{a}b + \overline{c}d = 0 \rightarrow, & \left\langle \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \overline{b}a + \overline{d}c = 0 & . \\ \overline{b}b + \overline{d}d = 1 \rightarrow & \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ έχει μήκος 1} \end{cases}$$

Π.χ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ μοναδιαίος από το Θεώρημα.

Παράδειγμα:

Να συμπληρωθεί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ σε μοναδιαίο πίνακα.

Λύση :

Η πρώτη γραμμή έχει μήκος 1 , άρα $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

<u>1ος τρόπος</u>: Επεκτείνουμε το σύνολο $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$ σε βάση του $\mathbb{R}^3$, π.χ :$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0,0,1), (0,1,0) \right\}$ και σε αυτή εφαρμόζουμε Gram-Schmidt. Με πράξεις θα βρούμε $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$

<u>2ος τρόπος</u>:Αν $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, τότε η 1η γραμμή και 2η γραμμή δίνουν $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$, κλπ. (και λύνουμε το σύστημα .)

Παραδείγματα-Ασκήσεις:

(1) Αν A, B μοναδιαίοι , τότε AB και AB^{-1} μοναδιαίοι
Λύση
$A^*A = AA^* = I_\nu \Rightarrow (A^*A)^{-1} = (AA^*)^{-1} = I_\nu^{-1} = I_\nu \Rightarrow A^{-1}(A^*)^{-1} = (A^*)^{-1}A^{-1} = I_\nu \Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^{-1} = I_\nu \Rightarrow A^{-1}$ μοναδιαίος . Έστω A, B μοναδιαίοι . $(AB)^*(AB) = B^*(A^*A)B = B^*B = I_\nu \Rightarrow AB$ μοναδιαίος. Από πριν , AB^{-1} μοναδιαίος (ως γινόμενο μοναδιαίων)

(2) Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$

(α′) Αν $\det A = 1$ και ν περιττός, τότε 1 ιδιοτιμή του A.
(β′) Αν $\det A = -1$ και ν άρτιος, τότε 1 ιδιοτιμή του A.
(γ′) Αν $\det A = -1$, τότε -1 ιδιοτιμή του A.

Λύση
Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A, ξέρουμε $|\lambda| = 1$..Άρα αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda = \pm 1$. Καταγράφουμε όλες τις ιδιοτιμές του A στο $\mathbb{C}$:
$\underbrace{1, ..., 1}_{a}, \underbrace{-1, ..., -1}_{b}, \underbrace{\mu_1, ..., \mu_k}_{k}, \underbrace{\overline{\mu_1}, ..., \overline{\mu_k}}_{k}$. $(\mu_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$ Με $a + b + 2k = \nu, a \geq 0, b \geq 0, k \geq 0$. Επίσης $\det A = 1^a(-1)^b|\mu_1|^2...|\mu_k|^2 = (-1)^b$.
(α') $\det A = 1 \Rightarrow b$ άρτιος,ν περιττός άρα $a + b$ περιττός,άρα a περιττός $\Rightarrow a \neq 0$
(β') $\det A = -1 \Rightarrow b$ περιττός,ν περιττός άρα $a + b$ άρτιος ,άρα a περιττός $\Rightarrow a \neq 0$
(γ') $\det A = -1 \Rightarrow -1 = (-1)^b \Rightarrow b \neq 0$.
Σχόλιο: Για $\nu = 3$. Αν A
$\overline{in}\mathbb{R}^{3\times 3}$ μοναδιαίος, τότε 1 ιδιοτιμή του A. (Θ.Euler).
(Δηλαδή κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ έχει άξονα συμμετρίας).

(3) Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, ικανοποιεί την $|AX| = |X|, \forall X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$, τότε A μοναδιαίος
Λύση

$|A(X + Y)| = |X + Y| \Rightarrow \langle A(X + Y), A(X + Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \Leftrightarrow \langle AX, AX\rangle + \langle AX, AY\rangle + \langle AY, AX\rangle + \langle AY, AY\rangle = \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle \Leftrightarrow \langle AX, AY\rangle + \langle AY, AX\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle$. έπεται λοιπόν

$$(1) \qquad \langle AX, AY\rangle + \langle AY, AX\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle$$

Στην (1) βάζουμε iY στη θέση του U : $\langle AX, AiY\rangle + \langle iAY, AX\rangle = \langle X, iY\rangle + \langle iY, X\rangle$ άρα

$$(2) \qquad -i\langle AX, AY\rangle + i\langle AY, AX\rangle = -i\langle X, Y\rangle + i\langle Y, X\rangle$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με i και προσθέτουμε στην (2). Τότε :
$-2i\langle AX, AY\rangle = -2i\langle X, Y\rangle \Rightarrow \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$. Άρα A μοναδιαίος από Πρόταση.

3.3 Φασματικό Θεώρημα

Ορισμός 3.3.1. *Ένας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ λέγεται Ερμιτιανός αν $A = A^*$*

Παραδείγματα:

(1) Οι πραγματικοί $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ είναι ακριβώς οι συμμετρικοί πίνακες .
Απόδειξη
Αν $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$, τότε $A^* = A \Leftrightarrow (\overline{A})^t = A \Leftrightarrow A^t = A$. Αφού $(A = \overline{A})$

(2) Ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 5 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός, αφού $A^* = (\overline{A})^t = \begin{pmatrix} 2 & 3-4i \\ 3+4i & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 5 \end{pmatrix}$

(3) Ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 3+4i \\ 3+4i & 5 \end{pmatrix}$ δεν είναι Ερμιτιανός αφού $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3-4i \\ 3-4i & 5 \end{pmatrix} \neq A$

(4) Αν A Ερμιτιανός τότε κάθε διαγώνιο στοιχείο του είναι είναι πραγματικός αριθμός αφού αν $A = (a_{ij})$, από $A = A^*$ παίρνουμε $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ οπότε $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ Ερμιτιανός . Τότε κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός .*

