Σημειώσεις στο μάθημα ‘Αναλυτική Γεωμετρία’

Διδάσκων: Λάππας Δ.

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

B′ ΜΕΡΟΣ

$\boxed{\text{ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ στο ΧΩΡΟ}}$

"Επιφάνεια" $\longrightarrow$ <u>για την περιγραφή της χρειάζονται δύο παράμετροι</u>

"Επίπεδο" $\longrightarrow$

$\downarrow$

"Ηρεμούν υγρό"
ή "Εφαρμογή ευθείας"

<u>μια ειδική επιφάνεια</u>
$(t,\, s) \,\to\, \underline{\vec{x}_0 + t\vec{w} + s\vec{u} = \vec{x}}$ (ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ)
επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο το $\vec{x}_0$ και είναι κάθετο στο $(\vec{w} \times \vec{u})$.
$(\vec{w} \times \vec{u})$ γραμμικά ανεξάρτητο.
$< \overrightarrow{AM},\, \vec{\ell} = 0$ σχήμα
$(E)\,:\ \underline{Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0}$ (ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ)
Επίπεδο κάθετο στο $\vec{\ell} = (A,\, B,\, \Gamma)$.

"Σφαίρα" $\longrightarrow$

$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = R$
προκύπτει με την περιστροφή της ημιπεριφέρειας.
<u>Περιγραφή της επιφάνειας της Σφαίρας με δύο παραμέτρους</u>

$(x,\, \psi) \to +\sqrt{R^2 - x^2 - \psi^2}$
(γιατί $x^2 + \psi^2 - 1 = 0 \Rightarrow,\ x = \pm\sqrt{1 - x^2 - \psi^2}$)
$(x,\, \psi,\, \sqrt{R^2 - x^2 - \psi^2})$
<u>Εμπίπτει στον ΟΡΙΣΜΟ τμηματικά</u>
Πολικές συντεταγμένες $\to$ δύο παράμετροι
$x^2 + \psi^2 + z^2 = 1$
(ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ ΤΡΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ)

► $\boxed{\text{ΚΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ}}$

σχήμα

(C): <u>κύκλος</u>
K: <u>Σημείο του χώρου</u> (εκτός επιπέδου του κύκλου)
AK: <u>ευθεία (ΓΕΝΕΤΕΙΡΑ)</u>
Αφήνουμε το A να τρέχει στον κύκλο
τότε η (KA) παράγει μία επιφάνεια (S)
S: <u>κώνος με κορυφή το K και οδηγό την καμπύλη (C)</u>

<u>οι ευθείες είναι ολόκληρες</u>
$\underline{K(x_0,\, \psi_0,\, z_0)}$
$A \in (C)$ όπου $\underline{A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \in (C)}$

$$(C) \longrightarrow \begin{cases} f_1(x,\, \psi,\, z) = 0 \\ f_2(x,\, \psi,\, z) = 0 \end{cases}$$

ΤΟΜΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

(ΣΦΑΙΡΑ-ΕΠΙΠΕΔΟ)

P: ΤΥΧΑΙΟ ΣΗΜΕΙΟ της ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ (S)
$(S) \ni P(x,\, \psi,\, z)$

$$\boxed{(S) \;=\; \{P|\exists A \;\in\; (C) \;:\; P,\, K,\, A \text{ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ}\}}$$

P, K, A συνευθειακά $\Rightarrow$ $\overrightarrow{KP} = t\overrightarrow{KA}$, $t \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{KP} = (x - x_0,\, \psi - \psi_0,\, z - z_0)$
$t\overrightarrow{KA} = (x_1 - x_0,\, \psi_1 - \psi_0,\, z_1 - z_0)$

$$(S) \begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ \psi - \psi_0 = t(\psi_1 - \psi_0) \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) \\ f_1(x_1,\, \psi_1,\, z_1) = 0 \\ f_2(x_2,\, \psi_2,\, z_2) = 0 \end{cases}$$

Αναζητούμε σχέση ανάμεσα στα x, ψ, z
(Πρέπει να απαλειφθούν τα t, x_1, ψ_1, z_1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
$K(1,\, -3,\, 2)$

$$(C) \begin{cases} 3x^2 + \psi^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$ έλλειψη στο επίπεδο $xO\psi$.

Ζητείται η κωνική επιφάνεια με κορυφή K και οδηγό καμπύλης (C)
Έστω $P(x,\, \psi,\, z)$ σημείο της επιφάνειας (S). Τότε $\exists\, A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \in (C)$ ώστε $\overrightarrow{KP} = t\overrightarrow{KA}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\left| \begin{array}{c} x - 1 = t(x_1 - 1) \\ \psi + 3 = t(\psi_1 + 3) \\ z - 2 = t(z_1 - 2) \\ \left\{ \begin{array}{c} 3x_1^2 + \psi_1^2 = 1 \\ z_1 = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Επειδή $z_1 = 0$ τότε $z - 2 = t(-2) \Rightarrow t = \dfrac{2-z}{2}$
$x - 1 = \dfrac{2-z}{2}(x_1 - 1) \Rightarrow x_1 = \cdots\cdots$
$\psi + 3 = \dfrac{2-z}{2}(\psi_1 + 3) \Rightarrow \psi_1 = \cdots\cdots$

1^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

<u>$z-2\neq 0$</u>

$$x_1-1=\frac{2(x-1)}{2-z}\Rightarrow x_1=\frac{2(x-1)+(2-z)}{2-z}$$

$$\psi+3=\frac{2(\psi+3)}{2-z}\Rightarrow \psi_1=\frac{2(\psi+3)-3(2-z)}{2-z}$$

Από την αντικατάσταση στην $3x_1^2+\psi_1^2=1$ προκύπτει

$$3\Big[\frac{2(x-1)+(2-z)}{2-z}\Big]^2+\Big[\frac{2(\psi+3)-3(2-z)}{2-z}\Big]^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$(S):\boxed{3[2(x-1)+(2-z)]^2+[2(\psi+3)-3(2-z)]^2=(2-z)^2}$$

<u>2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u>

$z-2=0\Rightarrow z=2$ προκύπτει το $K(1,\,-3,\,2)\in(S)$.

