ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

16 Ιουνίου 2019

Παναγιώτης Γιαννιώτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Έστω $\mathcal{E}$ το επίπεδο της Ευκλείδειας γεωμετριας, αποτελούμενο από σημεία τα οποία θα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα $A, B, C, \ldots$. Έχουμε επίσης τις οικίες έννοιες: ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, τρίγωνο κτλ, καθώς επίσης και έννοιες όπως μήκος ευθύγραμμου τμήματος, παραλληλία, γωνία και καθετότητα μεταξύ ευθειών, εμβαδόν κτλ.

Θα δούμε ότι είναι δυνατόν να φτιάξουμε μια αντιστοιχία, η οποία θα μεταφράζει αντικείμενα σχετικά με το Ευκλείδειο επίπεδο $\mathcal{E}$ σε αντικείμενα που μπορούν να περιγραφτούν στην γλώσσα των αριθμών και των εξισώσεων. Κεντρικό ρόλο σε αυτή την αντιστοιχία παίζει η έννοια **διάνυσμα**.

1.1 Διανύσματα

1.1.1 Εφαρμοστά διανύσματα

Ένα διατεταγμένο ζεύγος (A, B) σημείων του επιπέδου θα λέμε οτι είναι ένα *προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα*.

Ορισμός 1.

- ***Εφαρμοστό διάνυσμα*** *με αρχή* A *και τέλος* B *είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα* (A, B). *Για συντομία θα το συμβολίζουμε ως* $\vec{AB}$. *Η αρχή του διανύσματος* $\vec{AB}$ *ονομάζεται και* ***σημείο εφαρμογής***.

- *Το διάνυσμα* $\vec{AA}$ *ονομάζεται* ***μηδενικό διάνυσμα*** *στο* A.

- ***Φορέας*** *του* $\vec{AB}$ *λέγεται η (μοναδική) ευθεία που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα* AB.

- ***Διεύθυνση:*** *Δύο διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD}$ με φορείς τις ευθείες l_1, l_2 αντίστοιχα θα λέμε ότι* ***έχουν την ίδια διεύθυνση*** *ή ότι* ***είναι παράλληλα*** *αν και μόνο αν $l_1 \parallel l_2$, δηλαδή αν οι ευθείες l_1, l_2 είναι παράλληλες. Τότε θα γράφουμε $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$.*

- *Θα λέμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD}$ με φορείς τις ευθείες l_1, l_2 είναι* ***κάθετα*** *αν οι ευθείες l_1, l_2 είναι κάθετες ($l_1 \perp l_2$) και θα γράφουμε $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.*

- ***Φορά:*** *Δύο διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD}$ με τον ίδιο φορέα θα λέμε οτι* ***έχουν την ίδια φορά*** *ή* ***είναι ομόρροπα*** *αν τα ευθύγραμμα τμήματα AB, CD ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας AC. Αν ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα θα λέμε ότι* ***έχουν αντίθετη φορά*** *ή ότι* ***είναι αντίρροπα****.*

- ***Μέτρο*** *του $\vec{AB}$ αποκαλούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, και το συμβολίζουμε ως $||\vec{AB}||$.*

Εικόνες/παραδείγματα

1.1.2 Σχέσεις ισοδυναμίας

Υπενθυμίζουμε την έννοια της σχέσεως ισοδυναμίας: Σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο X είναι ένα υποσύνολο $R \subset X \times X$ με τις εξής ιδιότητες

- (ανακλαστική) Για κάθε $a \in X$ έχουμε ότι $(a, a) \in R$
- (συμμετρική) $(a, b) \in R$ αν και μόνο αν $(b, a) \in R$
- (μεταβατική) Αν $(a, b) \in R$ και $(b, c) \in R$ τότε $(a, c) \in R$.

Για ευκολία, όταν $(a, b) \in R$ μπορούμε να γράφουμε $a \sim b$. Μια σχέση ισοδυναμίας R χωρίζει το σύνολο X σε κλάσεις ισοδυναμίας. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας $[x]$ του x (ή αλλιώς, με αντιπρόσωπο x) ως εξής:

$$[x] = \{y \in X, \text{ ώστε } y \sim x\}.$$

Από την ανακλαστική ιδιότητα, έχουμε πάντα την σχέση $x \in [x]$, συνεπώς

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]$$

Επίσης, αν από την μεταβατική ιδιότητα παίρνουμε ότι (άσκηση)

$$y \in [x] \Longrightarrow [y] = [x]. \tag{1.1.1}$$

Επομένως, για δύο κλάσεις ισοδυναμίας $[x], [y]$ μόνο ένα από τα παρακάτω ισχύει:

$$[x] = [y] \quad \text{ή} \quad [x] \cap [y] = \emptyset$$

1.1.3 Ελεύθερα διανύσματα

Στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων μπορούμε να ορίσουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας. Με απλά λόγια, θέλουμε έναν τρόπο να βλέπουμε σαν "ίδια" διανύσματα που έχουν ίδια **διεύθυνση, φορά** και **μέτρο**, ανεξαρτήτως ποιο είναι το σημείο εφαρμογής τους. Δηλαδή η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως:

$\vec{AB} \sim \vec{CD}$ αν και μόνο αν τα $\vec{AB}, \vec{CD}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο.

- Κάθε κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ θα αποκαλείται **ελεύθερο διάνυσμα**. Εφόσον τα ελεύθερα διανύσματα δεν έχουν σημεία εφαρμογής μπορούμε να τα συμβολίζουμε με ένα γράμμα, κατά σύμβαση μικρό: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$
- Αν ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a}$ αντιπροσωπεύεται απο το εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ υπενθυμίζουμε ότι $\vec{a} = [\vec{AB}]$.
- $[\vec{AB}] = [\vec{CD}]$ αν και μόνο αν το $\vec{CD}$ προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση του $\vec{AB}$ που στέλνει το A στο C και το B στο D.
- Το μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα είναι το $\vec{0} = [\vec{AA}]$, για κάθε σημείο A του επιπέδου.
- Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των ελεύθερων διανυσμάτων, θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$.
- Αν $\vec{a}$ είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα, το μέτρο του $\vec{a}$ θα συμβολίζεται με $||\vec{a}||$ και θα είναι ίσο με το μέτρο οποιουδήποτε αντιπροσώπου του $\vec{a}$:

  $$||\vec{a}|| = ||\vec{AB}||,$$

  για κάθε $\vec{AB} \in \vec{a}$.
- Αν $||\vec{a}|| = 1$ θα λέμε οτι το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι **μοναδιαίο**.

εικόνα

1.1.4 Πώς τα ελεύθερα διανύσματα μπορούν να περιγράψουν σημεία στο επίπεδο

Είδαμε ότι κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a} \in \mathcal{D}$ ουσιαστικά είναι ένας τρόπος να καθορίσουμε διεύθυνση, φορά και μέτρο χώρις να μας νοιάζει το σημείο εφαρμογής.

Έστω τώρα ότι έχουμε σταθεροποιήσει ένα σημείο $O \in \mathcal{E}$ στο Ευκλείδειο επίπεδο, και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_O$ το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων με αρχή το O. Τότε

- για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a} \in \mathcal{D}$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο M ώστε το διάνυσμα $O\vec{M} \in \mathcal{D}_O$ να ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας $\vec{a}$, δηλαδή $[O\vec{M}] = \vec{a}$ και άρα $O\vec{M} \in \vec{a}$.

- σε κάθε σημείο M στο επίπεδο αντιστοιχεί το εφαρμοστό διανυσμα $O\vec{M} \in \mathcal{D}_O$ και η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας $\vec{a} = [O\vec{M}]$. Το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a}$ τότε θα λέμε ότι είναι το **διάνυσμα θέσης** του M.

Έτσι, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_O$ τα διανύσματα με αρχή O, έχουμε $1-1$ και επί αντιστοιχίες

$$\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}_O \leftrightarrow \mathcal{E}.$$

Δηλαδή, εφόσον καθορίσουμε ένα σημείο O μπορούμε να σκεφτόμαστε τα σημεία του επιπέδου σαν διανύσματα με αρχή το O, αλλά και σαν ελεύθερα διανύσματα.

Παρατήρηση 1.1.1. Οι αντιστοιχίες $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{D}_O \leftrightarrow \mathcal{E}$ εξαρτώνται από το σημείο O. Εικόνα

1.2 Πράξεις διανυσμάτων

1.2.1 Πράξεις εφαρμοστών διανυσμάτων

- (πρόσθεση) Αν έχουμε δυο εφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BC}$ ώστε το τέλος του πρώτου συμπίπτει με την αρχή του δεύτερου, μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα $\vec{AB} + \vec{BC}$ ως
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$
Εικόνα

- (πολλαπλασιασμός με αριθμό) Αν έχουμε ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ και ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε το εφαρμοστό διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{AB}$ ως εξής:

Αν $\lambda \geq 0$: Έστω C το μοναδικό σημείο του επιπέδου ώστε να ανήκει στην ευθεία AB και είναι τέτοιο ώστε $|AC| = \lambda|AB|$ και τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}$ να είναι ομόρροπα, ορίζουμε
$$\lambda \cdot \vec{AB} = \vec{AC}.$$
Φυσικά, αν $\lambda = 0$ έχουμε ότι $C = A$ και $0 \cdot \vec{AB}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα στο A.

Αν $\lambda < 0$: Έστω C το μοναδικό σημείο του επιπέδου ώστε να ανήκει στην ευθεία AB και είναι τέτοιο ώστε $|AC| = |\lambda||AB|$ και τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}$ να είναι αντίρροπα, ορίζουμε
$$\lambda \cdot \vec{AB} = \vec{AC}.$$

Από τον ορισμό του $\lambda \cdot \vec{AB}$ προκύπτει ότι
$$||\lambda \cdot \vec{AB}|| = |\lambda| \, ||\vec{AB}||.$$

Παρατήρηση 1.2.1. Προσοχή, αν δύο εφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD}$ δεν είναι διαδοχικά, δηλαδή αν $B \neq C$, τότε δεν μπορούμε να σχηματίσουμε το άθροισμα $\vec{AB} + \vec{CD}$! Πιο συγκεκριμένα, ενώ μπορούμε να αθροίσουμε $\vec{AB} + \vec{BC}$, δεν μπορουμε να αθροίσουμε το $\vec{BC} + \vec{AB}$. Η πράξη $+$ που ορίσαμε δηλαδή παραπάνω, δεν ορίζεται μεταξύ όλων των διατεταγμένων ζευγών εφαρμοστών διανυσμάτων, ούτε είναι μεταθετική. Θα δούμε παρακάτω ότι για να ορίσουμε μια καλή πράξη "πρόσθεσης" διανυσμάτων πρέπει να περάσουμε στον κόσμο των ελεύθερων διανυσμάτων ή να περιοριστούμε σε εφαρμοστά διανύσματα με κοινή αρχή.