Απόδειξη
Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ Ερμιτιανός ,$\lambda \in \mathbb{C}$ με $AX = \lambda X, X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}, X \neq 0$.
Ξέρουμε ότι ($\forall A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $\forall X, U \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$): $\boxed{\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle.}$ Εδώ $A^* = A$. Άρα $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$ και θέτοντας $X = Y$ έπεται $\langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle \Rightarrow \langle \lambda X, X\rangle = \langle X, \lambda X\rangle \Rightarrow \lambda\langle X, X\rangle = \overline{\lambda}\underbrace{\langle X, X\rangle}_{X\neq 0} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα:
$\forall A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}, \det(A + A^* - iI_\nu) \neq 0$ Απόδειξη Πράγματι ο $A + A^*$ είναι Ερμιτιανός αφού $(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A$. Άρα κάθε ιδιοτιμή του $A + A^*$ είναι πραγματική . Επομένως $\det(A + A^* - iI_\nu) \neq 0$ γιατί αλλιώς το $i \notin \mathbb{R}$ θα ήταν ιδιοτιμή του $A + A^*$.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ Ερμιτιανός και $\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμή του Aμε αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα X, Y. Τότε $\langle X, Y\rangle = 0$.*

Απόδειξη
Έστω Ερμιτιανός με $AX = \lambda X, X \neq 0, AU = \lambda U, U \neq 0, \lambda \neq \mu$. Έχουμε $A = A^*$. Τότε έχουμε $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle = \langle X, AY\rangle \Rightarrow \lambda\langle X, Y\rangle = \overline{\mu}\langle X, Y\rangle \Rightarrow (\lambda - \overline{\mu})\langle X, Y\rangle = 0$. Από την προηγούμενη Πρόταση $\overline{\mu} = \mu$ και άρα $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\lambda\neq\mu}\langle X, Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle X, Y\rangle = 0$.

Παραδείγματα:

(1) ΈΣτω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Με συνήθεις πράξεις βρίσκουμε $\chi_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$. Επίσης $V_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Βλέπουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ και τα $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι κάθετα.

(2) Να βρεθεί συμετρικός $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ιδιοτιμές 1 και 2 και $V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Επειδή ο A είναι 2×2 και έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνίσιμος , δηλ. υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Η πρώτη στήλη του P μπορεί να επιλεγεί να είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Από την Πρόταση (2;) επιλέγουμε τη δεύτερη στήλη του P να είναι $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Τα δύο διανύσματα να είναι κάθετα .) Άρα $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ...$ κάνουμε πράξεις και επαληθεύουμε ότι είναι συμμετρικός .Άρα βρήκαμε $\boxed{\text{μια επιλογη}}$ για τον A.

- Σχόλιο : Ο $U^{-1}AU$ είναι Ερμιτιανός αν : U μοναδιαίος και A πραγματικός διαγώνιος. Πράγματι $(U^{-1}AU)^* = U^*A^*(U^{-1})* = U^{-1}AU$.

(3) Έστω U μοναδιαίος με $\det(U - I_\nu) \neq 0$. Έστω H ο πίνακας που ορίζεται από τη σχέση $iH = (U + I_\nu)(U - I_\nu)^{-1}$.Τότε κάθε ιδιοτιμή του H είναι στο $\mathbb{R}$. Από Πρόταση (1;) αρκεί να δείξουμε ότι ο H είναι Ερμιτιανός , δηλαδή : αρκεί να δείξουμε ότι $H = H^*$ ισοδύναμα: $\left[(U + I_\nu)(U - I_\nu)^{-1}\right]^* = \left[(U - I_\nu)^{-1}\right]^* (U + I_\nu)^* = \left[(U - I_\nu)^*\right]^{-1} (U + I_\nu)^* = \left[(U^* - I_\nu)\right]^{-1} (U^* + I_\nu) = \left[(U^{-1} - I_\nu)\right]^{-1} (U^{-1} + I_\nu)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$-(U + I_\nu)(U - I_\nu)^{-1} = (U^{-1} - I_\nu)^{-1}(U^{-1} + I_\nu) \Leftrightarrow -(U^{-1} - I_\nu)(U + I_\nu) = (U^{-1} + I_\nu)(U - I_\nu) \Leftrightarrow -(I_\nu + U^{-1} + U - I_\nu) = (I_\nu - U^{-1} - U - I_\nu)$ το οποίο αληθεύει.

Θεώρημα 3.3.4. *Φασματικό Θεώρημα*

(1) *Έστω $H \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ Ερμιτιανός . Τότε υπάρχει μοναδιαίος U : $U^{-1}HU$ να είναι διαγώνιος πραγματικός .*

(2) *Έστω $S \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ συμμετρικός . Τότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ μοναδιαίος με $P^{-1}SP$ διαγώνιος πραγματικός*

Για την απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Schur :

Θεώρημα 3.3.5. ***Schur***

(1) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Τότε υπάρχει μοναδιαίος $U : U^{-1}AU$ να είναι άνω τριγωνικός .*

(2) *Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$: το $\chi_A(x)$ να είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Τότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ μοναδιαίος με $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός .*

Σκιαγράφηση της απόδειξης ότι κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι τριγωνίσιμος .

- Υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in C$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα u_1
- Υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ της μορφής $\{u_1, ...u_\nu\}$. Θέτουμε P ο πίνακας με i- στήλη το u_i . Τότε $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right)$
- Εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση στο B_1 : Υπάρχει $P_1 \in \mathbb{C}^{(\nu-1)\times(\nu-1)}$ αντιστρέψιμος : $P_1^{-1}B_1P_1$ να είναι άνω τριγωνικός
- Για $U = P\left(\begin{array}{c|c} 1 & O_{1\times\nu-1} \\ \hline O_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right)$ έχουμε $U^{-1}AU$ ότι είναι τριγωνικός.

Σκιαγράφηση της απόδειξης του Λήμματος του Schur (αλλαγές σε πλαίσιο) .

- $\boxed{u_1 \to \frac{u_1}{|u_1|}}$ (το μήκος του διανύσματος)
- Υπάρχει $\boxed{\text{ορθοκανονική}}$ βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ της μορφής $\{u_1, ...u_\nu\}$. Θέτουμε P ο πίνακας με i- στήλη το $\frac{u_1}{|u_1|}$. Τότε $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right)$. Τότε P $\boxed{\text{μοναδιαίος}}$
- Εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση στο B_1 : Υπάρχει $P_1 \in \mathbb{C}^{(\nu-1)\times(\nu-1)}$ αντιστρέψιμος : $P_1^{-1}B_1P_1$ να είναι άνω τριγωνικός
- Για $U = P\left(\begin{array}{c|c} 1 & O_{1\times\nu-1} \\ \hline O_{\nu-1\times 1} & B_1 \end{array}\right)$ έχουμε $U^{-1}AU$ ότι είναι τριγωνικός και επιπλέον $\boxed{U \text{ μοναδιαίος}}$ (ως γινόμενο μοναδιαίων πινάκων).