► <u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ</u>

Αν κάνουμε πράξεις θα προκύψει εξίσωση της μορφής:

$$\underline{\alpha x^2+\beta\psi^2+\gamma z^2+2\delta x\psi+2\varepsilon\psi z+2\zeta xz+(\kappa x+\lambda\psi+\mu z)+\nu=0}$$

Εξίσωση πολυωνυμική, 2ου βαθμού, τριών μεταβλητών.

Θέτω $X=x-1$, $\Psi=(\psi+3)$, $Z=z-2$ (δηλαδή αρχή το K). Τότε η εξίσωση της S παίρνει τη μορφή:

$\boxed{3[2X-Z]^2+[2\Psi+3Z]^2=Z^2}$ Εξίσωση της S στο $\{K,\,X\Psi Z\}$.

Η εξίσωση της S στο $\{K,\,X\Psi Z\}$ είναι ΟΜΟΓΕΝΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ.

$F(X,\,\Psi,\,Z)(=0)$

$$\text{ΟΜΟΓΕΝΗΣ:}\ \left.\begin{array}{c}x\to\lambda X\\ \psi\to\lambda\Psi\\ Z\to\lambda Z\end{array}\right\}F(\lambda X,\,\lambda\Psi,\,\lambda Z)=\lambda^2F(X,\,\Psi,\,Z)$$

$(X,\,\Psi,\,Z)\longleftrightarrow(\lambda X,\,\lambda\Psi,\,\lambda Z)$ είναι και πάλι σημεία της επιφάνειας.

► <u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u>: Αν μία κωνική επιφάνεια γράφει σε σύστημα αναφοράς με αρχή την κορυφή τότε είναι ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ.

<u>Μια εξίσωση 2ου βαθμού περιγράφει κώνο εάν με κατάλληλη μεταφορά είναι ΟΜΟΓΕΝΗΣ</u>

$$f(x,\,\psi,\,z)\Rightarrow\begin{array}{c}x\to x'+x_0\\ \psi\to\psi'+\psi_0\\ z\to z'+z_0\end{array}$$

$\exists?(x_0,\,\psi_0,\,z_0):\ f(x',\,\psi',\,z')$ ΟΜΟΓΕΝΗΣ.

► <u>ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΚΩΝΩΝ</u>

$\Big\{\ x^2+\psi^2+z^2=0\ \ \to$ το κέντρο.

$$\begin{cases} x^2+\psi^2-z^2=0 \\ x^2-\psi^2-z^2=0 \\ -x^2+\psi^2+z^2=0 \end{cases}$$

$$\left\{ \alpha x^2+\beta\psi^2+\gamma z^2=0 \right.$$

σχήμα

$$K(0,\,0,\,0)$$

$$(C):\begin{cases} z=1 \\ x^2+\psi^2=1 \end{cases}$$

κώνος με κορυφή το K και οδηγό την καμπύλη (C)

$$\left|\begin{array}{c} \overrightarrow{KP}=t\overrightarrow{KA} \\ x=tx_1 \\ \psi=t\psi_1 \\ z=tz_1 \\ x^2+\psi^2=1 \\ z_1=1 \end{array}\right.$$

Προκύπτει $\left|\begin{array}{c} z_1=1 \\ z=t \\ x=zx_1\ \Rightarrow\ x_1=\frac{x}{z} \\ \psi=z\psi_1\ \Rightarrow\ \psi_1=\frac{\psi}{z} \end{array}\right.$

$$(S):\ x^2+\psi^2-z^2=0$$

► <u>ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ</u>

<u>ΤΟΜΗ ΚΩΝΟΥ και ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

$$\begin{cases} x^2+\psi^2-z^2=0:(S) \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z+\delta=0:(\Pi) \end{cases} \quad (S)\cap(\Pi):\begin{cases} z=1 \\ x^2+\psi^2=1 \quad \text{ΚΥΚΛΟΣ} \end{cases}$$

$$(\text{Κωνική επιφάνεια}) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Κέντρο}(K) \\ \text{οδηγός καμπύλης}(C) \end{array} \right\}$$

σχήμα

$$(S) = \{p | \exists A \in (C) : \overrightarrow{KP} = t\overrightarrow{KA},\, t \in \mathbb{R}\}$$

Αν θεωρήσω σύστημα με αρχή το K, τότε η εξίσωση της S στο νέο σύστημα είναι ΟΜΟΓΕΝΗΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ.

► <u>ΠΟΤΕ ΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ Β′ ΒΑΘΜΟΥ στο ΧΩΡΟ είναι ΚΩΝΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ</u>

$g(x,\, \psi,\, z) = 0$ αναζητώ $(x_0,\, \psi_0,\, z_0)$

$x \to x' + x_0$

$\psi \to \psi' + \psi_0$

$z \to z' + z_0$

$g(x' + x_0,\, \psi' + \psi_0,\, z' + z_0)$ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ως προς $x',\, \psi',\, z'$.

Αν ισχύει τότε $(x_0,\, \psi_0,\, z_0) \to$ ΚΕΝΤΡΟ του νέου συστήματος.

► <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> 1

Να εξεταστεί αν παριστάνει κωνική επιφάνεια

$$x^2 - 4\psi^2 - 2z^2 + 4\psi z + 4z - 4 = 0$$

$$x^2 = x'^2 + x_0^2 + 2x'x_0$$

$$-4\psi^2 = -4\psi'^2 - 4\psi_0^2 - 8\psi'\psi_0$$

$$-2z^2 = -2z'^2 - 2z_0^2 - 4z'z_0$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$4\psi z = 4\psi'z' + 4\psi_0 z_0 + 4\psi' z_0 + 4z'\psi_0$$

$$4z = 4z' + 4z_0$$

$$\underbrace{x'^2 - 4\psi'^2 - 2z'^2 + 4\psi'z'}_{\beta'\ \text{βάθμιο}} + \underbrace{2x'x_0 + \psi'(-8\psi_0 + 4z_0) + z'(4\psi_0 - 4z_0 + 4)}_{\alpha'\ \text{βάθμιο}}$$
$$+ \underbrace{x_0^2 - 4\psi_0^2 - 2z_0^2 + 4\psi_0 z_0 + 4z_0 - 4}_{\text{σταθεροί όροι}} = 0$$

Είναι ομογενές $\Leftrightarrow$ (Σ): συμβιβαστό

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{lc} (1) & 2x_0 = 0 \\ (2) & -8\psi_0 + 4z_0 = 0 \\ (3) & 4\psi_0 - 4z_0 + 4 = 0 \\ (4) & x_0^2 - 4\psi_0^2 - 2z_0^2 + 4z_0\psi_0 + 4z_0 - 4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{συντελεστές πρωτοβάθμιων} \\ \\ \text{σταθερός} \end{array}$$

<u>Πρέπει το (Σ) να είναι συμβιβαστό</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \psi_0 = 1 \quad \text{επαληθεύουν την}\,(4) \\ z_0 = 2 \end{array} \right.$$

Τότε προκύπτει η εξίσωση:

$\underline{x'62 - 4\psi'^2 - 2z'^2 + 4\psi' z' = 0}$ ΟΜΟΓΕΝΗΣ $K(0,\, 1,\, 2)$

Βρήκαμε το κέντρο $K(0,\, 1,\, 2)$.