1.2.2 Πράξεις ελεύθερων διανυσμάτων

Έστω ελεύθερα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Επίσης, έστω ότι $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων ισοδυναμίας $\vec{a}$ και $\vec{b}$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$\vec{a} = [\vec{OA}], \quad \vec{b} = [\vec{OB}].$$

- (πρόσθεση) Παρατηρούμε ότι η παράλληλη μετατόπιση διανυσμάτων διατηρεί διεύθυνση, φορά και μέτρο. Επομένως μπορούμε να μετατοπίσουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{OB}$ σε ένα διάνυσμα $\vec{AC}$ έτσι ώστε $[\vec{AC}] = [\vec{OB}]$. Μπορούμε να ορίσουμε λοιπόν
$$\vec{a} + \vec{b} = [\vec{OA} + \vec{AC}] \text{ (που είναι ίσο με } [\vec{OC}]) \tag{1.2.1}$$

- (βαθμωτός πολλαπλασιασμός) Ορίζουμε
$$\lambda \cdot \vec{a} = [\lambda \cdot \vec{OA}], \tag{1.2.2}$$
και επομένως έχουμε
$$||\lambda \cdot \vec{a}|| = |\lambda| \, ||\vec{a}||.$$

Παρατήρηση 1.2.2. Οι παραπάνω πράξεις ορίστηκαν επιλέγοντας συγκεκριμένους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$. Για να είναι καλά ορισμένες όμως οι πράξεις, πρέπει να δείξουμε ότι ο ορισμός είναι **ανεξάρτητος** αυτής της επιλογής.

Για παράδειγμα, έστω $\vec{EF}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα ώστε $\vec{a} = [\vec{EF}]$. Το $\vec{EF}$ δεν είναι απαραίτητα ίσο με $\vec{OA}$, αλλά έχουν ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο αφού ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Θα θέλαμε να δείξουμε ότι

$$[\lambda \cdot \vec{OA}] = [\lambda \cdot \vec{EF}], \tag{1.2.3}$$

ώστε μέσω του ορισμού (1.2.2) να ορίζουν το ίδιο ελεύθερο διάνυσμα.

Άσκηση 1.
(α) Γιατί ισχύει η σχέση (1.2.3)*;*
(β) Παρομοίως, γιατί το ελεύθερο διάνυσμα που δίνεται στον ορισμό (1.2.1) *δεν εξαρτάται από την επιλογή των διανυσμάτων $\vec{OA}, \vec{OB}$;*

Πρόταση 1. *Το σύνολο $\mathcal{D}$ των ελεύθερων διανυσμάτων εφοδιασμένο με τις πράξεις $+, \cdot$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Πρέπει να ελέγξουμε ότι $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τα τα αξιώματα των διανυσματικών χώρων $\square$

1.2.3 Πράξεις εφαρμοστών διανυσμάτων με ίδιο σημείο εφαρμογής - Κανόνας του παραλληλογράμμου

Έστω $\vec{OA}, \vec{OB}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια λογική με την προηγούμενη παράγραφο ώστε να ορίσουμε

- $\vec{OA} + \vec{OB}$: Έστω $\vec{OC}$ ο μοναδικός αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας $[\vec{OA}] + [\vec{OB}]$, όπως η πρόσθεση ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

  Ορίζουμε
  $$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$

- $\lambda \cdot \vec{OA}$: κανονικά όπως στα εφαρμοστά διανύσματα.

Επιπλέον, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 2. *Το σύνολο $\mathcal{D}_O$ των διανυσμάτων με αρχή το O είναι διανυσματικός χώρος, ισομορφικός με τον χώρο των ελεύθερων διανυσμάτων $\mathcal{D}$.*

1.3 Διανύσματα στο χώρο

Έστω $\mathcal{T}$ ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος. Σε πλήρη αναλογία με τις προηγούμενες παραγράφους μπορούμε να ορίσουμε

- Εφαρμοστά διανύσματα στο χώρο, ως διατεταγμένα ζεύγη σημείων. Διεύθυνση, φορά και μέτρο ορίζονται όπως και στην περίπτωση διανυσμάτων στο επίπεδο.

- Σχέση ισοδυναμίας μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων : δυο εφαρμοστά διανύσματα ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αν και μόνο αν σχετίζονται μέσω παράλληλης μετατόπισης, και τελικά να ορίσουμε το σύνολο $\mathcal{D}'$ σαν το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας (ελεύθερα διανύσματα στο χώρο)

- Διανύσματα με κοινή αρχή ένα σταθερό σημείο O του χώρου - το σύνολο $\mathcal{D}'_O$ - διανύσματα θέσης

- Πράξεις $(+, \cdot)$ στα σύνολα $\mathcal{D}', \mathcal{D}'_O$ που τους δίνουν δομή διανυσματικών χώρων πάνω από το $\mathbb{R}$. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου ισχύει όταν θέλουμε να προσθέσουμε δυο διανύσματα στον $\mathcal{D}'_O$.

1.4 Συμβολισμός

Θα είναι βολικότερο από εδώ και στο εξής να μην είμαστε τόσο αυστηροί με την διάκριση ανάμεσα σε ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ και το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{AB}]$ που αυτό ορίζει. Έτσι, γράφοντας $\vec{AB}$ θα εννούμε πλέον την κλάση ισοδυναμίας $[\vec{AB}]$, της οποίας το $\vec{AB}$ είναι αντιπρόσωπος, ενώ η ισότητα $\vec{AB} = \vec{CD}$ θα σημαίνει οτι τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD}$ προκύπτουν απο παράλληλη μετατόπιση του ενός στο άλλο, **ακόμα και αν είναι διαφορετικά σαν εφαρμοστά διανύσματα**.

1.5 Συστήματα συντεταγμένων

1.5.1 Συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Ξεκινάμε με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3. *Οι $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}_O$ είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$ διάστασης 2.*

Απόδειξη. Ας ξεκινήσουμε με τον $\mathcal{D}_O$. Αρκεί να βρούμε μια βάση. Έστω δυο σημεία του επιπέδου $A \neq B$ και διαφορετικά από το O έτσι ώστε τα O, A, B να **μην είναι συνευθειακά**. Θα δείξουμε ότι η $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{D}_O$.

- Τα $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, **όχι όλα μηδέν** τέτοια ώστε
$$\lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB} = \vec{0},$$
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\lambda \neq 0$. Μπορούμε τότε να γράψουμε
$$\vec{OA} = \frac{\mu}{\lambda}\vec{OB},$$
και άρα $\vec{OA}, \vec{OB}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, αφού ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός διατηρεί την διεύθυνση των διανυσμάτων. Συνεπώς τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά, το οποίο είναι άτοπο. Αναγκαστικά λοιπόν $\lambda = \mu = 0$, που σημαίνει ότι τα $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Τα $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ παράγουν τον $\mathcal{D}_O$. Έστω σημείο M του επιπέδου. Πρέπει να βρούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}$.

  Έστω ότι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι φορείς των διανυσμάτων $\vec{OA}, \vec{OB}$ αντίστοιχα. Φέρνουμε ευθείες l_1, l_2 διερχόμενες από το M έτσι ώστε $l_1 \parallel \varepsilon_1$ και $l_2 \parallel \varepsilon_2$.
  Σχήμα
  Έστω P_1 το σημείο τομής των ε_1 και l_2, και P_2 το σημείο τομής των ε_2 και l_1. Εφόσον τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OP_1}$ έχουν την ίδια αρχή και τον ίδιο φορέα τότε
$$\vec{OP_1} = \frac{||OP_1||}{||OA||} \cdot \vec{OA}, \text{αν τα } \vec{OA}, \vec{OP_1} \text{ είναι ομόρροπα.}$$
$$\vec{OP_1} = -\frac{||OP_1||}{||OA||} \cdot \vec{OA}, \text{αν τα } \vec{OA}, \vec{OP_1} \text{ είναι αντίρροπα.}$$
  Ομοίως βλέπουμε ότι
$$\vec{OP_2} = \frac{||OP_2||}{||OB||} \cdot \vec{OB}, \text{αν τα } \vec{OB}, \vec{OP_2} \text{ είναι ομόρροπα.}$$
$$\vec{OP_2} = -\frac{||OP_2||}{||OB||} \cdot \vec{OB}, \text{αν τα } \vec{OB}, \vec{OP_2} \text{ είναι αντίρροπα.}$$

Σε κάθε περίπτωση όμως υπάρχουν λ, μ έτσι ώστε

$$\vec{OP_1} = \lambda \cdot \vec{OA} \quad \text{και} \quad \vec{OP_2} = \mu \cdot \vec{OB}.$$

Άρα, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι

$$\vec{OM} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB},$$

που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Όσον αφορά στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{D}$ μπορούμε να δείξουμε ότι τα ελεύθερα διανύσματα $\vec{a} = [\vec{OA}], \vec{b} = [\vec{OB}]$ είναι βάση:

- Αν $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$, τότε

$$[\lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}] = \vec{0},$$

  και άρα $\lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB} = \vec{0}$, που σημαίνει ότι $\lambda = \mu = 0$ από τα προηγούμενα. Συνεπώς τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Έστω $\vec{c} = [\vec{OM}]$ ένα ελεύθερο διάνυσμα. Από τα προηγούμενα, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}.$$

  Τότε όμως

$$\vec{c} = [\vec{OM}] = \lambda \cdot [\vec{OA}] + \mu \cdot [\vec{OB}] = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b},$$

  και άρα τα $\vec{a}, \vec{b}$ παράγουν τον $\mathcal{D}$.

$\square$

Επομένως, δοθείσας μιας βάσης $\vec{a}, \vec{b}$ του $\mathcal{D}$ ορίζεται η απεικόνιση $\zeta : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ ως

$$\zeta(M) = (\lambda, \mu), \tag{1.5.1}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικοί ώστε

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}. \tag{1.5.2}$$

Άσκηση 2. *Η απεικόνιση ζ είναι $1-1$ και επί.*

Ορισμός 2.
Πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων *στο επίπεδο είναι μια τριάδα $(O, \vec{a}, \vec{b})$, όπου O είναι σημείο του επιπέδου και τα $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{D}$ είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητα*** *διανύσματα.*
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων *στο επίπεδο θα λέμε ένα σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$ αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι* ***μοναδιαία*** *και επιπλέον $\vec{a} \perp \vec{b}$, είναι δηλαδή κάθετα μεταξύ τους.*

Παρατήρηση 1.5.1.

- Το σημείο O ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.
- Αν $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$, για $A, B \in \mathcal{E}$, τοτε η γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{a}, \vec{b}$ είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά.
- Η φορά καθενός από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ δίνει έναν προσανατολισμό σε κάθε μια από τις ευθείες OA, OB.
- Μια προσανατολισμένη ευθεία ονομάζεται **άξονας**. Άρα το σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο αποτελείται από τους άξονες OA, OB, χωρίζοντάς την σε θετικό και αρνητικό ημιάξονα.
- Κάθε άξονας είναι σε $1-1$ και επί αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς.