Π.χ: Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Να βρεθεί αν υπάρχει πραγματικός μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $U^{-1}AU$ να είναι άνω τριγωνικός

Λύση :

Έχουμε $\chi_A(x) = (x-1)^2$. Με πράξεις , $V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Θέτουμε $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$(που έχει μήκος 1) . Βρίσκουμε (π.χ με Gram-Schmidt ή αλλιώς) την ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2\}$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, όπου $u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Θέτουμε $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Τότε U μοναδιαίος και ξέρουμε ότι $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος :

(1) Έστω A Ερμιτιανός . Από το (1) του Λήμματος Schur υπάρχει μοναδιαίος U : $U^{-1}AU = T$ τριγωνικός ($T \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$). A Ερμιτιανός $\Rightarrow A^* = A \Rightarrow T^* = (U^{-1}AU)^* = U^*A^*(U^{-1})^* = U^{-1}A^*U = U^{-1}AU = T$ Δηλαδή $T^* = T$. Επειδή ο T είναι άνω τριγωνικός ο T^* είναι κάτω τριγωνικός . Από $T^* = T$ έπεται ο T είναι διαγώνιος και επιπλέον για τα διαγώνια στοιχεία λ_i του T ισχύει $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$ δηλαδή $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Άρα T είναι διαγώνιος πραγματικός .

(2) αφήνεται ως άσκηση **Παρατήρηση:**

Στο τελευταίο βήμα της απόδειξης είδαμε ότι οι ιδιοτιμές Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικές.

Παράδειγμα :

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Θα βρούμε πραγματικό μοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος. Επειδή A πραγματικός συμμετρικός , από το Φασματικό Θεώρημα (2) υπάρχει U μοναδιαίος πραγματικός με $U^{-1}AU$ διαγώνιος . Με συνήθεις πράξεις βρίσκουμε $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-4)$, $V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.,$V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Παρατήρηση:

Ξέρουμε ότι σε διαφορετικές $\lambda \neq \mu$ Ερμιτιανού πίνακα αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα. Συνεπώς μπορούμε , προκειμένου να βρούμε ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα , να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt σε κάθε ιδιόχωρο ξεχωριστά.

Gram-Schmidt στον $V_A(1)$: Με πράξεις βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση του $V_A(1)$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$. Επίσης μια ορθοκανονική βάση του $V_A(4)$ είναι : $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

Θέτουμε $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Τότε :

- οι στήλες του U είναι ιδιοδιανύσματα του A.
- Οι στήλες του U είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1.}$

Άρα $U^{-1}AU = diag(1,1,4)$ και U μοναδιαίος .

Ασκήσεις

(1) Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ συμμετρικός που δεν είναι της μορφής cI_ν . Αν $(A-2I_\nu)^3(A-3I_\nu)^4 = 0$ να βρεθεί το $m_A(x)$.

(2) Αν $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ συμμετρικός με την ιδιότητα $A^k = I_\nu$ τότε $A^2 = I_{nu}$. Αν επιπλέον $TrA = 0$, τότε ν άρτιος.

(3) Σωστό ή Λάθος;

(α′) $\forall a \in \mathbb{R}$ η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ίση με 3 .

(β′) Αν $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ συμμετρικός με $A^k = 0$, τότε $A = 0$.

(γ′) Αν A συμμετρικός , $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με $\chi_A(x) = x^2(x-1)^2$, τότε υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητοι $X, Y \in \mathbb{R}^{4\times 1} : AX = AY = 0$.

Λύσεις :

(1)Ξέρουμε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος (από το Φασματικό Θεώρημα). Άρα $m_A(x)$ είναι γινόμενο μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Συνεπώς , από $(A-2I_\nu)^3(A-3I_\nu)^4 = 0$ έπεται ότι $m_A(x) = \begin{cases} x-2 & \text{ή} \\ x-3, & \text{ή} \\ (x-2)(x-3), \end{cases}$ Οι δύο πρώτες περιπτώσεις απορρίπτονται αφού $A \neq cI_\nu$. Άρα $m_A(x) = (x-2)(x-3)$

(2) Από Φασματικό Θεώρημα ο A είναι όμοιος με $diag(\lambda_1, ..., \lambda_\nu), \lambda_i \in \mathbb{R}$. Από $A^k = I_\nu$ έπεται ότι $\lambda_i^k, \forall i$ οπότε $\lambda_i \in \{1, -1\}, \forall i$. Τότε $\lambda_i^2 = 1$. Άρα ο A^2 είναι όμοιος με τον $diag(\lambda_1^2, ...\lambda_\nu^2) = I_\nu$. Άρα $A^2 = I_\nu$. Άρα $A^2 = I_\nu$. Αν $TrA = 0$, τότε $\sum_i \lambda_i = 0$. Επειδή $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, τότε ν άρτιος.

(3ι)<u>Σωστό </u>[Από Φασματικό Θεώρημα]:Ο A είναι πραγματικό συμμετρικός $\forall a \in \mathbb{R}$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος ($\forall a \in \mathbb{R}$), οπότε η διάσταση του υπόχωρου που παράγεται απ'τα ιδιοδιανύσματα είναι ίση με 3 .

(3ιι)Σωστό Ο A είναι διαγωνίσιμος [Από Φασματικό Θεώρημα] και κάθε ιδιοτιμή του είναι ίση με 0, από $A^k = 0$. Άρα A όμοοιος με τον O, δηλαδή $A = 0$.

(3ιιι)Σωστό Ο A είναι διαγωνίσιμος [Από Φασματικό Θεώρημα] .Άρα $dimV_A(0) = m(0) = 2$. Δηλαδή υπάρχουν $X, Y \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ γραμμικά ανεξάρτητα : $Q, U \in V_A(0)$ δηλαδή $(AX = AY = 0.)$

3.4 Κανονικοί Πίνακες

Κίνητρο: Ξέρουμε ότι αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι Ερμιτιανός , τότε υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ μοναδιαίος ώστε $U^{-1}AU(1)$ είναι διαγώνιος.