<u>Αναζητούμε την οδηγό καμπύλη</u>

Προκύπτει με τομή της επιφάνειας και ενός επιπέδου.

<u>θεωρούμε το επιπέδο $z = 0$</u>

$$(C) : \begin{matrix} x^2 - 4\psi^2 = 4 \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4\psi^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{υπερβολή στο } xO\psi.$$

$$\text{Άρα } \underline{\text{ο κώνος είναι}} \begin{cases} K(0,\, 1,\, 2) & \text{Κορυφή} \\ (C) & \text{οδηγός καμπύλη} \end{cases}$$

► <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>2

Θεωρούμε το σημείο $K(1,\, 1,\, 1)$ και την ευθεία $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{\psi - 1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ (ε) και όλα τα σημεία M του χώρου με την ιδιότητα:

$\widehat{(\overrightarrow{KM},\, (\varepsilon)} = \text{ΣΤΑΘΕΡΗ} = \dfrac{\pi}{4}$.

Να εξεταστεί εάν τα M σχηματίζουν σταθερή επιφάνεια.

σχήμα

Θεωρώ το διάνυσμα $\vec{w}(1,\, 1,\, 1) \parallel (\varepsilon)$.

$$\widehat{(\overrightarrow{KM},\, \vec{w})} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |\cos(\overrightarrow{KM},\, \vec{w})| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\cos(\overrightarrow{KM},\, \vec{w}) = \frac{< \overrightarrow{KM},\, \vec{w} >}{\|\overrightarrow{KM}\|\, \|\vec{w}\|} = \frac{< (x-1,\, \psi - 1,\, z-1),\, (1,\, 1,\, 1) >}{\sqrt{(x-1)^2 + (\psi-1)^2 + (z-1)^2}\, \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{= \quad \frac{[(x-1) + (\psi - 1) + (z-1)]^2}{[(x-1)^2 + (\psi-1)^2 + (z-1)^2]^3} \quad = \quad \frac{1}{2}} \text{ παριστάνει κώνο με κορυφή } K(1,\, 1,\, 1).$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \begin{matrix} x - 1 = X \\ \psi - 1 = \Psi \\ z - 1 = Z \end{matrix}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $2(X + \Psi + Z)^2 = 3(X^2 + \Psi^2 + Z^2)$.

$F(X,\, \Psi,\, Z) = 0$

$F(X,\, \Psi,\, Z) = 3(X^2 + \Psi^2 + Z^2) - 2(X + \Psi + Z)^2$

$$\boxed{X^2 + \Psi^2 + Z^2 - 4X\Psi - 4XZ - 4\Psi Z = 0}$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ β′ ΒΑΘΜΟΥ

ορθός κυκλικός κώνος

σχήμα

φ : γωνία της γενέτειρας με τον άξονα

2φ : γωνία του κώνου

▶ $\boxed{\text{ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ}}$

σχήμα

οδηγός καμπύλη (C).
γενέτειρα: κινείται πάνω στην οδηγό καμπύλη παραμένοντας παράλληλη σε μιά σταθερή διεύθυνση (δ)

$\vec{u}\uparrow$
διεύθυνση

σχήμα

(C) : καμπύλη $\begin{cases} f_1(x\,\psi,\,z) \\ f_2(x,\,\psi,\,z) \end{cases}$

$\boxed{(S) = \{p | \exists A \in (G) : \ \overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}\}}$ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Έστω $P(x,\,\psi,\,z)$, $A_1(x_1,\,\psi_1,\,z_1) \in C$, $C \begin{cases} f_1(x,\,\psi,\,z) = 0 \\ f_2(x,\,\psi,\,z) = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u}\ t \in \mathbb{R}$

Προκύπτει το ΣΥΣΤΗΜΑ $\begin{cases} x - x_1 = t\alpha \\ \psi - \psi_1 = t\beta \\ z - z_1 = t\gamma \\ f_1(x_1,\,\psi_1,\,z_1) = 0 \\ f_2(x_2,\,\psi_2,\,z_2) = 0 \end{cases}$ Απαλοιφή των $t,\,x_1,\,\psi_1,\,z_1$.

Με την απαλοιφή των $t,\,x_1,\,\psi_1,\,z_1$ προκύπτει $F(x,\,\psi,\,z) = 0$ η εξίσωση επιφάνειας.

▶ <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: <u>ΟΡΘΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ</u>

$$(C) : \begin{cases} \psi^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ στο } Ox\psi$$

$\vec{u}(0,\,0,\,1) \perp$ στο $Ox\psi$
$A(x_1,\,\psi_1,\,z_1) \in C$

σχήμα

$S = \{p | \exists A \in (G) : \ \overrightarrow{AP} \parallel \vec{u},\, \overrightarrow{AP} = t\vec{u}\}$ όπου $P(x,\,\psi,\,z)$ τυχαίο σημείο.
Η επιφάνεια (S) που θα προκύψει είναι ΟΡΘΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ.

$$\left| \begin{array}{c} x - x_1 = 0t \\ \psi - \psi_1 = 0t \\ z - z_1 = 1t \\ \left\{ \begin{array}{c} \psi_1^2 = 2px_1 \\ z_1 = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Αφού $z_1 = 0 \Rightarrow z = t$ τότε: $\left\{ \begin{array}{c} x - x_1 = 0 \\ \psi - \psi_1 = 0 \\ \psi^2 = 2px \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

<u>Σχόλιο</u> Η εξίσωση $\psi^2 = 2px$ στο χώρο είναι ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ. Η εξίσωση που προκύπτει είναι β′ βαθμού ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ.