Όταν έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, έχουμε λοιπόν στην διάθεσή μας μια απεικόνιση φ, όπως παραπάνω, που μας επιτρέπει να αντιστοιχούμε ένα ζεύγος αριθμών $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ σε κάθε σημείο M του επιπέδου, και αντίστροφα. Αυτά τα λ, μ ονομάζονται **συντεταγμένες** του M ως προς το συστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$. Στην πράξη, αντί για $\varphi(M) = (\lambda, \mu)$ θα γράφουμε απλά $M = (\lambda, \mu)$, ή $M(\lambda, \mu)$.

Αυτή η αντιστοιχία βρίσκεται στην καρδιά της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αφού μας επιτρέπει να περιγράφουμε γεωμετρικά αντικείμενα (σύνολα σημείων του επιπέδου - σημεία, ευθείες, τρίγωνα, κύκλους κτλ) σαν υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Επίσης, θα δούμε οτι μας επιτρέπει να υπολογίζουμε έννοιες όπως απόσταση, γωνία/καθετότητα, εμβαδό κτλ πολύ ευκολότερα.

Παρατήρηση 1.5.2. Προσοχή, η απεικόνιση φ εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγεί. Επομένως, όταν γράφουμε $M = (\lambda, \mu)$ πρέπει να διευκρινίζουμε σε ποιο σύστημα συντεταγμένων αυτό ισχύει. Γενικά, αν επιλέξουμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(O', \vec{a}', \vec{b}')$ η αναπαράσταση του σημείου M θα είναι διαφορετική: $M = (\lambda', \mu')$. Η σχέση ανάμεσα στα (λ, μ) και (λ', μ') θα διερευνηθεί αργότερα.

1.5.2 Συντεταγμένες διανυσμάτων

Έστω ένα σύστημα συνταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$ στο επίπεδο. Εφόσον τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι βάση του χώρου των ελεύθερων διανυσμάτων $\mathcal{D}$, κάθε

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \tag{1.5.3}$$

για μοναδικά $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση $\psi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ ως

$$\psi(\vec{c}) = (\lambda, \mu), \tag{1.5.4}$$

με λ, μ όπως στην (1.5.3).

Μπορούμε λοιπόν να αναπαραστήσουμε και τα ελεύθερα διανύσματα σαν ζεύγη αριθμών, και να γράφουμε για συντομία

$$\vec{c} = (\lambda, \mu), \tag{1.5.5}$$

όπου πάλι πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η αναπαράσταση αυτή εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων.

Παρατήρηση 1.5.3. Αν O είναι η αρχή των αξόνων και $M = (x, y)$ τότε έχουμε ότι $\vec{OM} = (x, y)$, το οποίο προκύπτει από την απόδειξη της Πρότασης 3.

Πράξεις: Η απεικόνιση ψ παραπάνω είναι μια γραμμική απεικόνιση. Δηλαδή ισχύουν

$$\begin{aligned} \psi(\vec{a} + \vec{b}) &= \psi(\vec{a}) + \psi(\vec{b}), \\ \psi(\lambda \cdot \vec{a}) &= \lambda \psi(\vec{a}). \end{aligned}$$

Συνεπώς, όταν έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων οι πράξεις διανυσμάτων γίνονται πολύ εύκολα. Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \lambda \cdot \vec{a} &= (\lambda x_1, \lambda x_2). \end{aligned}$$

Πρόταση 4. *Έστω ότι $P = (x_1, y_1)$ και $Q = (x_2, y_2)$ είναι δυο σημεία στο επίπεδο. Τότε*

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Απόδειξη. Σχήμα □

1.5.3 Εφαρμογές

Εύρεση μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Σταθεροποιούμε κάποιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο $(O, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ και έστω $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ δύο σημεία. Τότε το μέσο $M(x_M, y_M)$ του ευθύγραμμου τμήματος PQ δίνεται ως προς τις συντεταγμένες των P, Q:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, \quad y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \tag{1.5.6}$$

Σχήμα:

Για να το δείξουμε αυτο, πρώτα παρατηρούμε ότι το διάνυσμα θέσης $\vec{OM}$ του σημείου M ικανοποιεί

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}. \tag{1.5.7}$$

Το διάνυσμα $\vec{PM}$ όμως είναι παράλληλο και έχει την ίδια φορά με το $\vec{PQ}$, ενώ $||\vec{PM}|| = \frac{1}{2}||\vec{PQ}||$, αφού έχουμε υποθέσει ότι το M είναι το μέσο του τμήματος PQ. Συνεπώς,

$$\vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{PQ}. \tag{1.5.8}$$

Οι (1.8.37) και (1.5.8) τελικά δίνουν:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{PQ} = (x_P, y_P) + \frac{1}{2}(x_Q - x_P, y_Q - y_P) = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}\right)$$

Απόσταση σημείων

Αν A, B είναι δύο σημεία στο επίπεδο, θα συμβολίζουμε την απόστασή τους ως $d(A, B)$, και φυσικά $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ στο επίπεδο.

Πρόταση 5. *Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, όταν χρησιμοποιείται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται από την εξίσωση*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.5.9}$$

Απόδειξη. Σχήμα

Το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, και επομένως οι άξονες x, y είναι κάθετοι μεταξύ τους (και τέμνονται στο σημείο O). Φέρνουμε ευθεία ε_1 παράλληλη στον άξονα x διερχόμενη από το A, και ευθεία ε_2 παράλληλη στον άξονα y διερχόμενη από το B. Τότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και έστω C το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο, με κάθετες πλευρές AC, BC με μήκη

$$|AC| = |x_2 - x_1|$$
$$|AB| = |y_2 - y_1|.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα λοιπόν

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |AB|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{1.5.10}$$

που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε. □

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η Πρόταση 5 ισχύει μόνο όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό.

Επίσης, αφού για κάθε διάνυσμα $||\vec{AB}|| = |AB| = d(A, B)$, συμπεραίνουμε ότι:

Πόρισμα 1. *Εστω ότι σε ορθοκανονικό σύστημα έχουμε ένα διάνυσμα* $\vec{AB} = (\lambda, \mu)$. *Τότε*

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}. \tag{1.5.11}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $A = (x_1, y_1)$ και $B = (x_2, y_2)$. Τότε:

- $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $\vec{AB} = (\lambda, \mu) = (x_2 - x_1, y_2 - y_2)$

Άρα $||\vec{AB}|| = |AB| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. □

Καθετότητα και προβολή

Κεντρική έννοια στη Γεωμετρία είναι η έννοια της απόστασης, και είδαμε στην προηγούμενη εφαρμογή πώς μπορούμε να την υπολογίσουμε με την χρήση ορθοκανονικών συντεταγμένων. Τώρα θα αναρωτηθούμε πώς μπορούμε να μεταφράσουμε στην γλώσσα του διανυσματικού λογισμού τις εξίσου σημαντικές έννοιες γωνία και καθετότητα. Συγκεκριμένα, θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το ερωτήμα:

Αν έχουμε δυο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ σε **ορθοκανονικό** σύστημα συντεταγμένων:

- Τι πρέπει να ικανοποιούν τα x_1, x_2, y_1, y_2 ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα;
- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία των δύο διανυσμάτων; Πρέπει να ορισουμε βέβαια τι εννούμε γωνία εδώ.

Σχήμα

Θεωρούμε τα σημεία $O = (0, 0)$, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Τότε τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ορθή.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο, με την γωνία O ορθή. Δηλαδή, θέλουμε

$$|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2. \tag{1.5.12}$$

Έχουμε όμως

$$|OA|^2 = x_1^2 + y_1^2, \tag{1.5.13}$$
$$|OB|^2 = x_2^2 + y_2^2, \tag{1.5.14}$$
$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{1.5.15}$$

από την προηγούμενη παράγραφο. Επομένως, η (1.5.12) γίνεται

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{1.5.16}$$

Επομένως η ποσότητα $x_1x_2 + y_1y_2$, που εξαρτάται αποκλειστικά από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων, σχετίζεται άμεσα με το αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι κάθετα: αν $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ τότε $\vec{a} \perp \vec{b}$. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό.

Ορισμός 3. *Εστω δυο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ορίζουμε το **εσωτερικό γινόμενο** των $\vec{a}, \vec{b}$, και το συμβολίζουμε με $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ή $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ως*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{1.5.17}$$

Η παραπάνω συζήτηση απέδειξε ότι

Πρόταση 6. *Έστω δυο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Τότε*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Θα δούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε και την γωνία δυο διανυσμάτων, αν αυτά δεν είναι κάθετα.

Αν έχουμε δυο διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}$ και τις αντίστοιχες ημιευθείες OAx, OBy, θα ονομάζουμε **γωνία των** $\vec{OA}, \vec{OB}$ την γωνία των ημιευθειών OAx, OBy.

Σχήμα:

Από τον κανόνα του συνημιτόνου έχουμε

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\text{συν}\theta, \tag{1.5.18}$$

άρα

$$\begin{aligned} 2|OA||OB|\text{συν}\theta &= |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 \\ &= 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\text{συν}\theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||}. \tag{1.5.19}$$

Το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή, μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = ||\vec{a}||||\vec{b}|||\text{συν}\theta| \leq ||\vec{a}||||\vec{b}||, \tag{1.5.20}$$

αφού $|\text{συν}\theta| \leq 1$ για κάθε θ.

Επιπλέον, η σχέση (1.5.19) συνεπάγεται ότι

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||\ \text{συν}\theta. \tag{1.5.21}$$

Διάνυσμα κάθετο σε δοθέν διάνυσμα

Έστω $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και έστω διάνυσμα

$$\vec{a} = (\alpha, \beta). \tag{1.5.22}$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα

$$\vec{b} = (\beta, -\alpha), \tag{1.5.23}$$

είναι κάθετο στο $\vec{a}$. Πράγματι, αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \alpha\beta + \beta(-\alpha) = 0. \tag{1.5.24}$$

Ευθείες κάθετες μεταξύ τους

Έστω ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ στο επίπεδο και μια ευθεία ε διερχόμενη από τα σημεία $O = (0, 0)$ και $A = (3, 2)$. Να βρεθεί ευθεία δ κάθετη στην ε διερχόμενη από το O.

Αρκεί να βρούμε διάνυσμα $\vec{b} = \vec{OB}$ κάθετο στο $\vec{a} = \vec{OA} = (3, 2)$. Από τα παραπάνω, αρκεί να ορίσουμε $\vec{OB} = (2, -3)$. Μάλιστα έχουμε ότι $B = (2, -3)$ στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει. Συνεπώς, η ευθεία δ είναι αυτή που ορίζεται από τα σημεία $O = (0, 0)$ και $B = (2, -3)$.

Τότε, τα διανύσματα $\{t\vec{b},\ t \in \mathbb{R}\}$ αναπαριστουν την ευθεία δ από το O κάθετη στην ε.