Ερώτημα: Ποιοί $A \in {}^{\nu\times\nu}$ έχουν την ιδιότητα (1).
Ανάλυση της (1): Έστω $A \in {}^{\nu\times\nu}$ ώστε να ισχύει η (1). Δηλαδή $U^{-1}AU = D, D \in {}^{\nu\times\nu}$ D διαγώνιος , U μοναδιαίος .Τότε $A = UDU^{-1} \Rightarrow A^* = (U^{-1})^* D^* U^* = UD^*U^{-1}$. Άρα $AA^* = UDU^{-1}UD^*U^{-1} = UDD^*U^{-1}$ και $A^*A = UD^*U^{-1}UDU^{-1} = UD^*DU^{-1}$. Επειδή D είναι διαγώνιος, $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_\nu)$, έχουμε $DD^* = diag(\lambda_1, ...\lambda_\nu)diag(\overline{\lambda_1}, ...\overline{\lambda_\nu})$, και $D^*D = diag(\overline{\lambda_1}, ...\overline{\lambda_\nu})diag(\lambda_1, ...\lambda_\nu)$. Παρατηρούμε ότι $DD^* = D^*D$. Τότε έπεται ότι $\boxed{AA^* = A^*A}$.
Συμπέρασμα: Αν ισχύει η συνθήκη (1), τότε $AA^* = A^*A$.

Ορισμός 3.4.1. *$A \in {}^{\nu\times\nu}$ λέγεται κανονικός αν $AA^* = A^*A$.*

Παραδείγματα :

(1) Κάθε διαγώνιος πίνακας A είναι κανονικός .Αυτό έπεται άμεσα (δηλαδή $AA^* = A^*A$)

(2) Κάθε Ερμιτιανός πίνακας είναι κανονικός . Πράγματι , αν $A^* = A$, τότε $A^*A = AA = AA^*$

(3) Κάθε μοναδιαίος είναι κανονικός .Αν $U^* = U^{-1}$, τότε $UU^* = I_\nu = U^*U$.

(4) ο $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2+3i \end{pmatrix}$ δεν είναι κανονικός , αφού $AA^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i+3 \\ 2-2i+3 & 13 \end{pmatrix}$ και $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 2-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

(5) ο $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2+3i \end{pmatrix}$ είναι κανονικός αφού $AA^* = A^*A$ (απλά κάνουμε τις πράξεις).

Θεώρημα 3.4.2. *Ο $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ικανοποιεί την (1) αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός*

Απόδειξη : ($\Rightarrow$) Το είδαμε πριν.
($\Leftarrow$)Έστω ότι ο A είναι κανονικός . Θα δείξουμε ότι ισχύει η (1). Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα :

Λήμμα 3.4.3. *Έστω $T = (t_{ij}) \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ άνω τριγωνικός και κανονικός . Τότε T διαγώνιος .*

Απόδειξη Λήμματος: Επειδή T κανονικός , $TT^* = T^*T$. Υπολογίζουμε το στοιχείο στη θέση (i,j) στον $TT^* = T^*T$. $\sum_i t_{ij}\overline{t_{ij}} = \sum_k \overline{t_{ki}}t_{ki} \Leftrightarrow \sum_i |t_{ij}|^2 = \sum_k |t_{ki}|^2(2)$. Όμως T άνω τριγωνικός δηλαδή $t_{ij} = 0 \forall i > j$. Άρα η (2) δίνει :
$|t_{ii}|^2 + |t_{i(i+1)}|^2 + ... + |t_{i\nu}|^2 = |t_{1i}|^2 + |t_{2i}|^2 + ... + |t_{ii}|^2, \forall i = 1, 2, ..., \nu$
Για $i = 1 : |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + ... + |t_{1\nu}|^2 = |t_{11}|^2 \Rightarrow t_{12} = ... = t_{1\nu} = 0$.
Για $i = 2 : |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + ... + |t_{2\nu}|^2 = |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 \Rightarrow t_{23} = ... = t_{2\nu} = 0$.
Συνεχίζοντας έτσι παίρνουμε $t_{ij} = 0 \forall i < j$. Τότε T είναι ανω και κάτω τριγωνικός δηλαδή διαγώνιος.
συνέχεια απόδειξης Θεωρήματος:
Βήμα 1: Από το Λήμμα του Schur,υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ μοναδιαίος :$U^{-1}AU = T$,T διαγώνιος
Βήμα 2:Παρατηρούμε ότι ο T είναι κανονικός ,αφού $TT^* = U^{-1}AU(U^{-1}AU)^* = U^{-1}AUU^{-1}A^*U = U^{-1}AA^*U$ και $TT^* = U^{-1}A^*AU$. Από $AA^* = A^*A$, παίρνουμε $TT^* = T^*T$. Τώρα T κανονικός και τριγωνικός άρα T διαγώνιος από το Λήμμα.

Πόρισμα 3.4.4. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *A κανονικός*

(ii) *A ικανοποεί την συνθήκη (1)*

(iii) *Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A.*

Ασκήσεις:

(1) Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$

  (α′) Αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι στο $\mathbb{R}$, τότε A Ερμιτιανός .

  (β′) Αν κάθε ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1 τότε A μοναδιαίος

(2) Να βρεθούν όλοι οι κανονικοί $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$:$A^k = 0$ για κάποιο k

(3) Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, $H = \frac{1}{2}(A + A^*), S = \frac{1}{2}(A \cdot A^*)$. Αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H είναι ιδιοδιάνυσμα του A , τότε A κανονικός

(4) Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ a & 1 \end{pmatrix}$ αν και μόνο αν $|a| = 1$.

Επειδή A κανονικός , υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU = D$ διαγώνιος . Άρα $A = UDU^{-1}$ 1α΄) Έστω κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή $D \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$. Έχουμε $A^* = (UDU^{-1})^* = (U^{-1})^* D^* U^* = UD^*U^{-1}$ (αφου U μοναδιαίος) $= UDU^{-1}$ (αφού D διαγώνιος πραγματικός) $= A$. Δηλαδή $A = A^*$. Άρα A Ερμιτιανός
1β΄)Έστω $|\lambda| = 1$ για κάθε ιδιοτιμή λ του A.Τότε $|\lambda|^2 = 1$ δηλαδή $\overline{\lambda}\lambda = 1$. Έχουμε $A^* = UD^*U^{-1} = Udiag(\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_\nu})U^{-1} = Udiag(\lambda_1, ..., \lambda_\nu)U^{-1} = UDU^{-1} = U^{-1}DU = (UDU^{-1})^{-1} = A^{-1}$. Άρα A μοναδιαίος .
2)Ως κανονικός , ο A είναι διαγωνίσιμος . Από $A^k = 0$ έπεται ότι κάθε ιδιοτιμή του A ισούτε με 0. Συνεπώς ο A είναι όμοιος με το μηδενικό πίνακα
3)Επειδή $H = H^*$, ο H είναι Ερμιτιανός . Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{u_1, ..., u_\nu\}$ του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του H. Από υπόθεση κάθε u_i είναι ιδιοδιάνυσμα του S . Επειδή $A = H + S$, έχουμε ότι κάθε u_i είναι ιδιοδιάνυσμα του A : $Hu_i = \mu_i u_i$, $Su_i = \xi, (\mu_i, \xi_i \in \mathbb{C})$, τότε $Au_i = Hu_i + Su_i = \mu_i + \xi_i u_i = (\mu_i + \xi_i)u_i$. Τώρα το σύνολο $\{u_1, ..., u_\nu\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ από <u>ιδιοδιανύσματα του A.</u> Από το Πόρισμα έπεται ότι ο A είναι κανονικός
4)Από το Πόρισμα , τα ζητούμενα a καθορίζονται από τη σχέση $AA^* = A^*A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a} \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{a} \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \overline{a}+i \\ a-i & a\overline{a}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\overline{a}a & i+\overline{a} \\ -i+a & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$a\overline{a} = 1 \Leftrightarrow |a|^2 = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$