► <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: <u>ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ</u>

$C = \begin{cases} \psi^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ στο $Ox\psi$ σχήμα

$\vec{w} = (1,\, 2,\, 3)$
$A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \in C$

$$\left| \begin{array}{c} x - x_1 = t \\ \psi - \psi_1 = 2t \\ z - z_1 = 3t \\ \psi_1^2 = 2px_1 \\ z_1 = 0 \end{array} \right.$$

$z = 3t \Rightarrow t = \dfrac{z}{3}$
Τότε $x_1 = x - \dfrac{z}{3}$
$\psi_1 = \psi - \dfrac{2z}{3}$
Θέτουμε τα $x_1,\, \psi_1$ στην $\psi_1^2 = 2px_1$ και προκύπτει

$$(\psi - \frac{2z}{3})^2 = 2p(x - \frac{z}{3}) \Rightarrow$$

$$\boxed{3(\psi - \frac{2z}{3})^2 \;=\; 6p(3x - z)} \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$$

$$(E) : \boxed{9\psi^2 + 4z^2 - 12\psi z - 3x + z = 0}$$

Αν εξετάσουμε την (E) ως προς την ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ προκύπτει ότι $\nexists$ ΚΕΝΤΡΟ.

<u>ΣΦΑΡΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ</u>

► <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Θεωρούμε τη σφαίρα $x^2 + \psi^2 + z^2 = 1$ και το μέγιστο κύκλο που προκύπτει ως τομή της (S) και του επιπέδου $x + \psi + z = 0$.

σχήμα

<u>Ζητείται η ορθή κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό καμπύλη την (C)</u>
<u>Για σφαίρα (S) και καμπύλη (C) όπως πριν ζητείται ο Γ.Τ.</u>
<u>των εφαπτομένων στη σφαίρα και στην καμπύλη</u>

$P(x,\, \psi,\, z)$: σημείο της επιφάνειας
$A(x_1,\, psi_1,\, z_1)$: σημείο της (C)
$\vec{u}(1,\, 1,\, 1) \perp$ στο επίπεδο της (C).

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_1 = t_1 & (1) \\ \psi - \psi_1 = t & (2) \\ z - z_1 = t & (3) \\ x_1 + \psi_1 + z_1 = 0 & (4) \\ x_1^2 + \psi_1^2 + z_1^2 = 1 & (5) \end{array} \right.$$

$t \neq 0$ τότε $\dfrac{x-x_1}{t} = \dfrac{\psi-\psi_1}{t} = \dfrac{z-z_1}{t} = \dfrac{x+\psi+z-\cancel{(x_1+\psi_1+z_1)}^0}{3t}$

οπότε $t = \dfrac{x+\psi+z}{3}$

$(1) \Rightarrow\ x_1 = \dfrac{-\psi-z+2x}{3},\ (2) \Rightarrow\ \psi_1 = \dfrac{-x+2\psi-z}{3},\ (3) \Rightarrow\ z_1 = \dfrac{-x-\psi+2z}{3}$

Αντικαθιστούμε τα x_1, ψ_1, z_1 στην (5)

$\boxed{(\psi+z-2x)^2+(x-2\psi+z)^2+(x+\psi-2z)^2} = 9$

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ που εφάπτεται στη σφαίρα. Αν είχε στο δεύτερο μέλος 0 θα ήταν κώνος γιατί θα ήταν ΟΜΟΓΕΝΗΣ.

<u>ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ</u>

▶ ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθεί η εξίσωση του ελλειπτικού κυλίνδρου με οδηγό την καμπύλη (C) : $3x^2+\psi^2-1=0$, $z=0$ και διεύθυνση ορισμένη από το $\vec{u}=(1,-3,2)$

$(C) : \begin{cases} 3x^2+\psi^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ ΕΛΛΕΙΨΗ στο $Ox\psi$: ΟΔΗΓΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗ

$\vec{u}(1,-3,2)$: ΣΤΑΘΕΡΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ

$A(x_1,\psi_1,z_1) \in C$

$P(x,\psi,z)$ τυχαίο σημείο της επιφάνειας

$S = \{p | \exists A \in (G) : \overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}\}$ $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}$ δηλαδή $\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$.

$\overrightarrow{AP} = (x-x_1,\ \psi-\psi_1,\ z-z_1)$

$$\begin{cases} x-x_1 = 1\cdot t \\ \psi-\psi_1 = -3t \\ z-z_1 = 2t \\ 3x_1^2+\psi_1^2 = 1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

Προκύπτει ότι $z_1 = 0 \Rightarrow z = 2t \Rightarrow t = \dfrac{z}{2}$. Τότε $x_1 = \dfrac{2x-z}{2}$, $\psi_1 = \dfrac{2\psi+3z}{2}$. Αντικαθιστούμε στην $3x_1^2+\psi_1^2=1$ και προκύπτει

$$3(\frac{2x-z}{2})^2+(\frac{2\psi+3z}{2})^2 = 1 \Rightarrow 3(2x-z)^2+(2\psi+3z)^2-4=0 \Rightarrow$$

Άρα $(S) :\ 3(2x-z)^2+(2\psi+3z)^2-4=0$ εξίσωση ελλειπτικού κυλίνδρου.

► $\boxed{\text{ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ}}$

Δεδομένα:
C: ΚΑΜΠΥΛΗ
ξ: ΕΥΘΕΙΑ που λειτουργει ως άξονας

με περιστροφή της (C) γύρω από την ξ
παράγεται μια επιφάνεια (S).
<u>Κάθε σημείο της επιφάνειας βρίσκεται πάνω σε ένα ΚΥΚΛΟ.</u>
Αυτός λέγεται <u>ΚΥΚΛΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ</u>
και

σχήμα

- έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο A με την καμπύλη
- το επίπεδο του κύκλου είναι κάθετο στον άξονα ξ και τον τέμνει σε ένα σημείο K: κέντρο του κύκλου. Δηλαδή (KAP)(επίπεδο) $\perp \xi$

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ</u>
$(S): \{P | \exists!(K \in (\xi) \text{ και } A \in (C))\}$
$\big((KAP) \perp (\xi)$
$\|\overrightarrow{KA}\| = \|\overrightarrow{KP}\|$
ξ: εξίσωση ευθείας
(C): εξίσωση τομή επιφανειών
(Σ): συνθήκες: $K \in (\xi)$ και $A \in (C)$.
<u>ΚΩΝΟΣ (ΔΙΧΩΝΟ)</u>