Η επιλογή του συστήματος $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ μας δίνει επίσης την δυνατότητα να περιγράψουμε αλγεβρικά τις ευθείες ε, δ σαν σύνολα διανυσμάτων. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η ε περιγράφεται στο σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ από τα διανύσματα

$$t\vec{a} = (3t, 2t), \tag{1.5.25}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ενώ η δ από τά

$$t\vec{b} = (2t, -3t), \tag{1.5.26}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ παίρνουμε τις συντεταγμένες $(3t, 2t)$ ενός σημείου στην ε, και τις συντεταγμένες $(2t, -3t)$ ενός σημείου στην δ.

Σχήμα:

1.5.4 Συντεταγμένες στον χώρο

Έστω $\mathcal{D}'$ το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο $\mathcal{T}$. Επιπλέον, αν $O \in \mathcal{T}$ είναι ένα σταθεροποιημένο σημείο, έστω $\mathcal{D}'_O$ το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων στο χώρο με αρχή O. Οι πράξεις διανυσμάτων εφοδιάζουν τους χώρους $\mathcal{D}', \mathcal{D}'_O$ με την δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

Όπως και στην περίπτωση διανυσμάτων στο επίπεδο, ορίζονται $1-1$ και επί αντιστοιχίες

$$\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{D}'_O \leftrightarrow \mathcal{D} \tag{1.5.27}$$

μέσω των $1-1$ και επί απεικονίσεων

$$\varphi(M) = \vec{OM} \in \mathcal{D}'_O, \tag{1.5.28}$$

$$\psi(M) = [\vec{OM}] \in \mathcal{D}'. \tag{1.5.29}$$

Παρατήρηση 1.5.4. Έστω δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB} \in \mathcal{D}'_O$. Υπενθυμίζουμε ότι η γραμμική θήκη span$(\vec{OA}, \vec{OB})$ είναι ο **υπόχωρος** του $\mathcal{D}'_O$ που ορίζεται ως

$$\text{span}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \{\vec{OC} \in \mathcal{D}'_O,\ \text{όπου } \vec{OC} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}, \text{για κάποια } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Αφού τα $\vec{OA}, \vec{OB}$ έχουν υποτεθεί γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ είναι βάση του $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$. Επομένως η διάσταση του span$(\vec{OA}, \vec{OB})$ είναι 2.

Το ερώτημα που θέτουμε είναι: τι υποσύνολο του χώρου περιγράφει ο υπόχωρος span$(\vec{OA}, \vec{OB})$; Ισοδύναμα, θέλουμε να περιγράψουμε γεωμετρικά το σύνολο $\varphi^{-1}(\text{span}(\vec{OA}, \vec{OB}))$, δηλαδή την αντίστροφη εικόνα του συνόλου span$(\vec{OA}, \vec{OB})$ μέσω της φ.

Η βασική παρατήρηση είναι η εξής: μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με την απόδειξη οτι $\dim \mathcal{D} = 2$ στην Πρόταση 3. Εφόσον τα $\vec{OA}, \vec{OB}$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, έπεται ότι τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς τα O, A, B ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο π.

Έστω $M \in \pi$. Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή της απόδειξης της Πρότασης 3, όπου θεωρουμε τις ευθείες που ορίζουν τα OA και OB και φέρνουμε παράλληλές τους από το M. Όλες αυτές οι ευθείες ανήκουν στο επίπεδο π, αφού διέρχονται από σημεία του π. Τελικά, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}, \tag{1.5.30}$$

ισοδύναμα

$$\varphi(M) = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}. \tag{1.5.31}$$

για μοναδικά λ, μ. Και αντίστροφα, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ υπάρχει $M \in \pi$ ώστε να ισχύει η (1.5.31).

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\varphi(\pi) = \text{span}(\vec{OA}, \vec{OB})$, που σημαίνει ότι η εικόνα του επιπέδου π μέσω της φ είναι ο υπόχωρος $\text{span}(\vec{OA}, \vec{OB})$, και άρα αυτό αναπαριστά ένα επίπεδο στο χώρο διερχόμενο από την αρχή των αξόνων.

Έχουμε επίσης την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7. *Οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{D}', \mathcal{D}'_O$ έχουν διάσταση 3.*

Απόδειξη. Έστω σημεία $A, B, C \in \mathcal{T}$ τέτοια ώστε τα σημεία O, A, B, C να μην είναι συνεπίπεδα, και έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ που ορίζουν τα OA, OB, OC αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι τα εφαρμοστά διανύσματα $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ είναι βάση του $\mathcal{D}'_O$, καθώς και του $\mathcal{D}'$ (θεωρούμενα ως ελεύθερα διανύσματα). Παρακάτω το αποδεικνύουμε αυτο στην περίπτωση του $\mathcal{D}'_O$, ενώ η απόδειξη για το $\mathcal{D}'$ είναι παρόμοια, παίρνοντας κλάσεις ισοδυναμίας (Άσκηση)

- Τα $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, **όχι όλα μηδέν**, τέτοια ώστε

  $$\lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB} + \nu \cdot \vec{OC} = \vec{0}. \tag{1.5.32}$$

  Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\lambda \neq 0$. Έχουμε τότε ότι

  $$\vec{OA} = \frac{\mu}{\lambda}\vec{OB} + \frac{\nu}{\lambda}\vec{OC}. \tag{1.5.33}$$

  Η Παρατήρηση 1.5.4 τώρα μας λέει ότι το A ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα O, B, C. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού έχουμε υποθέσει ότι τα O, A, B, C δεν είναι συνεπίπεδα.

- Τα διανύσματα $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ παράγουν το χώρο $\mathcal{D}'_O$. Ακολουθούμε την ίδια στρατηγική με την Πρόταση 3. Θεωρούμε την ευθεία ε που ορίζει το τμήμα OC, και π το επίπεδο που ορίζουν τα O, A, B.

  Έστω σημείο M του χώρου. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB} + \nu \cdot \vec{OC}. \tag{1.5.34}$$

  Από το M φέρνουμε ευθεία γ παράλληλη στην ε. Εφόσον τα O, A, B, C δεν είναι συνεπίπεδα, η ευθεία ε τέμνει το π σε κάποιο σημείο M'. Από την Παρατήρηση 1.5.4, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\vec{OM'} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB}. \tag{1.5.35}$$

  Επίσης,

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}, \tag{1.5.36}$$

  αφού τα $\vec{OM'}, \vec{M'M}$ είναι διαδοχικά. Ο φορέας του $\vec{M'M}$ είναι η ευθεία γ, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ε που είναι ο φορέας του $\vec{OC}$. Συνεπώς, $\vec{M'M} \parallel \vec{OC}$ και άρα υπάρχει $\nu \in \mathbb{R}$ ώστε σαν ελεύθερα διανύσματα

$$\vec{M'M} = \nu \cdot \vec{OC}. \tag{1.5.37}$$

  Επομένως,

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = \lambda \cdot \vec{OA} + \mu \cdot \vec{OB} + \nu \cdot \vec{OC}, \tag{1.5.38}$$

  που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

□

Ορισμός 4.
Πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων *στον χώρο είναι μια τετράδα* $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$*, όπου* O *είναι σημείο του επιπέδου και τα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{D}'$ *είναι* ***γραμμικά ανεξάρτητα*** *διανύσματα.*
Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων *στον χώρο θα λέμε ένα σύστημα συντεταγμένων* $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *αν τα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *είναι* ***μοναδιαία*** *και επιπλέον* $\vec{a} \perp \vec{b}$*,* $\vec{a} \perp \vec{c}$*,* $\vec{b} \perp \vec{c}$ *όταν δηλαδή τα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *είναι μοναδιαία και κάθετα ανά δύο.*

1.6 Αλλαγή συστημάτων συντεταγμένων.

1.6.1 Μετασχηματισμός διανυσμάτων θέσης

Έστω δύο σημεία O, O' στο επίπεδο ή τον χώρο. Για κάθε σημείο M έχουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{OM}$ του M ως προς την αρχή O, και το διάνυσμα θέσης $\vec{O'M}$ του M ως προς την αρχή O'.

Από τον τρόπο που ορίσαμε το άθροισμα δύο διανυσμάτων, έχουμε ότι

$$\vec{O'M} = \vec{O'O} + \vec{OM}. \tag{1.6.1}$$

1.6.2 Γενική αλλαγή συστημάτων στο επίπεδο

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$ και $(O', \vec{a}', \vec{b}')$ στο επίπεδο. Συνεπώς έχουμε δύο τρόπους να αναπαριστούμε κάθε σημείο M του επιπέδου με συντεταγμένες: έστω (x, y) ως προς $(O, \vec{a}, \vec{b})$ και (x', y') ως προς $(O', \vec{a}', \vec{b}')$. Ισοδύναμα έχουμε

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}. \tag{1.6.2}$$

$$\vec{O'M} = x' \cdot \vec{a}' + y' \cdot \vec{b}' \tag{1.6.3}$$

Ερώτηση: Πώς σχετίζονται τα ζεύγη $(x, y), (x', y')$;

Αν εκφράσουμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ως προς τη βάση $\vec{a}', \vec{b}'$ του $\mathcal{D}$, παίρνουμε για κάποια $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha_1 \vec{a}' + \alpha_2 \vec{b}', \\ \vec{b} &= \beta_1 \vec{a}' + \beta_2 \vec{b}'. \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Δηλαδή, ως προς την βάση $\vec{a}', \vec{b}'$ τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= (1, 0), \\ \vec{b}' &= (0, 1), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\alpha_1, \alpha_2), \\ \vec{b} &= (\beta_1, \beta_2). \end{aligned}$$

Επίσης, έστω ότι (προσοχή εδώ, χρησιμοποιούμε τη βάση $\vec{a}', \vec{b}'$, όχι την $\vec{a}, \vec{b}$)

$$\vec{O'O} = \kappa_1 \vec{a}' + \kappa_2 \vec{b}'. \tag{1.6.5}$$

Οπότε, αφού $\vec{O'M} = \vec{OM} + \vec{O'O}$, έχουμε

$$\begin{aligned} x' \cdot \vec{a}' + y' \cdot \vec{b}' &= x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \vec{O'O} \\ &= x \cdot (\alpha_1 \vec{a}' + \alpha_2 \vec{b}') + y \cdot (\beta_1 \vec{a}' + \beta_2 \vec{b}') + \vec{O'O} \\ &= (x\alpha_1 + y\beta_1) \cdot \vec{a}' + (x\alpha_2 + y\beta_2) \cdot \vec{b}' + \kappa_1 \vec{a}' + \kappa_2 \vec{b}' \\ &= (x\alpha_1 + y\beta_1 + \kappa_1) \cdot \vec{a}' + (x\alpha_2 + y\beta_2 + \kappa_2) \cdot \vec{b}' \end{aligned}$$

Λόγω μοναδικότητας των x, y, x', y' στην έκφραση (1.6.2), συμπεραίνουμε ότι

$$x' = x\alpha_1 + y\beta_1 + \kappa_1, \tag{1.6.6}$$

$$y' = x\alpha_2 + y\beta_2 + \kappa_2. \tag{1.6.7}$$

Κάνοντας χρήση του πολλαπλασιασμού πινάκων, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση στη μορφή

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \tag{1.6.8}$$

1.6.3 Στροφή ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων

Έστω ότι το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}', \vec{b}')$ προκύπτει από στροφή του συστήματος $(O, \vec{a}, \vec{b})$ κατά γωνία θ. Τότε μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \text{συν}\theta \cdot \vec{a}' - \text{ημ}\theta \cdot \vec{b}', \\ \vec{b} &= \text{ημ}\theta \cdot \vec{a}' + \text{συν}\theta \cdot \vec{b}'. \end{aligned}$$

Σχήμα

Επομένως, από την (1.6.8) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ -\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1.6.9}$$

Ας ορίσουμε

$$O(\theta) = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ -\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}, \tag{1.6.10}$$

τον πίνακα που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.6.9), ο οποίος έχει ορίζουσα $\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$ και επομένως είναι αντιστρέψιμος.