Κεφάλαιο 4

Θέματα από Παλιές Εξετάσεις

(1) Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$

(α′) Αν $\langle AX, X\rangle, \forall Q \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$, τότε $A = 0$.

(β′) Αν $\langle AX, X\rangle, \forall Q \in \mathbb{R}^{\nu\times 1}$, τότε $A = 0$;

(γ′) A κανονικός $\Leftrightarrow |AX| = |A^*X|\rangle, \forall Q \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$

(2) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές $3, 3, -6$.

(α′) Να βρεθεί η διάσταση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ που παράγεται από ιδιοδιανύσματα του A

(β′) Για κάθε ιδιόχωρο του A να βρεθεί ορθοκανονική βάση .

(γ′) Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $U^{-1}AU$ διαγώνιος

(δ′) Είναι ο A όμοιος με τον $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$;

(3) Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$:

(α′) $\det(A^*A) \geq 0$

(β′) Κάθε ιδιοτιμή του AA^* είναι πραγματικός αριθμός

(γ′) Κάθε ιδιοτιμή του AA^* είναι μη αρνητική .

(δ′) Κάθε ιδιοτιμή του $\det(AA^* + I_\nu) > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1α′) Ξέρουμε ότι αν $\langle AX, Y\rangle = 0, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$, τότε $A = 0$. Από την υπόθεση έχουμε για $X+Y$ στην θέση του X:

(1)
$\langle A(X+Y), X+Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle AX, X\rangle + \langle AX, Y\rangle + \langle AY, X\rangle + \langle AY, Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle AX, Y\rangle + \langle AY, X\rangle = 0$

$\forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$
Στην (1) θεωρούμε iY στην θέση του Y . Παίρνουμε :
$\langle AX, iY\rangle + \langle A(iY), X\rangle = 0 \Rightarrow -i\langle AX, Y\rangle + i\langle AY, X\rangle = 0, (*)$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με i και αφαιρούμε την (*). Τότε : $2i\langle AX, Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle AX, Y\rangle = 0, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}$.
Άρα $A = 0$.

β΄) Δεν αληθεύει . Ένα παράδειγμα είναιο ο $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Τότε $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $\left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -yx + xy = 0$.

γ΄)$|Ax| = |A^*X|, \forall X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1} \Leftrightarrow |Ax|^2 = |A^*X|^2 \Leftrightarrow \langle AX, AX\rangle = \langle A^*X, A^*X\rangle \Leftrightarrow \langle A^*AX, AX\rangle = \langle AA^*X, X\rangle \Leftrightarrow \underbrace{\langle (A^*A - AA^*)X, X\rangle = 0}_{\forall X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}} \Leftrightarrow A^*A - AA^* = 0 \Leftrightarrow A$ κανονικός.

Σχόλιο: Αν A κανονικός , τότε από το γ΄) έχουμε $|AE_i| = |A^*E_i|$,όπου $\{E_1, ...E_\nu\}$ συνήθεις βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$. Δηλαδή $|A^{(i)}| = |A^{*(i)}|$, όπου $A^i = i-$στήλη του A. Αλλά $A^{*(i)} = \overline{A_i}$ ($i-$γραμμή στον $\overline{A}$) και $|\overline{A_i}| = |A_i|$. Άρα $|A^{(i)}| = |A_i|, \forall i$.

2α΄)<u>1ος τρόπος :</u> Ο A είναι συμμετρικός και πραγματικός . Από το Φασματικό Θεώρημα είναι διαγωνίσιμος . Άρα υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A. Δηλαδή η ζητούμενη διάσταση είναι 3 .

<u>2ος τρόπος :</u>(Υπολογίζουμε βάσεις των ιδιόχωρων γιατί θα χρειαστούν παρακάτω , μπορούμε και με $rank$.)

- Για τον $V_A(3) : (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 3y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow x - y + z = 0 \Leftrightarrow V_A(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα είναι βάση του του $V_A(3)$. Εδώ $dimV_A(3) = 2$. Όμοια $V_A(-6) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $dimV_A(-6) = 1$. Άρα η ζητούμενη διάσταση είναι ίση με $dim\left(V_A(3) + V_A(-6)\right) = dimV_A(3) + dimV_A(-6) = 2 + 1 = 3$

β΄) Βρήκαμε $V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και $V_A(-6) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, σε κάθε ιδιόχωρο εφαρμόζουμε Gram-Schmidt . Είδαμε πριν ότι μια βάση του του $V_A(3)$ είναι η $\{v_1, v_2\}$ όπου $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$u_1 = v_1$
$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1|^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Μια ορθοκανονική βάση του $V_A(3)$ είναι η $\left\{ \frac{u_1}{|u_1|}, \frac{u_2}{|u_2|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Για τον $V_A(-6)$ μια ορθοκανονική βάση είναι $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

γ΄) Έστω $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Οι στήλες του U είναι από το (β΄) ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A. Άρα U μοναδιαίος και ξέρουμε $U^{-1}AU$ διαγώνιος
.
δ΄) θα δείξουμε ότι αν $m_A(x) \neq m_B(x) \Rightarrow A, B$ όχι όμοιοι.Επειδή A διαγωνίσιμος $m_A(x) = (x-3)(x+6)$ Επειδή $\chi_B(x) = -(x-3)^2(x+6)$ έχουμε $m_B(x) = \begin{cases} (x-3)^2(x+6), & \text{ή} \\ (x-3)(x+6), \end{cases}$
Με πράξεις επαληθεύουμε ότι $(B - 3I_3)(B + 6I_3) \neq 0$. Άρα $m_B(x) = (x-3)^2(x+6)$ και $m_A(x) \neq m_B(x)$

3α΄)$\det(AA^*) = (\det A)(\det A^*) = (\det A)\left(\det (A^*)^t\right) = (\det A)(\det \overline{A}) = (\det A)\overline{(\det A)} = |\det A|^2 \geq 0$.
β΄)Επειδή $(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$, ο AA^* είναι Ερμιτιανός. Άρα κάθε ιδιοτιμή του AA^* είναι πραγματικός αριθμός.