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: Να υπολογιστεί η επιφάνεια που προκύπτει από περιστροφή της $(C) \left\{ \begin{array}{c} x - \psi = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$
γύρω από τον άξονα $x'x$ όπου $x'x = (x, 0, 0)\, x \in \mathbb{R}$.
σχήμα
$\Leftarrow$ (Σ) κώνος στο χώρο
$M \in (\Sigma)$ $M(x, \psi, z)$

$A \in (C)$, $A(x_1, \psi_1, z_1)$ και $\left\{ \begin{array}{c} x_1 - \psi_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array} \right.$

$K \in \xi$, $K(x_0, 0, 0)$
(KAM) επίπεδο $\perp (\xi) \Rightarrow x = x_0 = x_1$
$\|\overrightarrow{KA}\|^2 = \|\overrightarrow{KM}\|^2 \Rightarrow$

$$\cancel{(x_1 - x_0)^2} + \psi_1^2 + \cancel{z_1^2}^{0} = \cancel{(x - x_0)^2} + (\psi - \psi_0)^2 + (z - z_0)^2 \overset{x_1 = x}{\Rightarrow}$$

$$\psi_1^2 = (\psi - \psi_0)^2 + (z - z_0)^2 \overset{\psi_0 = 0,\, z_0 = 0}{\Longrightarrow} \psi_1^2 = \psi^2 + z^2 \overset{\psi_1 = x}{\Rightarrow}$$

$$x^2 = \psi^2 + z^2 \Rightarrow -x^2 + \psi^2 + z^2 = 0 \rightarrow \text{ ΚΩΝΟΣ}$$

$\left.\begin{array}{r} x = \sqrt{\psi^2 + z^2} \\ x = -\sqrt{\psi^2 + z^2} \end{array}\right\}$ Η κορυφή δεν είναι ομαλό σημείο.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: <u>ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ εκ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ</u>

$(C)\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$

$(\xi)\, x = z = 0 \rightarrow$ άξονας $\psi'\psi$

σχήμα
$M(x,\, \psi,\, z)$
$A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \rightarrow \dfrac{x_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi_1^2}{\beta^2} = 1,\ z_1 = 0$
$K(0,\, \psi_0,\, 0)$

$$\|\overrightarrow{KM}\|^2 = \|\overrightarrow{KA}\|^2 \Rightarrow \underline{x^2 + (\psi - \psi_0)^2 + z^2 = x_1^2 + (\psi_1 - \psi_0)^2 + z_1^2} \tag{1}$$

(KAM) επίπεδο $\perp$ $(\xi) \Rightarrow\ \psi_1 = \psi = \psi_0$
Κάνουμε απαλοιφή των $x_0,\, x_1,\, \psi_1,\, z_1$

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\psi_1^2}{\beta^2} = 1 \overset{\psi_1 = \psi}{\Longrightarrow} \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$$

$(1) \Rightarrow\ x^2 + z^2 = z_1^2$

$$\frac{x^2 + z^2}{\alpha^2} = \frac{x_1^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{\psi^2}{\beta^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\alpha^2}\ =\ 1}$$

Αν $\alpha = \beta = \mathbb{R}$ (ΚΥΚΛΟΣ)
$x^2 + \psi^2 + z^2 = \mathbb{R}$ σφαίρα εκ περιστροφής.
Σημείωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\alpha^2} = 1$. Παρατηρούμε ότι οι παρανομαστές του πρώτου και τρίτου κλάσματος είναι όμοιοι και συνεπώς πρόκειται για επιφάνεια εκ περιστροφής.
Αν $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ οι παρανομαστές του πρώτου και τρίτου κλάσματος δεν είναι όμοιοι και συνεπώς η επιφάνεια δεν ειναι εκ περιστροφής.
<u>ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ</u>

(α) Καμπύλη $(C)\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\psi^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{\alpha^2} = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$
(β) άξονας περιστροφής: Ο άξονας $z'z$ $\|\overrightarrow{KA}\| = \|\overrightarrow{KM}\|$

σχήμα

$K(0,\, 0,\, z_0)$
$(KAM) \perp z'z \Rightarrow$
$z_0 = z_1 = z$
το A έχει $x_1 = 0$ γιατί $A \in (C)$
$A(0,\, \psi_1,\, z_1)$

$x_1 = 0$
$\dfrac{\psi_1^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{\alpha^2} = 1$
$x^2 + \psi^2 = \psi_1^2 \Rightarrow \dfrac{x^2+\psi^2}{b^2} = \dfrac{\psi_1^2}{b^2} = 1 + \dfrac{z^2}{\alpha^2}$

Προκύπτει: $\boxed{\dfrac{x^2+\psi^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{\alpha^2} = 1}$ ΜΟΝΟΧΩΝΟ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $x^2 + \dfrac{\psi^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = 1$ ΔΕΝ είναι εκ περιστροφής
$x^2 - \psi^2 - z^2 = 1$ ΔΕΝ είναι ΜΟΝΟΧΩΝΟ.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: <u>ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ/ΔΙΧΩΝΟ</u>

$C \begin{cases} \dfrac{\psi^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ ΥΠΕΡΒΟΛΗ στο $\psi O z$

άξονας περιστροφής $\psi'\psi$

σχήμα

$A(x_1,\, \psi_1,\, z_1)$
$K(0,\, \psi_0,\, 0)$
$P(x,\, \psi,\, z)$
$\psi = \psi_0 = \psi_1 \Rightarrow -\dfrac{x^2+z^2}{c^2} + \dfrac{\psi^2}{b^2} = 1$

$$\boxed{-\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\psi^2}{b^2} = 1}$$

<u>ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΗ εκ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ</u>

ΚΑΜΠΥΛΗ: $\psi^2 = 2\alpha^2 cz, x = 0 \rightarrow$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ στον $\psi O z$
ΑΞΟΝΑΣ: $z'z$

σχήμα

Περιστρέφουμε τη C γύρω από τον $z'z$ άξονα.