Επιπλέον, ο υπολογισμός

$$O(\theta)^T O(\theta) = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ -\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$O(\theta)^{-1} = O(\theta)^T = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}(-\theta) & \text{ημ}(-\theta) \\ -\text{ημ}(-\theta) & \text{συν}(-\theta) \end{bmatrix} = O(-\theta).$$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν από αριστερά και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.6.9) με τον πίνακα $O(\theta)^{-1} = O(\theta)^T$ παίρνουμε τη σχέση που μας υπολογίζει τις συντεταγμένες (x, y) ως προς τις (x', y')

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \tag{1.6.11}$$

1.7 Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

Έχοντας επιλέξει μια ορθοκανονική βάση του χώρου $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ τον ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^3$. Μάλιστα, κάτω από αυτή την ταύτιση τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ αντιστοιχούν στα $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ και το σημείο O με το $(0,0,0)$. Ομοίως και για το επίπεδο, το οποίο ταυτίζουμε μέσω μιας ορθοκανονικής βάσης $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ με τον $\mathbb{R}^2$ ώστε τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ να αντιστοιχούν στα $(1,0), (0,1)$, ενώ το σημείο O με το $(0,0)$.

1.7.1 Γωνία διανυσμάτων στους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

Έστω δυο διανύσματα $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB} \in \mathbb{R}^2$ και έστω θ η **κυρτή** γωνία $A\hat{O}B$. Η γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \in [-\pi, \pi]$ ορίζεται με τον εξής κανόνα

$$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \begin{cases} \theta & \text{αν το } \vec{a} \text{ πρέπει να στραφεί αριστερόστροφα για να γίνει ομόρροπο του } \vec{b} \\ -\theta & \text{αν το } \vec{a} \text{ πρέπει να στραφεί δεξιόστροφα για να γίνει ομόρροπο του } \vec{b} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = -\widehat{(\vec{b}, \vec{a})}$.

Έστω δυο διανύσματα $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB} \in \mathbb{R}^3$. Η γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \in [0, \pi]$ ορίζεται ως η **κυρτή** γωνία $A\hat{O}B$.

Προσοχή: για δύο διανύσματα στον χώρο δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για δεξιόστροφή/ αριστερόστροφη περιστροφή οπότε η γωνίες δεν έχουν πρόσημο.

1.7.2 Εσωτερικό γινόμενο

Εχουμε δυο ορισμούς για το εσωτερικό γινόμενο που αποδεικνύεται οτι είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός 5. *(Γεωμετρικός - διανυσματικός ορισμός) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ στον στον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \, \sigma\upsilon\nu\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}, \tag{1.7.1}$$

όπου $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ όπως παραπάνω.

Ορισμός 6. *(Έκφραση σε ορθοκανονικό σύστημα) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{1.7.2}$$

Ομοίως, για διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ *στον* $\mathbb{R}^2$ *ορίζουμε*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{1.7.3}$$

Η ισοδυναμία των δύο ορισμών αποδεικνύεται κάνοντας χρήση του νομου του συνημιτόνου, όπως στην εξίσωση 1.5.21.

Παρατήρηση 1.7.1. Στον Ορισμό 5 εμφανίζονται **μόνο γεωμετρικά μεγέθη** σχετικά με τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$, όπως το **μέτρο** και η **γωνία** μεταξύ τους, και όχι οι συντεταγμένες τους. Επομένως, θα μπορούσαμε στον Ορισμό 5 απλά να υποθέσουμε ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι ελεύθερα διανύσματα στο χώρο, χωρίς την χρήση του ορθοκανονικού συστήματος που επιλέξαμε στην αρχή της Παραγράφου 1.7.2.

Ο Ορισμός 6 περιλαμβάνει τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ στο προκαθορισμένο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, και άρα **φαινομενικά εξαρτάται από αυτή την επιλογή**. Τι γίνεται όμως αν εκφράσουμε τα ίδια ελεύθερα διανυσματα στο χώρο ως προς ένα διαφορετικό ορθοκανονικό σύστημα; Οι συντεταγμένες θα αλλάξουν, και επομένως τίθεται το ερώτημα αν ο Ορισμός 6 θα μας δώσει την ίδια τιμή για το $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. **Το γεγονός όμως ότι οι δυο ορισμοί είναι ισοδύναμοι μας λέει ότι πράγματι, οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύστημα και να επιλέξουμε για να εκφράσουμε δυο ελεύθερα διανύσματα, ο Ορισμός 6 θα είναι συνεπής και θα συμπίπτει με τον Ορισμό 5**.

Ό,τι ακολουθεί, αν και θα είναι διατυπωμένο για το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$, ισχύει και για το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ με τις ίδιες αποδείξεις.

1.7.3 Αλγεβρικές ιδιότητες

Το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

1. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2$. Επομένως $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ και είναι $= 0$ αν και μόνο αν $\vec{a} = \vec{0}$. Για αυτό το λόγο λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο.

2. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$. Λέμε λοιπόν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό.

3. $\langle \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \mu\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι δηλαδή γραμμικό ως προς το πρώτο διάνυσμα.

Παρατήρηση 1.7.2. Από την ιδιότητα (2), η (3) συνεπάγεται ότι

$$\langle \vec{a}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} \rangle = \langle \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}, \vec{a} \rangle = \lambda\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \mu\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \mu\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle. \tag{1.7.4}$$

Δηλαδή, μαζί με την (3) προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι διγραμμικό.

Πρόταση 8.

1. $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq ||\vec{a}||\, ||\vec{b}||$.
2. $||\vec{a}+\vec{b}||^2 + ||\vec{a}-\vec{b}||^2 = 2(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2)$.
3. $||\vec{a} \pm \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.
4. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow ||\vec{a}+\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2$.

Σχήματα

1.7.4 Προβολή σε ευθεία

Έστω O, A, B σημεία του χώρου. Αν επιθυμούσαμε να βρούμε την απόσταση ανάμεσα στο σημείο B και την ευθεία ε διερχόμενη από τα O, A θα έπρεπε να βρούμε κάποιο σημείο $C \in \varepsilon$ ώστε $BC \perp \varepsilon$. Τότε, η απόσταση του σημείου από την ε θα ήταν $|BC|$.

Σχήμα

Το παραπάνω πρόβλημα στη γλώσσα του διανυσματικού λογισμού μεταφράζεται ως εξής:

Έστω $\vec{OA}, \vec{OB} \in \mathbb{R}^3$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{OC}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{OC} \parallel \vec{OA} \tag{1.7.5}$$

$$\vec{CB} \perp \vec{OA}. \tag{1.7.6}$$

Εννοείται ότι αυτομάτως $\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$, και άρα

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}. \tag{1.7.7}$$

Σχήμα

Η συνθήκη (1.7.5) ισοδυναμεί με την ύπαρξη $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{OC} = \lambda \cdot \vec{OA}. \tag{1.7.8}$$

Από τη Πρόταση 8, η συνθήκη (1.7.6) ισοδυναμεί με την

$$\langle \vec{OA}, \vec{CB} \rangle = 0. \tag{1.7.9}$$

Επομένως, από την (1.7.7) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} - \vec{OC} \rangle \\ &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle \\ &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle - \langle \vec{OA}, \lambda \cdot \vec{OA} \rangle \\ &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle - \lambda \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle \\ &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle - \lambda ||\vec{OA}||^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\lambda = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{||\vec{OA}||^2} \tag{1.7.10}$$

και άρα

$$\vec{OC} = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{||\vec{OA}||^2} \vec{OA}. \tag{1.7.11}$$

Αν λοιπόν έχουμε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, τότε το διάνυσμα

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}||^2} \vec{a} \tag{1.7.12}$$

ονομάζεται προβολή του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$ και είναι το μόνο με την ιδιότητα

$$(\vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}} \vec{b}) \perp \vec{a}.$$

Σχήμα

1.7.5 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω O, A, B τρία μη συνευθειακά σημεία και ε η ευθεία που ορίζουν τα O, A. Τότε η απόσταση $d(B, \varepsilon)$ του σημείου B από την ευθεία ε είναι

$$d(B, \varepsilon) = ||\vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}} \vec{b}||. \tag{1.7.13}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
||\vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}||^2 &= \langle \vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}, \vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} \rangle \\
&= \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - 2\langle \vec{b}, \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} \rangle + \langle \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}, \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} \rangle \\
&= ||\vec{b}||^2 - 2\langle \vec{b}, \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}||^2}\vec{a} \rangle + \langle \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}||^2}\vec{a}, \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{a}||^2}\vec{a} \rangle \\
&= ||\vec{b}||^2 - 2\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2} + \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^4}\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\
&= ||\vec{b}||^2 - 2\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2} + \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^4}||\vec{a}||^2 \\
&= ||\vec{b}||^2 - 2\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2} + \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2} \\
&= ||\vec{b}||^2 - \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$d(B, \varepsilon) = \sqrt{||\vec{b}||^2 - \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2}}. \tag{1.7.14}$$

Θα επανέλθουμε και αργότερα στο ζήτημα της απόστασης σημείου από ευθεία.

1.7.6 Εμβαδό τριγώνου

Έστω O, A, B τρία μη συνευθειακά σημεία και BC ύψος του τριγώνου OAB. Έστω επίσης $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$.

Το εμβαδό E_{OAB} του τριγώνου OAB δίνεται από

$$E_{OAB} = \frac{1}{2}|OA||BC| = \frac{1}{2}||\vec{a}||\ ||\vec{BC}||. \tag{1.7.15}$$

Αφού το BC είναι ύψος, έχουμε ότι $\vec{BC} = \vec{b} - \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$ και άρα

$$||\vec{BC}||^2 = ||\vec{b}||^2 - \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2}, \tag{1.7.16}$$

χάρη στην (1.7.14). Συνεπώς,

$$E_{OAB}^2 = \frac{1}{4}||\vec{a}||^2 \left(||\vec{b}||^2 - \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2}{||\vec{a}||^2} \right) = \frac{1}{4}\left(||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2 \right) \tag{1.7.17}$$

και άρα

$$E_{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - |\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle|^2}. \tag{1.7.18}$$

Μέχρι στιγμής δεν έχει παίξει ρόλο αν τα σημεία είναι στο επίπεδο ή στο χώρο. Θα δούμε ότι για τρίγωνα στον $\mathbb{R}^2$ η παραπάνω εξίσωση παίρνει μια ωραία μορφή.