γ′) Έστω $\lambda \in \mathbb{C} : AA^*X = \lambda X, X \in \mathbb{C}^{\nu\times 1}, X \neq 0$. Έχουμε : $\underbrace{\langle AA^*X, X\rangle}_{\langle A*X, A*X\rangle = |A^*X|^2 \geq 0} =$ $\langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle$, όπου $\langle X, X\rangle > 0$. δηλαδή $\lambda\langle X, X\rangle = \langle AA^*X, X\rangle \geq 0$ με $\langle X, X\rangle > 0$. Άρα $\lambda \geq 0$.
δ′)<u>1ος τρόπος</u> : Αν $\lambda_1, ...\lambda_\nu$ είναι οι ιδιοτιμές του AA^*. τότε οι ιδιοτιμές του $AA * +I_\nu$ είναι οι $\lambda_1 + 1, ..., \lambda_\nu + 1$ (Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης.) Είδαμε πριν ότι $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \lambda_i + 1 > 0$. Τότε $Q\det(AA^* + I_\nu) = \prod_i(\lambda_i + 1) > 0$.

(4) Έστω $B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ κανονικός

(α′) Εξετάστε αν υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του B

(β′) Έστω $(B - 3I_\nu)(B - 4I_\nu) = 0$. Τότε B Ερμιτιανός .

(5) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(α′) Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.Είναι ο A διαγωνίσιμος;

(β′) Να δείξετε ότι υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $B^3 = A$.

(γ′) Βρείτε $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού 1 : $A^{-1} = \phi(A)$.

(6) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση , $f(x, y, z) = (x, 3y + az, ax + 3z)$.

(α′) Να δείξετε ότι f τριγωνίσιμη για κάθε $a \in \mathbb{R}$

(β′) Βρείτε όλες τιμές του a ώστε f διαγωνίσιμη.

(γ′) $f^4 - 2f^3 + \mathbf{1}_v \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

Λύσεις
4α′) Έχουμε $BB^* = B^*B$. Άρα $(B^2)(B^2)* = BBB^*B^* = B(B^*B)B^* = (BB^*)(BB^*) = (B^*B)(B^*B) = B^*(BB^*)B = B^*B^*BB = (B^*)^2B^2 = (B^2)^*B^2$. Δηλαδή $B^2(B^2)^* = (B^2)^*B^2$, οπότε B^2 κανονικός. Άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα του B.
<u>2ος Τρόπος</u> : Επειδή B κανονικός , υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu} : U^{-1}BU = D$ διαγώνιος . Δηλαδή $\overline{U^{-1}B^2U = D^2}$ κανονικός επομένως υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{\nu\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του B^2.
4β′)<u>Παρατήρηση</u>: Αν U μοναδιαίος , ώστε H Ερμιτιανός , τότε UHU^{-1} Ερμιτιανός . Πράγματι $\overline{(UHU^{-1})^*} = (U^{-1})^*H^*U^* = UHU^{-1}$, αφού $U^* = U^{-1}$ και $H^* = H$.
Τώρα B κανονικός $\Rightarrow$ υπάρχει μοναδιαίος U ώστε $U^{-1}BU = D$ διαγώνιος. Από την $(B - 3I_\nu)\overline{(B - 4I_\nu)} = 0$ έπεται ότι αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του B τότε $\lambda \in \{3, 4\}$. Δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε $D \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$. Άρα $D^* = D$. Από την παρατήρηση και τη σχέση $B = UDU^{-1}$ έπεται ότι B Ερμιτιανός .

5α΄) Με συνήθεις πράξεις $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-4)$, $V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Τα $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $dimV(1) = 2$. Επομένως $dimV(1) + dimV(4) = 2 + 1 = 3$ και άρα ο A είναι διαγωνίσιμος .

5β΄) Έστω $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έχουμε $\det P = -3 \neq 0$. Άρα P αντιστρέψιμος . Ξέρουμε $P^{-1}AP = diag(1,1,4)$. Άρα $A = P \cdot diag(1,1,4) \cdot P^{-1}$. Θέτοντας $B = P \cdot diag\left(1,1,4^{\frac{1}{3}}\right) \cdot P^{-1}$, έχουμε $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $B^3 = P \cdot diag\left[\left(1,1,4^{\frac{1}{3}}\right)\right]^3 \cdot P^{-1} = P \cdot diag(1,1,4) \cdot P^{-1} = A$.

5γ΄)Είδαμε ότι $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-4)$ και A διαγωνίσιμος . Άρα $m_A(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$. Άρα $A^2 - 5A + 4 = 0 \Rightarrow I_\nu = -\frac{1}{4}(A^2 - 5A)$ επειδή $\det A \neq 0$ έπεται $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I_\nu)$. Άρα μια επιλογή είναι $\phi(x) = -\frac{1}{4}(x-5)$.