Ισχύει $(KAP) \perp z'z$, $\|\overrightarrow{KA}\|^2 = \|\overrightarrow{KP}\|^2$

$A(x_1,\, \psi_1,\, z_1)$
$K(0,\, 0,\, z_0)$
$P(x,\, \psi,\, z)$

$$\left.\begin{array}{c} \|\overrightarrow{KP}\|^2 = x^2 + \psi^2 \\ \|\overrightarrow{KA}\|^2 = \psi_1^2 \\ \psi_1^2 = (2\alpha^2 c)z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + \psi^2 - (2\alpha^2 c)z = 0}$, όπου z πρωτοβάθμιος όρος.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

► ΚΩΝΟΙ: $\alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 = 0$
► ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} \pm \dfrac{\psi^2}{\beta^2} \pm \dfrac{z^2}{\beta^2} = 1$
ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΗ

ανηγμένες μορφές β′ βάθμια

τα ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ-ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΗ έχουν ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ*
και ΠΟΛΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ
$\star\ (x,\, psi,\, z) \to (-x,\, -\psi,\, -z)$

► ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΗ: $x^2 + \psi^2 - (2\alpha^2 c)z = 0$
ΔΕΝ έχει ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ
Έχει ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ.

► Η ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ στο ΧΩΡΟ

$$(E) : \underbrace{\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}\psi^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}x\psi + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}\psi z}_{\beta\text{-βάθμιο}} + \underbrace{2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}z + \alpha_{34}z + \alpha_{44}}_{\alpha\text{-βάθμιο}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i,\,j=1}^{3} \alpha_{ij}x_{ij} & \\ x_1 \to x & \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \\ x_2 \to \psi & \\ x_3 \to z & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i4}x_i \end{bmatrix} + \alpha_{44} = 0$$

β'βάθμιο α'βάθμιο

Εκφράζουμε την (E) ως γινόμενο πινάκων

$$\underbrace{(x,\, \psi,\, z) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ z \end{pmatrix}}_{\beta'\text{βάθμιο}} + \underbrace{2(\alpha_{14},\, \alpha_{24},\, \alpha_{34}) \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ z \end{pmatrix}}_{\alpha'\text{βάθμιο}} + \alpha_{44} = 0$$

$A = \alpha_{ij},\ A = A^t$

$B = (\alpha_{14},\, \alpha_{24},\, \alpha_{34})$

$X = \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ z \end{pmatrix}$

$\Gamma = \alpha_{44}$

$(E) : \boxed{X^tAX \ + \ 2BX \ + \ \Gamma}$

► ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ που ΑΠΛΟΠΟΙΕΙ την (E)

Η (E) αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi z$ $\{M(x,\, \psi,\, z)|(E) = 0\}$.
Αναζητούμε σύστημα συντεταγμένων $\{O'x'\psi'z'\}$ ώστε η (E) να παίρνει την απλούστερη μορφή.

• ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ στο ΧΩΡΟ

$x \leftrightarrow Ox\psi z$

$\psi \leftrightarrow O'x'\psi'z'$

$X = P\psi + H$ όπου P: πίνακας αλλαγής βάσης που διατηρεί τα μήκη, ΣΤΡΟΦΗ (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ) και H: ΜΕΤΑΦΟΡΑ

P: ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ της ΣΤΡΟΦΗΣ

όπου $\boxed{P \cdot P^t = I}$ δηλαδή ο P είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\forall x,\, \psi,\, z,\, x',\, \psi',\, z'$

$x^2 + \psi^2 + z^2 = (x')^2 + (\psi')^2 + (z')^2$

$(x,\, \psi,\, z)I \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ z \end{pmatrix} = X^t I X$

$(x',\, \psi',\, z')I \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \\ z' \end{pmatrix} = \Psi^t I \Psi$

Πρέπει $\underline{X^t I X = \Psi^t I \Psi}$

Ισχύει $\begin{matrix} X = P\Psi \\ X^t = \Psi^t P^t \end{matrix}$

Τότε $\boxed{\Psi^t P^t P \Psi \;=\; \Psi^t I \Psi}\ \forall \psi \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$

Προκύπτει ότι $PP^t = I$

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \underset{P^t}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}} = I$$

Οι γραμμές είναι μεταξύ τους ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
Οι στήλες είναι μεταξύ τους ΟΡΘΟΦΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
Κάθε γραμμή, κάθε στήλη έχουν μήκος 1.

<u>Επίσης ισχύει</u> $\underline{\det(P)^2 = 1} \Rightarrow \begin{cases} \det(P) = 1 \\ \det(P) = -1 \end{cases}$

$$P^{-1} = P^t$$

Αλλάζουμε συντεταγμένες: $X = P\Psi + H$
Στην εξίσωση (E): $\boxed{X^t A X \,+\, 2BX \,+\, \Gamma \;=\; 0}$
αντικαθιστούμε το X και προκύπτει:

$$\underbrace{\Psi^t(PAP^t)\Psi}_{\beta'\text{βάθμιο}} + \underbrace{2[(HA+B)P^t]\Psi}_{\alpha'\text{βάθμιο}} + \underbrace{(HAH^t + 2BH^t + \Gamma)}_{\text{σταθερός όρος}} = 0$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ $\begin{matrix} A \rightsquigarrow PAP^t \\ B \rightsquigarrow (HA+B)P^t \\ \Gamma \rightsquigarrow (HAH^t + 2BH^t + \Gamma) \end{matrix}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: <u>Υπάρχει μία μεταφορά ώστε στην εξίσωση που προκύπτει να μην υπάρχει πρωτοβάθμιος όρος</u>

Μόνο αν υπάρχει H : $\left.\begin{matrix} (HA+B)P^t = 0 \\ P^t \text{ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ} \end{matrix}\right\} HA + B = 0$

Δηλαδή πρέπει $HA = -B \Rightarrow \begin{cases} \det(A) \neq 0 & \text{έχει λύση} \\ \det(A) = 0 & \text{δεν έχει λύση} \end{cases}$

Αν $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \boxed{H = -BA^{-1}}$

► ΠΡΟΤΑΣΗ

Η E είναι επιφάνεια που έχει ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$. Τότε το ΚΕΝΤΡΟ είναι η λύση του συστήματος $H = -BA^{-1}$.

ΜΕΛΕΤΗ των ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

► 1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\det(A) \neq 0$ δηλαδή υπάρχει ΚΕΝΤΡΟ σε μια μεταφορά.

$$\underline{\alpha_{11}^{'}x'^2 + \alpha_{22}^{'}\psi'^2 + \alpha_{33}^{'}\psi'^2 + 2\alpha_{12}^{'}x'\psi' + 2\alpha_{13}^{'}x'z' + 2\alpha_{23}^{'}\psi'z' + \alpha_{44}^{'} = 0}$$

$\boxed{Z^tBZ + \Delta = 0}$ όπου B: συμμετρικός και $B = A$ με $\det(B) \neq 0$ και

Z^tBZ : β΄βάθμιος όρος, Δ : σταθερός όρος.