Έστω ότι $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$. Τότε,

$$\begin{aligned} ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - |\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle|^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \\ &= (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2x_1y_2x_2y_1 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)^2 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$E_{OAB} = |x_1y_2 - x_2y_1| = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right| \tag{1.7.19}$$

1.7.7 Συντεταγμένες διανυσμάτων σε ορθοκανονική βάση

Έστω $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$ μια ορθοκανονική βάση. Κάνοντας χρήση του εσωτερικού γινομένου και των ιδιοτήτων του μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ως προς τη βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, δηλαδή να βρούμε $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}. \tag{1.7.20}$$

Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με $\vec{a}$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.7.20) έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{a}\rangle &= \langle \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}, \vec{a}\rangle \\ &= \langle \lambda \cdot \vec{a}, \vec{a}\rangle + \langle \mu \cdot \vec{b}, \vec{a}\rangle + \langle \nu \cdot \vec{c}, \vec{a}\rangle \\ &= \lambda\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + \mu\langle \vec{b}, \vec{a}\rangle + \nu\langle \vec{c}, \vec{a}\rangle \\ &= \lambda||\vec{a}||^2 = \lambda, \end{aligned}$$

αφού $||\vec{a}||^2 = 1$ και $\langle \vec{b}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}\rangle = 0$, από την ορθοκανονικότητα της βάσης $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ομοίως καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{b}\rangle &= \mu, \\ \langle \vec{v}, \vec{c}\rangle &= \nu, \end{aligned}$$

παίρνοντας στην (1.7.20) εσωτερικό γινόμενο με τα $\vec{b}, \vec{c}$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, η (1.7.20) γίνεται

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \langle \vec{v}, \vec{b} \rangle \vec{b} + \langle \vec{v}, \vec{c} \rangle \vec{c}, \tag{1.7.21}$$

όπου οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τις συντεταγμένες των $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1.8 Διανύσματα κάθετα σε επίπεδο - Εξωτερικό γινόμενο

1.8.1 Ένα γεωμετρικό πρόβλημα

Έστω ότι έχουμε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε δει ότι αυτά αντιπροσωπεύουν ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, τον οποίο θεωρούμε ότι έχουμε ταυτίσει με τον τρισδιάστατο χώρο μέσω κάποιου ορθοκανονικού συστήματος $(, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Θα θέλαμε να βρούμε όλα τα διανύσματα $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$, δηλαδή όλα τα $\vec{v}$ που ικανοποιούν $\vec{v} \perp \vec{a}$ και $\vec{v} \perp \vec{b}$.

Κάνοντας χρήση του εσωτερικού γινομένου, βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0, \tag{1.8.1}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{b} \rangle = xx_2 + yy_2 + zz_2 = 0. \tag{1.8.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.8.1) με x_2 και την (1.8.2) με x_1 παίρνουμε

$$xx_1x_2 + yy_1x_2 + zz_1x_2 = 0, \tag{1.8.3}$$

$$xx_2x_1 + yy_2x_1 + zz_2x_1 = 0. \tag{1.8.4}$$

Αφαιρώντας την (1.8.4) από την (1.8.3) παίρνουμε

$$y(y_1x_2 - y_2x_1) + z(z_1x_2 - z_2x_1) = 0. \tag{1.8.5}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το ζεύγος

$$(y, z) = (t(z_1x_2 - z_2x_1), -t(y_1x_2 - y_2x_1)) \tag{1.8.6}$$

ικανοποιεί την (1.8.5). Επομένως, αντικαθιστώντας την (1.8.6) στην (1.8.1) παίρνουμε

$$xx_1 + t(z_1x_2 - z_2x_1)y_1 - t(y_1x_2 - y_2x_1)z_1 = 0, \tag{1.8.7}$$

και άρα

$$xx_1 - tx_1(z_2y_1 - y_2z_1) = 0. \tag{1.8.8}$$

Αν $x_1 = 0$ κάθε επιλογή για το x λύνει την εξίσωση, ενώ αν $x_1 \neq 0$ βλέπουμε λύνοντας για x:

$$x = t(z_2y_1 - y_2z_1). \tag{1.8.9}$$

Σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε στην λύση

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= t(z_2y_1 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, -y_1x_2 + y_2x_1) \\ &= t\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).\end{aligned} \tag{1.8.10}$$

Παρατηρούμε ότι σε συμβολικό επίπεδο το παραπάνω διάνυσμα μπορούμε να το πάρουμε αν αναπτύξουμε την 3×3 ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3. \tag{1.8.11}$$

ως προς την πρώτη γραμμή. Η (1.8.11) είναι ένας καλός μνημονικός κανόνας για την εύρεση των κάθετων διανυσμάτων στα $\vec{a}, \vec{b}$. Προσοχή όμως, η (1.8.11) είναι απλά ένα σύμβολο και δεν αντιπροσωπεύει την ορίζουσα κάποιου πίνακα, αφού τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι διανύσματα και όχι αριθμοί.

1.8.2 Προσανατολισμοί στο επίπεδο και στον χώρο

Η γεωμετρική έννοια του προσανατολισμού

Προσανατολισμός στο επίπεδο: Έστω $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσμάτα στον $\mathcal{D}_O$. Το $(O, \vec{a}, \vec{b})$ είναι λοιπόν ένα σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου.

Θα λέμε ότι το $(O, \vec{a}, \vec{b})$ είναι

- Θετικά προσανατολισμένο: αν $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} > 0$, δηλαδή αν το $\vec{a}$ αποκτά την ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{b}$ αν περιστραφεί **αριστερόστροφα** κατά κυρτή γωνία.

- Αρνητικά προσανατολισμένο: αν $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} < 0$, δηλαδή αν το $\vec{a}$ αποκτά την ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{b}$ αν περιστραφεί **δεξιόστροφα** κατά κυρτή γωνία.

Σχήμα

Με βάση τον παραπάνω ορισμό το σύστημα $(O, \vec{b}, \vec{a})$ έχει αντίθετο προσανατολισμό απο το $(O, \vec{a}, \vec{b})$.

Έστω τώρα ότι έχουμε ταυτίσει το επίπεδο με τον $\mathbb{R}^2$ μέσω ενός **θετικά προσανατολισμένου** ορθοκανονικού συστήματος $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, ώστε τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ να αντιστοιχούν στην κανονική βάση $((1,0),(0,1))$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$.

Έστω ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{a}, \vec{b})$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι τότε

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \tag{1.8.12}$$

Έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός (η ορίζουσα είναι μηδεν αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα) και

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ αν και μόνο αν το } (O, \vec{a}, \vec{b}) \text{ είναι θετικά προσανατολισμένο} \tag{1.8.13}$$

Προσανατολισμός στο χώρο: Έστω τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο χώρο $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Θα λέμε ότι το σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι θετικά προσαντολισμένο αν ικανοποιεί τον κανόνα του δεξιού χεριού. Διαφορετικά, θα λέμε ότι είναι αρνητικά προσανατολισμένο.

Αν τώρα ταυτίσουμε τον χώρο με τον $\mathbb{R}^3$ μέσω ενός **θετικά προσανατολισμένου** ορθοκανονικού συστήματος $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, και $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ τότε έχουμε πάλι ότι η ορίζουσα του πίνακα αλλαγής βάσης

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{1.8.14}$$

είναι διάφορη του μηδενός (αφού τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα) και έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ αν και μόνο αν το } (O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ είναι θετικά προσανατολισμένο.} \tag{1.8.15}$$

Το γεγονός αυτό δεν θα το αποδείξουμε, αλλά σκεφτείτε γιατί μπορεί να ισχύει.

Προσανατολισμός μέσω της ορίζουσας

Η παραπάνω συζήτη ξεκινά με ένα γεωμετρικό ορισμό του προσανατολισμού στο επίπεδο ή το χώρο, και μέσω της ταύτισης με τον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με θετικά προσανατολισμένα ορθοκανονικά συστημάτα είδαμε ότι σχετίζεται με το αν η ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα αλλαγής βάσης είναι θετική ή αρνητική.

Μπορούμε όμως να γυρίσουμε αυτή τη συζήτηση ανάποδα, να **ορίσουμε** δηλαδή τι θα πει προσανατολισμός μιας βάσης $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ του $\mathbb{R}^3$ μέσω του προσήμου του πίνακα αλλαγής βάσης από την $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ στην $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, όπως στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 7. *Έστω τρία **γραμμικά ανεξάρτητα** διανύσματα*

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$
$$\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$
$$\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

*του $\mathbb{R}^3$. Θα λέμε ότι η βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι **θετικά προσανατολισμένη** αν*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0, \tag{1.8.16}$$

*και ότι είναι **αρνητικά προσανατολισμένη** αν*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} < 0. \tag{1.8.17}$$

Φυσικά αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε προσανατολισμό στον $\mathbb{R}^2$.

1.8.3 Το εξωτερικό γινόμενο: ορισμός και ιδιότητες

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την παράγραφο είναι το εξής:

Έστω ότι έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ στον $\mathbb{R}^3$. Θέλουμε να βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ ώστε

1. $\vec{c} \perp a$ και $\vec{c} \perp \vec{b}$, δηλαδή το $\vec{c}$ να είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$.

2. Η διατεταγμένη βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ του $\mathbb{R}^3$ να είναι **θετικά προσανατολισμένη**.

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι όλα τα διανύσματα της μορφής

$$t\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{1.8.18}$$

ικανοποιούν την συνθήκη (1) παραπάνω. Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του t η αντίστοιχη βάση έχει θετικό προσανατολισμό. Θελουμε δηλαδή, αν

$$x_3 = t\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_3 = -t\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad z_3 = t\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{1.8.19}$$

να έχουμε

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0 \tag{1.8.20}$$

βάσει του Ορισμού 7.

Άσκηση 3. *Αν ισχύει η* (1.8.19)*, τότε*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + t\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + t\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \tag{1.8.21}$$

Από την παραπάνω άσκηση, συμπεραίνουμε ότι το $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι θετικά προσανατολισμένο αν και μόνο αν

$$\vec{c} = t\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \tag{1.8.22}$$

για $t > 0$.

Μια βολική επιλογή για το t είναι $t = 1$. Οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 8. *Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ του $\mathbb{R}^3$. Το* ***εξωτερικό γινόμενο*** *$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ των $(\vec{a}, \vec{b})$ ορίζεται ως το διάνυσμα*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \tag{1.8.23}$$

όπως δίνεται από το μνημονικό κανόνα (1.8.11)*.*

Αμέσως παρατηρούμε τα εξής

- Αφού $\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \vec{e_1} \times \vec{e_2} &= \vec{e_3} \\ \vec{e_2} \times \vec{e_3} &= \vec{e_1} \\ \vec{e_3} \times \vec{e_1} &= \vec{e_2} \end{aligned}$$

- Το σύνολο $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και η διατεταγμένη βάση $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})$ έχει πάντα θετικό προσανατολισμό, για **οποιαδήποτε** γραμμικά ανεξάρτητα $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, αφού το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$ και η ορίζουσα αλλαγής βάσης είναι θετική (Άσκηση 3).