6α΄) Ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ ο πίνακας της f είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & a \\ a & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x)^2$. Επειδή $\chi_A(x) =$ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στον $\mathbb{R}[x]$ για κάθε $a \in R$ έχουμε f τριγωνίσιμη στο $\mathbb{R}^{3\times 3}, \forall a \in \mathbb{R}$

6β΄)Ξέρουμε A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $dimV_f(1) = m(1) = 1$ και $dimV_f(3) = m(3) = 2$. Έχουμε $1 \leq dimV_f(1) \leq m(1) = 1 \Rightarrow dimV_f(1) = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Έχουμε $dimV_f(3) = 3 - rank(A - 3I_3) = 3 - rank \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, & \text{αν } a = 0 \\ 1, & \text{αν } a \neq 0. \end{cases}$

Συνεπώς $dimV_f(3) = m(3) = 2 \Leftrightarrow a = 0$. Τελικά A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $a = 0$. <u>2ος τρόπος :</u> f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow m_f(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων στον $\mathbb{R}[x]$. Επειδή $\chi_f(x) = -(x-1)(x-3)^2$, έχουμε $m_f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3), & \text{ή} \\ (x-1)(x-3)^2 & . \end{cases}$ Αφού $m_f(x)|\chi_f(x)$ και τα $m_f(x), \chi_f(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες . Συνεπώς f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow m_f(x) = (x-1)(x-3) \Leftrightarrow (f - f_{\mathbb{R}^3})(f - 3f_{\mathbb{R}^3}) = 0 \Leftrightarrow (A - I_3)(A - 3I_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$$

6γ΄) Αρκεί να δείξουμε ότι το $m_f(x)$ <u>δε</u> διαιρεί το $x^4 + 2x^3 + 1$. Ξέρουμε λ ιδιοτιμή της $f \Rightarrow x - \lambda$ διαιρεί το $m_f(x)$. Επειδή 3 όχι ρίζα του $x^4 - 2x^3 + 1$, έχουμε $x - 3$ δε διαιρεί

το x^4-2x^3+1, οπότε το $m_f(x)$ οπότε το $m_f(x)$ δε διαιρεί το x^4-2x^3+1.
2ος τρόπος: Αν λ ιδιοτιμή της f, ξέρουμε ότι $\phi(\lambda)=0$ για κάθε πολυώνυμο $\phi(x)$ με $\phi(f)=0$. Εδώ επιλέγουμε $\lambda=3$ και $\phi(x)=x^4-2x^3+1$ και παρατηρούμε ότι $\phi(3)\neq 0$. Άρα $\phi(f)\neq 0$
8α΄) Από $A^2=I_\nu$ έχουμε :

(i) Αν λ ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda\in\{1,-1\}$.

(ii) A διαγωνίσιμος , αφού $m_A(x)|x^2-1$ και άρα $m_A(x)=$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$
Συνεπώς A όμοιος με $diag(\underbrace{1,...,1}_{a}-1,...,-1), a\geq 0$.

Επίσης B όμοιος με $diag(\underbrace{1,...,1}_{b},-1,...,-1), b\geq 0$. Τώρα $TrA=a-(\nu-a)=2a-\nu$, $TrB=b-(\nu-b)=2b-\nu$, αφού όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος ,από $TrA=TrB\Rightarrow a=b$. Τότε A,B όμοιοι πίνακες με τον $diag(\underbrace{1,...,1}_{a}-1,...,-1)$, συνεπώς A,B όμοιοι

(7) Έστω $A,B\in\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ με $A^2=B^2=I_\nu$. Δείξτε ότι αν $TrA=TrB$, τότε A,B όμοιοι.

(8) Έστω $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ με $A^*A=4A$. Εξετάστε αν ισχύει $\langle AX,AY\rangle=\langle X,Y\rangle,\forall X,Y\in\mathbb{C}^{3\times 1}$

(9) $g:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, $g(\phi(x))=\phi'(x)-3\phi(x)$.

   (α΄) Βρείτε το $m_g(x)$

   (β΄) Να εξεταστεί αν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ από ιδιοδιανύσματα της g

   (γ΄) Αληθεύει ότι η g^2 είναι διαγωνίσιμη ·

   (δ΄) g ισομορφισμός ·

   (ε΄) Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ με $(g:\hat{a},\hat{a})=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$;

   (ϛ΄) Ίδιο ερώτημα όπως πριν με $(g:\hat{a},\hat{a})=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$;

Λύσεις 9) Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{a}=\{1,x,x^2\}$ του $\mathbb{R}_2[x]$. Υπολογίζουμε τον $(g:\hat{a},\hat{a})$:

$g(1)=(1)'-3\cdot 1=-3\cdot 1+0\cdot 0\cdot x^2 g(x)=(x)'-3x=1\cdot 1+(-3)x+0\cdot x^2.g(x^2)=(x^2)'-3x^2=0\cdot 1+2\cdot x+(-3)x^2.$

Άρα $A = (g : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9α΄)$\chi_A(x) = -(x+3)^3$.

Άρα $m_A(x) = \begin{cases} x+3 & \text{ή} \\ (x+3)^2 & \text{ή} \\ (x+3)^3 \end{cases}$

Με πράξεις επαληθεύεται ότι $(A-3I_3)^2 \neq 0$. Άρα $m_A(x) = (x+3)^3$. Άρα $m_g(x) = (x+3)^3$.

9β΄)Αφού $m_g(x) \neq$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$, η g δεν είναι διαγωνίσιμη . Άρα δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ από ιδιοδιανύσματα της g . 9γ΄) $(g^2 : \hat{a}, \hat{a}) = A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Ας δούμε ένα επιχείρημα διαφορετικό από το προηγούμενο . Αν A^2 διαγωνίσιμος , τότε A^2 όμοιος με τον $9I_3$ οπότε $A^2 = 9I_3$. Άτοπο .

9δ΄) Επειδη $\det g = \det A = (-3)^2 \neq 0$, η g είναι ισομορφισμός .

9ε΄) ΟΧΙ , γιατί αλλιώς το 1 είναι ιδιοτιμή της f , άτοπο, αφού $\chi_A(x) = -(x+3)^3$.

Ασκήσεις συνέχεια

(10) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3\times 3} : U^{-1}AU =$ τριγωνικός . Λύση :

Ο A είναι της μορφής

$A = \left(\begin{array}{c|c} 2 & * \\ \hline \mathbf{O}_{2\times 1} & B \end{array}\right)$, όπου $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Επειδή η πρώτη στήλη του A είναι της μορφής $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Η ιδέα είναι να βρούμε μοναδιαίο $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $P^{-1}BP =$ τριγωνικός και να θεωρήσουμε $U = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{O}_{1\times 2} \\ \hline \mathbf{O}_{2\times 1} & P \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Με απλές πράξεις παρατηρούμε $\chi_B(x) = (x-2)(x-3)$. Έχουμε $V_B(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. θεωρούμε $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Βρίσκουμε ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2\}$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$

Παραλείπουμε τις πράξεις : έχουμε ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2\}$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Θέτουμε $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Τότε P μοναδιαίος αφού όλες οι στήλες του είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ και ξέρουμε $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in$ $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Θέτουμε $U = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{O}_{1\times 2} \\ \hline \mathbf{O}_{2\times 1} & P \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Τότε ο U είναι μοναδιαίος αφού οι στήλες του είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ και ξέρουμε ότι -από την απόδειξη του σχετικού Θεωρήματος -

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(11) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(α′) Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιοτιμή του A^{10}.