Πρέπει να γίνει ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ για να φύγουν οι όροι $x'\psi'$, $\psi'z'$, $x'z'$

Υπάρχει αλλαγή βάσης $\Omega = PZ$ ώστε $\Omega^t \underbrace{(PBP^t)}_{\text{διαγώνιος}} \Omega + \Delta^\star = 0$

(Δηλαδή εξαφανίζονται ταυτόχρονα τα γινόμενα)

Υπενθύμιση από ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΙ: ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ

Έστω M συμμετρικός πίνακας πραγματικών συντελεστών τότε ο M είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα που στην διαγώνιο υπάρχουν οι ιδιοτιμές που είναι ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ

$$K^{-1}MK = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \neq 0$$

Επιπλέον ο K μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Αν $\det(A) \neq 0$ υπάρχει μία αλλαγή συντεταγμένων $X = P\Psi + H$ που στο νέο σύστημα η (E) θα παίρνει τη μορφή

$$\alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 + \delta = 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0$$

► $\underline{\alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 = -\delta}$

$\delta = 0 \Rightarrow \alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 = 0$,
$\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0$ ΚΩΝΟΣ (πραγματικός ή φανταστικός)

$\delta \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{(-\frac{\delta}{\alpha})} + \dfrac{\psi^2}{(-\frac{\delta}{\beta})} + \dfrac{z^2}{(-\frac{\delta}{\gamma})} = 1$ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ή ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ μονόχωνο, δίχωνο πραγματικό ή φανταστικό ανάλογα με τα πρόσημα των $-\frac{\delta}{\alpha},\ -\frac{\delta}{\beta},\ -\frac{\delta}{\gamma}$

► <u>2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u>: $\det(A) = 0$ δεν υπάρχει ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ
Υπάρχει πρωτοβάθμιος όρος
(Δεν μπορεί να γίνει μεταφορά)
Μπορεί να γίνει ΣΤΡΟΦΗ (ο πίνακας διαγωνιοποιείται αλλά υπάρχουν μηδενικά στην διαγώνιο).

$$\alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + 2jz + n = 0$$

κάποιο από τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι μηδέν.

• <u>Έστω ότι υπάρχει ένα μηδενικό</u> π.χ. $\gamma = 0$

$$\alpha x^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + 2jz + n = 0 \ \alpha,\ \beta \neq 0$$

με κατάλληλη μεταφορά:

$$\alpha' x'^2 + \beta'\psi'^2 + \underbrace{2jz + n'} = 0$$

και με άλλη μεταφορά

$$\alpha' x'^2 + \beta'\psi'^2 + j'z' = 0$$

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ ή ΥΠΕΡΒΟΛΟΚΟΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ αν $j' = 0$.
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ή ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ αν $j' \neq 0$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\psi^2}{4} = 1 \\ z = 0 \\ \vec{u}(0,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \ \boxed{\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\psi^2}{4} = 1} \cdot \text{ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ.}$$

► <u>ΘΕΜΑ 1</u>

α) Αν $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ και ισχύει $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = \|\vec{a}+\vec{b}\|$ να δείξετε ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι συγγραμμικά.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Rightarrow < \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} >= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Rightarrow$$

$$\cancel{< \vec{a}, \vec{a} >} + \cancel{< \vec{b}, \vec{b} >} + 2 < \vec{a}, \vec{b} >= \cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} + 2\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \Rightarrow$$

$\boxed{< \vec{a}, \vec{b} >= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

$1^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ:

$< \vec{a}, \vec{b} >= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$0 \neq \vec{a}, \vec{b} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ συγγραμικά

$2^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

$\begin{matrix} \vec{a} = (a_1, a_2) \\ \vec{b} = (b_1, b_2) \end{matrix}$ τότε $< \vec{a}, \vec{b} >= a_1b_1 + a_2b_2$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} = \cancel{a_1^2b_1^2} + \cancel{a_2^2b_2^2} + 2a_1b_1a_2b_2 = (\cancel{a_1^2b_1^2} + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + \cancel{a_2^2b_2^2})$$

$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0$

$a_1b_2 = a_2b_1$

$0 \neq \vec{a}, \vec{b} \Rightarrow$ π.χ. $b_1 \neq 0$

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \end{matrix} \Rightarrow (a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2)$

$| < \vec{a}, \vec{b} > \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SWARTZ

$\vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\varphi(\lambda) = \|\vec{a}+\lambda\vec{b}\|^2 \geq 0$

$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} + \lambda\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ συγγραμμικά.

β) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ και ισχύει $< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >= 0$ τότε τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίπεδα. ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: είναι ΣΩΣΤΟ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Α΄ ΤΡΟΠΟΣ):

$| < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} > | = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συνεπίπεδα άρα δεν σχηματίζεται παραλληλεπίπεδο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Β΄ ΤΡΟΠΟΣ):

$\det\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ γραμμικά εξαρτημένα.

Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$ και $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0 \Rightarrow$

$\exists(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3) \neq (0,\, 0,\, 0)$ τότε για $\lambda_1 \neq 0$ είναι $\vec{a} = (-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1})\vec{b} - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1})\vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \rho\vec{b} + \kappa\vec{c} \Rightarrow$

$\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}$ συνεπίπεδα.

Αν $\vec{a} = 0$ τότε $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

γ) Στο συνήθη χώρο θεωρούμε το επίπεδο (Π) : $x - 2\psi + z = 0$ και το σημείο $M : \overrightarrow{OM}(1,\, 1,\, 1)$. Να βρεθούν σημεία N του επιπέδου (Π) τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ και $\|\overrightarrow{ON}\| = 1$.