1.8.4 Αλγεβρικές ιδιότητες

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ και $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

1.8.5 Σχέσεις μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου

Θεώρημα 1.

1. *Έστω* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.8.24}$$

2.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \end{aligned} \tag{1.8.25}$$

3.

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 ||\vec{b}||^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \tag{1.8.26}$$

4.

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \; \eta\mu\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \tag{1.8.27}$$

Απόδειξη. (1) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου για το $\vec{b} \times \vec{c}$ έχουμε

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) \tag{1.8.28}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1.8.29}$$

$$= \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \tag{1.8.30}$$

Στην γραμμή (1.8.29) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός από την γραμμική άλγεβρα ότι αν μεταθέσουμε τις γραμμές ενός πίνακα (εδώ την πρώτη με την τρίτη γραμμή, και μετά την δεύτερη με την τρίτη γραμμή), η ορίζουσα του νέου πίνακα είναι αντίθετη της ορίζουσας του αρχικού.

(2) και (3) είναι απευθείας πράξεις, αφήνουμε την απόδειξη για άσκηση.

(4) Αφού $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ||\vec{a}||||\vec{b}||\text{συν}\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||\vec{a} \times \vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2\text{συν}^2\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \\ &= ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2(1 - \text{συν}^2\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2\text{ημ}^2\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}. \end{aligned}$$

Αποτετραγωνίζοντας παίρνουμε την επιθυμητή σχέση. Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ έχει οριστεί ως η κυρτή γωνία μεταξύ τους. Επομένως, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \in [0, \pi]$ και άρα $0 \leq \text{ημ}\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} \leq 1$. □

- Η σχέση (1.8.24) δίνει $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$. Επιβεβαιώνουμε λοιπόν ότι το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Γενικά $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (εκτός και αν $\vec{a} \parallel \vec{c}$)

1.8.6 Σχέση με εμβαδό και όγκο

Πρόταση 9.

1. *Το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ έχει εμβαδό $||\vec{a} \times \vec{b}||$. Συνεπώς, το τρίγωνο με πλευρές τα $\vec{a} \times \vec{b}$ έχει εμβαδό $\frac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}||$.*
2. *Το παραλληλεπίπεδο με ακμές τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ έχει όγκο $|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$.*
3. *Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$.*

Απόδειξη. (1) Έστω παραλληλόγραμμο $OACB$, με $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$, και έστω DB το ύψος του παραλληλογράμμου από την κορυφή B. Τότε, το εμβαδό του $OACB$ δίνεται από τον τύπο

$$E = ||\vec{OA}||\ ||\vec{DB}||. \tag{1.8.31}$$

Έχουμε επίσης ότι $||\vec{DB}|| = ||\vec{OB}||\text{ημ}\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$. Επομένως

$$E = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||\ \text{ημ}\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = ||\vec{a} \times \vec{b}||. \tag{1.8.32}$$

Σχήμα

(2) Έστω $OADB$ ένα παραλληλόγραμμο στο χώρο με πλευρές $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$, και έστω σημείο C, με $\vec{c} = \vec{OC}$.

Ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που έχει ακμές $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, και ύψος CE από την κορυφή C στη βάση $OADB$ δίνεται από τον τύπο

$$V = E_{OADB} \cdot ||\vec{CE}||. \tag{1.8.33}$$

Από το (1) έχουμε ότι

$$E_{OADB} = ||\vec{a} \times \vec{b}||. \tag{1.8.34}$$

Μένει να υπολογίσουμε το ύψος $||\vec{CE}||$ του παραλληλεπιπέδου. Έστω $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, είναι δηλαδή το $\vec{v}$ κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$, και άρα είναι κάθετο στη βάση του παραλληλεπιπέδου.

Η προβολή $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{c}$ του $\vec{c}$ στο $\vec{v}$ είναι διάνυσμα κάθετο στη βάση του παραλληλεπιπέδου, και μάλιστα

$$\vec{EC} = \text{pr}_{\vec{v}}\vec{c}. \tag{1.8.35}$$

Σχήμα

Επομένως

$$\vec{EC} = \text{pr}_{\vec{v}}\vec{c} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{c} \rangle}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle}{||\vec{a} \times \vec{v}||^2}\vec{a} \times \vec{b}. \tag{1.8.36}$$

Άρα, από τις (1.8.34) και (1.8.36) παίρνουμε

$$\begin{aligned} V &= ||\vec{a} \times \vec{b}|| \cdot ||\frac{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle}{||\vec{a} \times \vec{b}||^2}\vec{a} \times \vec{b}|| \\ &= ||\vec{a} \times \vec{b}||\frac{|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|}{||\vec{a} \times \vec{b}||^2}||\vec{a} \times \vec{b}|| \\ &= |\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|. \end{aligned}$$

(3) Τέσσερα σημεία O, A, B, C είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν είναι μηδέν, δηλαδή αν και μόνο αν $\langle \vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = 0$. □

1.8.7 Προβολή σε επίπεδο

Έστω O, A, B τρία μη συνευθειακά σημεία ώστε τα $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB} \in \mathbb{R}^3$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και έστω π το επίπεδο που ορίζουν τα O, A, B.

Θεωρούμε ένα τρίτο σημείο C. Θέλουμε να βρούμε σημείο $D \in \pi$ ώστε $\vec{DC} \perp \pi$. Δηλαδή θέλουμε

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}, \tag{1.8.37}$$

$$\langle \vec{DC}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{DC}, \vec{b} \rangle = 0. \tag{1.8.38}$$

Από την (1.8.38) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{DC} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \tag{1.8.39}$$

Συνεπώς, λόγω της (1.8.37) έχουμε

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \tag{1.8.40}$$

όπου $O, D \in \pi$ και επομένως $\vec{OD} \perp \vec{a} \times \vec{b}$, δηλαδή $\langle \vec{OD}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$.

Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με $\vec{a} \times \vec{b}$ και στα δύο μέλη της (1.8.40) έχουμε

$$\langle \vec{OC}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{OD}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle + \lambda \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle. \tag{1.8.41}$$

Συνεπώς,

$$\lambda = \frac{\langle \vec{OC}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}{||\vec{a} \times \vec{b}||^2}, \tag{1.8.42}$$

άρα

$$\vec{DC} = \frac{\langle \vec{OC}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}{||\vec{a} \times \vec{b}||^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{1.8.43}$$

και

$$\vec{OD} = \vec{OC} - \vec{DC} = \vec{OC} - \frac{\langle \vec{OC}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}{||\vec{a} \times \vec{b}||^2} (\vec{a} \times \vec{b}). \tag{1.8.44}$$

1.8.8 Ασκήσεις

1. Έστω $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 1, 1)$. Να υπολογιστεί το $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Έστω τρίγωνο στο χώρο με κορυφές $A(0, 1, 0), B(2, 1, 0), C(-1, 1, 0)$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ABC.

3. Έστω $(1, 1, 1)$ σημείο στο χώρο και π το επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{a} = (0, 0, 1), \vec{b} = (1, -1, 0)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το επίπεδο π.

Κεφάλαιο 2

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

2.1 Ευθεία γραμμή

2.1.1 Ευθεία διερχόμενη από σημείο με δοσμένη διεύθυνση

Έστω σημείο A στο επίπεδο και διάνυσμα $\vec{v}$. Θέλουμε να περιγράψουμε την ευθεία ε που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο $\vec{v}$.

Παραμετρικές εξισώσεις

Έστω $P \in \varepsilon$. Αφού το διάνυσμα $\vec{AP}$ έχει φορέα την ευθεία ε έχουμε ότι $\vec{AP} \parallel \vec{v}$. Επομένως, για κάθε $P \in \varepsilon$ υπαρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{AP} = t\vec{v}. \tag{2.1.1}$$

Σταθεροποιώντας ένα σημείο του επιπέδου O μπορούμε να περιγράψουμε κάθε σημείο P της ευθείας ε μέσω του αντίστοιχου διανύσματος θέσης $\vec{OP}$.

Έχουμε λοιπον:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + t\vec{v}, \tag{2.1.2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας ε είναι η

$$\vec{r} = \vec{OA} + t\vec{v}. \tag{2.1.3}$$

Η σημασία της (2.1.3) είναι ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ παίρνουμε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{r} = \vec{OA} + t\vec{v}$. Με την επιλογή της αρχής O, κάθε $\vec{r}$ καθορίζει ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου P ώστε $\vec{r} = \vec{OP}$.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα (ενδεχομένως πλαγιογώνιο) σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$ στο επίπεδο.

Το διάνυσμα $\vec{v}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ζεύγος $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ ώστε

$$\vec{v} = \xi\vec{a} + \eta\vec{b} \tag{2.1.4}$$

και αντίστοιχα τα $\vec{OA} \sim (x_A, y_A)$ και $\vec{r} \sim (x, y)$, ώστε

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= x_A \cdot \vec{a} + y_A \cdot \vec{b}, \\ \vec{r} &= x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Η διανυσματική εξίσωση (2.1.3) τότε γίνεται

$$(x, y) = (x_A + t\xi, y_A + t\eta). \tag{2.1.5}$$

Αναλυτική εξίσωση

Η (2.1.5) δίνει $x = x_A + t\xi$ και $y = y_A + t\eta$, συνεπώς

$$\begin{aligned} t\xi &= x - x_A, \\ t\eta &= y - y_A, \end{aligned}$$

και άρα, πολλαπλασιάζοντας με η και ξ αντίστοιχα

$$\begin{aligned} t\xi\eta &= (x - x_A)\eta, \\ t\eta\xi &= (y - y_A)\xi, \end{aligned}$$

Συνεπως,

$$(x - x_A)\eta = (y - y_A)\xi, \tag{2.1.6}$$

δηλαδή

$$\frac{x - x_A}{\xi} = \frac{y - y_A}{\eta} \tag{2.1.7}$$

ή διαφορετικά

$$(x - x_A)\eta - (y - y_A)\xi = \begin{vmatrix} x - x_A & \xi \\ y - y_A & \eta \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1.8}$$

2.1.2 Ευθεία διερχόμενη από δύο δοσμένα σημεία

Όπως προηγουμένως, έστω $(O, \vec{a}, \vec{b})$ ένα πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων και ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο σημεια $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ του επιπέδου. Η ευθεία AB είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$\vec{v} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{2.1.9}$$

και διέρχεται από το σημείο $A(x_A, y_A)$.

Επομένως, από την (2.1.3) καταλήγουμε στη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r} = \vec{OA} + t\vec{v} = (x_A, y_A) + t(x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{2.1.10}$$

Ανίστοιχα, χρησιμοποιώντας την (2.1.7) παίρνουμε την αναλυτική εξίσωση

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{2.1.11}$$

ή αντίστοιχα, από την (2.1.8)

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1.12}$$

2.1.3 Γενική εξίσωση ευθείας

Παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω εξισώσεις είναι της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{2.1.13}$$

Πρόταση 10. *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{2.1.14}$$

αναπαριστά ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα με συντεταγμένες $(\beta, -\alpha)$ στο εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων.