(β′) Είναι ο A^{10} διαγωνίσιμος ;

(γ′) Αν ο A μηδενίζει το $(x-3)(x^5-5x+c)$. Να βρεθεί το c

Λύση :
α′)Με συνήθεις πράξεις βρίσκουμε τα εξής (για τον πίνακα A):

$$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-3), V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, (*)$$

Υπενθύμιση : Αν Q είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο λ τότε Q είναι ιδιοδιάνυσμα του $\phi(A)$ που αντιστοιχεί στο $\phi(\lambda)$.
συνέχεια λύσης : 1ος τρόπος Από την Υπενθύμιση έχουμε $V_A(\lambda) \subset V_{\phi(A)}(\phi(\lambda)), \forall \phi(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ειδικά $V_A(\lambda) \subset V_{A^{10}}(\lambda^{10})$.$(**)$ Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης , $\chi_{A^{10}}(x) = -(x-1)^2(x-3^{10})$. Άρα $dimV_{A^{10}}(1) \leq m(1) = 2$ και $dimV_{A^{10}}(3^{10}) = 1, (***)$
Από $(*)$ έπεται ότι $dimV_A(1) = 2$ και $dimV_A(3) = 1$. Άρα από $(**)$ και $(***)$ έχουμε $dimV_{A^{10}}(1) = 2$ και $dimV_{A^{10}}(3^{10}) = 1$ και $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V_{A^{10}}(1)$ και $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V_{A^{10}}(3^{10})$. Δηλαδή εδώ $V_{A^{10}}(1) = V_A(1)$ και $V_{A^{10}}(3) = V_{A^{10}}(3^{10})$.
2ος Τρόπος: Υπόδειξη :Ο A είναι διαγωνίσιμος . Μια βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A είναι $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Από την υπενθύμιση , η παραπάνω βάση αποτελεί-

ται από ιδιοδιανύσματα του A^{10}. Συνεπώς μια βάση του $V_{A^{10}}(1)$ είναι $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
και μια βάση του $V_{A^{10}}(3^{10})$ είναι
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
β′)Υπόδειξη: O $A^1 0$ είναι διαγωνίσιμος , γιατί ο A είναι διαγωνίσιμος (Το είδαμε στο (α′),2ος τρόπος αφού ξέρουμε : A διαγωνίσιμος $\Rightarrow \phi(A)$ διαγωνίσιμος για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$).
γ′) Αν $(A-3I_3)(A^5-5A+cI_3)=0$, τότε επειδή $(x-1|m_A(x))$ και $m_A(x)|(x-3)(x^5-5x+c) \Rightarrow (x-1)|(x-3)(x^2-5x+c)$ επομένως $(1-3)(1^5-5+c)=0 \Rightarrow c=4$

(12) Έστω $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ με $\chi_A(x)=x^2(x^2+1)$.

- (α′) $(A-2I_4)(A-3I_4)$ αντιστρέψιμος;
- (β′) Είναι ο A Ερμιτιανός ;
- (γ′) Δείξτε ότι $A^{10}=A^2$
- (δ′) Υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^{4\times1}$ από ιδιοδιανύσματα του A αν και μόνο αν $rankA=2$.

Λύση :
α′)Επειδή ούτε το 2 ούτε το 3 είναι ιδιοτιμές του A έχουμε $\det(A-2I_4)\neq0$ και $\det(A-3I_4)\neq0$. Συνεπώς $(A-2I_4)(A-3I_4)$ αντιστρέψιμος .
β′)ΔΕΝ αληθεύει , αφού το i είναι ιδιοτιμή του A, και κάθε ιδιοτιμή Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματική . γ′) Υπόδειξη: Από Cayley- Hamilton , αρκεί να δείξουμε ότι $x^2(x^2+1)|x^{10}-x^2$ (επαληθεύεται με πράξεις)
Άλλος τρόπος γραφής :
Μπορούμε να πούμε ότι από Cayley- Hamilton ,$A^2(A^2+I_4)=0 \Rightarrow A^4+A^2=0 \Rightarrow A^4=-A^2$. Τώρα $A^{10}=A^4A^4A^2=(-A^2)(-A^2)A^2=A^4A^2=(-A^2)A^2=-A^4=A^2$.

δ′)Υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^{4\times1}$ από ιδιοδιανύσματα του $A \Leftrightarrow A$ διαγωνίσιμος (δεδομένου ότι είμαστε στο $\mathbb{C}^{4\times4}$)
$\Leftrightarrow \begin{cases} dimV_A(0)=2 \\ dimV_A(i)=1 \\ dimV_A(-i)=1 \end{cases} \Leftrightarrow dimV_A(0)=2 \Leftrightarrow 4-rank(A-0\cdot I_4)=2 \Leftrightarrow 4-rankA=2 \Leftrightarrow rankA=2$

(13) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $B\in\mathbb{C}^{3\times3}$ με $B^3=A$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Απόδειξη :
Από Cayley - Hamilton , $A^3=0$ αφού $\chi_A(x)=-x^3$. Άρα $(B^3)^3=0$, δηλαδή $B^9=0$. Άρα $m_B(x)=x^k, k\leq3$. Τότε $B^3=0$, άτοπο , αφού $A\neq0$

(14) Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0$. Βρείτε πίνακες $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιοι ώστε ο A να είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους A_i.

Λύση :

Από υπόθεση , $m_A(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ή} \\ x-2, & \text{ή} \\ (x-1)(x-2) & \end{cases}$

- Αν $m_A(x) = x - 1$, τότε $A = I_4$. Θέτουμε $A_1 = I_4$.
- Αν $m_A(x) = x - 2$, τότε $A = 2I_4$. Θέτουμε $A_2 = 2I_4$.
- Αν $m_A(x) = (x - 1)(x - 2)$, τότε A διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ A όμοιος με $diag(1, 1, 2)$ ή $diag(1, 2, 2)$ διότι και το 1 και το 2 είναι ιδιοτιμές του A και ο A είναι στο $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Θέτουμε $A_3 = diag(1, 1, 2)$ και $A_4 = diag(1, 2, 2)$.Μέχρι στιγμής A όμοιος με έναν από A_1, A_2, A_3, A_4. Είναι ανα 2 μη όμοιοι αφού για παράδειγμα έχουν διαφορετικές ιδιοτιμές.

,