ΛΥΣΗ:
Έστω $\overrightarrow{ON}(x,\, \psi,\, z)$ τότε $N \in (\Pi)$ και ισχύει

$$\begin{cases} (a)\, x - 2\psi + z = 0, & \text{γιατί}\, N \in (\Pi)\cdot \\ (b)\, <\overrightarrow{OM},\, \overrightarrow{ON}>= x + \psi + z = 0, & (\text{γιατί}\, \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON})\cdot \\ (c)\, \|\overrightarrow{ON}\| = 1 \Rightarrow x^2 + \psi^2 + z^2 = 1. & \end{cases} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} (2a)\, x - 2\psi + z = 0 \\ (2b)\, x + \psi + z = 0 \end{array}\right\} (-) \Rightarrow \begin{array}{c} \psi = 0 \\ z = -x \text{ ή } x = -z \end{array} \quad \text{τότε } (x,\, \psi,\, z) = \lambda(1,\, 0,\, -1).$$

Άρα $N = \{(x,\, \psi,\, z) \in \mathbb{R}^3 | (x,\, \psi,\, z) = \lambda(1,\, 0,\, -1)\}$.
$(2c)\, \|\overrightarrow{ON}\| = 1 \Rightarrow \|\lambda(1,\, 0,\, -1)\| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0,\, \frac{\sqrt{2}}{2}),\; (\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0,\, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Δηλαδή υπάρχουν 2 σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος.

σχήμα

δ) Στο $\mathbb{R}^3$ και στο $\{Ox\psi z\}$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : (x,\, \psi) \to f(x,\, \psi) = \Big(\frac{(-x + 2\kappa\psi)}{2},\, \frac{(2\lambda x + \psi)}{2}\Big),\; \kappa,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

και $\kappa\lambda = \dfrac{3}{4}$. Να υπολογιστούν τα κ, λ ώστε:

$$\|f(x,\, \psi)\| = \|(x,\, \psi)\|\ \forall x,\, \psi \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ:

$$\|f(x,\, \psi)\|^2 = \frac{1}{4}(-x + 2\kappa\psi)^2 + \frac{1}{4}(2\lambda x + \psi)^2 = \frac{1}{4}[x^2 + 4\kappa^2\psi^2 + 4\lambda^2 + \psi^2 - 4\kappa x\psi + \psi^2 + 4\lambda x\psi] =$$

$$= \frac{(1 + 4\lambda^2)}{4}x^2 + \frac{(1 + 4\kappa^2)}{4}\psi^2 + (\lambda - \kappa)x\psi\ \forall x,\, \psi$$

$\|(x,\,\psi)\|^2 = x^2+\psi^2$

Πρέπει

$$\begin{cases} \dfrac{(1+4\lambda^2)}{4} = 1 \\ \dfrac{(1+4\kappa^2)}{4} = 1 \\ \lambda = \kappa \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$\kappa = \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \kappa = \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

γιατί $\kappa\lambda = \dfrac{3}{4}$.

► <u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται η εξίσωση του $\mathbb{R}^3$ στο σύστημα $\{Ox\psi z\}$

$$(\Sigma):\ x^2+\psi^2+z^2-8x+6z-11=0$$

α) Να αποδειχθεί ότι η (Σ) παριστάνει σφαίρα και να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα

$$(x-4)^2-16+(\psi^2)+(z+3)^2-9-11=0$$

$$(x-4)^2+\psi^2+(z+3)^2-36=0 \Rightarrow$$

Κέντρο: $(4,\,0,\,-3)$
$R=6$.

β) Δίνεται το επίπεδο (Π) του χώρου $(\Pi):\ 2x-\psi+2z-5=0$.

(i) Να αποδειχθεί ότι $(\Pi)\bigcap(\Sigma) =$ κύκλος και να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα του.
Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $A\in(\Pi):\ \forall M\in[(\Pi)\bigcap(\Sigma)] \Rightarrow \|AM\| =$ σταθερό
Τότε συμπεραίνουμε ότι $[(\Pi)\bigcap(\Sigma)] = (C)$: κύκλος.
Αν υπήρχε αυτό το σημείο A τότε $\overrightarrow{KA} = \vec{\ell} \perp (\Pi) \Rightarrow \vec{\ell}(2,\,-1,\,2)$

σχήμα

(ε) : (ευθεία από K) $\perp$ (Π)
$(\varepsilon):\ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{\psi-0}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$ (1)
Άρα $A = (\Pi)\bigcap(E)$.

Θέτουμε t τους ίσους λόγους στην (1) δηλαδή
$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{\psi-0}{-1} = \dfrac{z+3}{2} = t$ οπότε:

$x = 2t+4$
$\psi = -t$
$z = 2t+3$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του (Π) : $2x + \psi + 2z + 5 = 0$ και προκύπτει:

$$2(2t+4) - (-t) + 2(2t+3) + 5 = 0 \Rightarrow 9t = -7 \Rightarrow t = -\frac{7}{9}$$

οπότε $x = -\frac{22}{9}, \psi = \frac{7}{9}, z = -\frac{41}{9}$

$A(x,\, \psi,\, z) = (-\frac{22}{9},\, \frac{7}{9},\, -\frac{41}{9}) \rightsquigarrow$ ΚΕΝΤΡΟ του ΚΥΚΛΟΥ

$$\|\overrightarrow{KA}\| = d(K,\, \Pi)^1 = \frac{2(-4) - \psi(0) + 2(-3) - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \Rightarrow \|\overrightarrow{KA}\| = 3$$

Άρα $R = \sqrt{(\text{ακτίνα σφαίρας})^2 - |KA|^2} \Rightarrow R = \sqrt{36 - 9} \Rightarrow R = \sqrt{27}$
Άρα η τομή $(\Pi) \bigcap (\Sigma)$: C κύκλος με $K(\cdots)$, $R = \sqrt{27}$

(ii) (Σ') ομόκεντρη της (Σ) εφαπτόμενη στο (Π)
$K(4,\, 0,\, -3)$ και $R' = d(K,\, \Pi) = 3$.

$\gamma)$ $A(-1,\, \sqrt{7},\, -1)$, $B(9,\, -\sqrt{7},\, 5)$.
Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων M του χώρου που βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A και B με ορθή γωνία (δηλαδή $\widehat{AMB} = 90^o$).

$1^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ σχήμα

$K \to$ ΜΕΣΟΝ του AB $K(4,\, 0,\, 2)$

$R = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 28 + 36} = \frac{1}{2}\sqrt{164}$

$(x-4)^2 + \psi^2 + (z-2)^2 = 41$

$2^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ $<\overrightarrow{MA},\, \overrightarrow{MB}>= 0$.

---

[1] $d(P,\, \Pi) = \frac{|Ax_0 + B\psi_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$