*Αν επιπλέον έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων**, τότε η ευθεία είναι κάθετη στο διάνυσμα (α, β).*

Απόδειξη. Έστω (x_A, y_A) ένα ζεύγος που ικανοποιεί την (2.1.13), δηλαδή

$$\alpha x_A + \beta y_A + \gamma = 0. \tag{2.1.15}$$

Αφαιρώντας την (2.1.15) από την (2.1.13) έχουμε

$$\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0, \tag{2.1.16}$$

και άρα
$$\frac{x - x_A}{\beta} = \frac{y - y_A}{-\alpha}. \tag{2.1.17}$$
Βλέπουμε δηλαδή ότι η (2.1.13) αναπαριστά ευθεία που διέρχεται από το (x_A, y_A) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα
$$\vec{v} = (\beta, -\alpha).$$

Αν επιπλέον το σύστηματα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, τότε η ευθεία που περιγράφεται από την εξίσωση (2.1.13) είναι κάθετη στο διάνυσμα
$$\vec{w} = (\alpha, \beta),$$
αφού σε ένα ορθοκανονικό συστήμα $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \beta\alpha + (-\alpha)\beta = 0$, και επομένως $\vec{v} \perp \vec{w}$.

□

Παρατήρηση 2.1.1. Αν η εξίσωση
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{2.1.18}$$
αναπαριστά την ευθεία ε, τότε κάθε πολλαπλάσιο της (2.1.19), για $\lambda \neq 0$:
$$\lambda\alpha x + \lambda\beta y + \lambda\gamma = 0 \tag{2.1.19}$$
αναπαριστά την ίδια ευθεία. Επομένως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{||(\alpha,\beta)||}$ ώστε να καταλήξουμε στην εξίσωση
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0, \tag{2.1.20}$$
όπου $(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 1$. Τότε λέμε ότι η εξίσωση της ευθείας είναι σε **κανονική μορφή**.

2.1.4 Σχετικές θέσεις ευθειών

Έστω δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων περιγράφονται από τις εξισώσεις
$$\varepsilon_1 : \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \tag{2.1.21}$$
$$\varepsilon_2 : \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0. \tag{2.1.22}$$
Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι:

Παράλληλες ευθείες: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ αν και μόνο αν $(\alpha_1, \beta_1) \parallel (\alpha_2, \beta_2)$. Ισοδύναμα,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \tag{2.1.23}$$

Τεμνόμενες ευθείες: Επομένως, η ε_1 τέμνει την ε_2, χωρίς να ταυτίζονται, αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{2.1.24}$$

Κάθετες ευθείες: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ αν και μόνο αν $(\alpha_1, \beta_1) \perp (\alpha_2, \beta_2)$ αν και μόνο αν

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0. \tag{2.1.25}$$

2.1.5 Συντρέχουσες ευθείες

Έστω ότι έχουμε τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με εξισώσεις

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : &\quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ \varepsilon_2 : &\quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \\ \varepsilon_3 : &\quad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Ερώτηση: Πότε διέρχονται από το ίδιο σημείο;

Μπορούμε να δούμε την παραπάνω ερώτηση με τον εξής ισοδύναμο τρόπο: υπάρχουν (x, y) τέτοια ώστε

$$x \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}; \tag{2.1.26}$$

Ή ισοδύναμα, είναι το σύνολο διανυσμάτων

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \right\} \tag{2.1.27}$$

γραμμικά ανεξάρτητο; Επομένως, από τις ιδιότητες των οριζουσών βλέπουμε ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 11. *Τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : &\quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ \varepsilon_2 : &\quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \\ \varepsilon_3 : &\quad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο (είναι συντρέχουσες) αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.1.6 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω ευθεία ε με εξίσωση

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{2.1.28}$$

και σημείο $A(x_1, y_1)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του A από την ε σαν συνάρτηση του σημείου και της ευθείας, δηλαδή των x_1, y_1 και α, β, γ.

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση $d(A, \varepsilon)$ είναι ίση με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, όπου $B \in \varepsilon$ και $AB \perp \varepsilon$.

Ας επιλέξουμε ένα τυχαίο βοηθητικό σημείο $\Gamma(x_0, y_0)$ πάνω στην ευθεία, δηλαδή ισχύει

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0. \tag{2.1.29}$$

Μπορούμε τότε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{BA}$ σαν την προβολή του $\vec{\Gamma A}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{w} = (\beta, -\alpha)$ το οποίο όπως έχουμε δει είναι κάθετο στην ευθεία ε. Επομένως,

$$\vec{BA} = \mathrm{pr}_{\vec{w}} \vec{\Gamma A} = \frac{\langle \vec{\Gamma A}, \vec{w} \rangle}{||\vec{w}||^2} \vec{w}. \tag{2.1.30}$$

Επομένως,

$$d(A, \varepsilon) = ||\vec{BA}|| = \frac{|\langle \vec{\Gamma A}, \vec{w} \rangle|}{||\vec{w}||}. \tag{2.1.31}$$

Αφού

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma A} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0), \\ \vec{w} &= (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\langle \vec{\Gamma A}, \vec{w} \rangle = (x_1 - x_0)\alpha + (y_1 - y_0)\beta, \tag{2.1.32}$$

$$||\vec{w}|| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{2.1.33}$$

Επιπλέον, λόγω της (2.1.29), η (2.1.32) γίνεται

$$\langle \vec{\Gamma A}, \vec{w} \rangle = (x_1 - x_0)\alpha + (y_1 - y_0)\beta = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma. \tag{2.1.34}$$

Επομένως, από την (2.1.31) έχουμε τελικά ότι

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|\alpha x_1 + \beta y_2 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \tag{2.1.35}$$

2.1.7 Διχοτόμοι γωνιών

Έστω ότι μας δίνονται οι **κανονικές** εξισώσεις δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\varepsilon_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \tag{2.1.36}$$

$$\varepsilon_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \tag{2.1.37}$$

με

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_2^2 = 1. \tag{2.1.38}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε πάντα να μετατρέψουμε την εξίσωση μιας ευθείας σε κανονική μορφή, αν διαιρέσουμε με τον κατάλληλο αριθμό (δείτε παράδειγμα παρακάτω).

Τότε τα διανύσματα

$$\vec{v_1} = (\beta_1, -\alpha_1)$$
$$\vec{v_2} = (\beta_2, -\alpha_2)$$

είναι παράλληλα στην ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Επίσης,

$$||\vec{v_1}|| = ||\vec{v_2}|| = 1,$$

λόγω της (2.1.38).

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο $O(x_0, y_0)$, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0 \tag{2.1.39}$$

και

$$\begin{matrix} \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0 = \gamma_1 \\ -\alpha_2 x_0 - \beta_2 y_0 = \gamma_2 \end{matrix} \tag{2.1.40}$$

Από την τομή των δύο ευθειών λοιπόν σχηματίζονται δύο παραπληρωματικές γωνίες (έχουν άθροισμα 180 μοίρες). Επιθυμούμε να βρούμε τις διχοτόμους δ_1, δ_2 αυτών των γωνιών.

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\vec{v_1} + \vec{v_2}, \vec{v_1} - \vec{v_2}$ είναι διάφορα του μηδενός λόγω της (2.1.39) (αν είχαμε $\vec{v_1} = -\vec{v_2}$ ή $\vec{v_1} = \vec{v_2}$ η ορίζουσα στην εξίσωση (2.1.39) θα έπρεπε να είναι μηδέν, λόγω γραμμικής εξάρτησης), και είναι παράλληλα έστω στην δ_1 και δ_2 αντίστοιχα:

$$\delta_1 \parallel \vec{v_1} + \vec{v_2} = (\beta_1 + \beta_2, -\alpha_1 - \alpha_2), \tag{2.1.41}$$

$$\delta_2 \parallel \vec{v_1} - \vec{v_2} = (\beta_1 - \beta_2, -\alpha_1 + \alpha_2). \tag{2.1.42}$$

Συνεπώς

$$\delta_1 \perp (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \tag{2.1.43}$$

$$\delta_2 \perp (\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2), \tag{2.1.44}$$

και επομένως οι διχοτόμοι δ_1, δ_2 είναι της μορφής

$$\delta_1 : (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y + \Gamma_1 = 0 \tag{2.1.45}$$
$$\delta_2 : (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2) + \Gamma_2 = 0, \tag{2.1.46}$$

για κάταλληλες σταθερές Γ_1, Γ_2. Η σταθερές Γ_1, Γ_2 θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες $O \in \delta_1 \cap \delta_2$, δηλαδή

$$\begin{aligned} O \in \delta_1 &\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)x_0 + (\beta_1 + \beta_2)y_0 + \Gamma_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Gamma_1 = -\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0 - \alpha_2 x_0 - \beta_2 y_0 = \gamma_1 + \gamma_2 \\ O \in \delta_2 &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)x_0 + (\beta_1 - \beta_2)y_0 + \Gamma_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Gamma_2 = -\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0 + \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 = \gamma_1 - \gamma_2. \end{aligned}$$

λόγω της (2.1.40).

Επομένως, οι δύο διχοτόμοι περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$(\alpha_1 \pm \alpha_2)x + (\beta_1 \pm \beta_2)y + \gamma_1 \pm \gamma_2 = 0. \tag{2.1.47}$$

2.1.8 Παραδείγματα

1. Έστω σημείο A με συντεταγμένες $(1, 2)$ σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{a}, \vec{b})$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, 1)$.

   Απάντηση:
   $$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) - (y-2) = 0$$
   και άρα η γενική εξίσωση είναι
   $$x - y + 1 = 0.$$
   Η ευθεία επομένως είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{w} = (1, -1)$. Το μέτρο του $\vec{w}$ είναι
   $$||\vec{w}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$
   Το μοναδιαίο διάνυσμα *κάθετο* στην ευθεία είναι επομένως
   $$\vec{n} = \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Επομένως η κανονική εξίσωση της ευθείας ειναι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ομοίως, το μοναδιαίο διάνυσμα *παράλληλο* στην ευθεία είναι το

$$\frac{1}{||(1,1)||}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$, $B(1,1)$, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

   Απάντηση:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & 1-3 \\ y-2 & 1-2 \end{vmatrix} = -x + 2y - 1 = 0.$$

   Κάθετη στο διάνυσμα $\vec{w} = (-1,2)$
   Παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2,1)$
   Μοναδιαίο παράλληλο:

$$\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2,1) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

3. Έστω ότι σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων η ευθεία ε περιγράφεται από την εξίσωση $3x + 2y = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας κάθετη στην ε διερχόμενη από το σημείο $A(1,1)$.

   Απάντηση: Πρέπει να βρούμε διάνυσμα παράλληλο στη ζητούμενη ευθεία.

   Η δοσμένη ευθεία έχει εξίσωση

$$3x + 2y - 1 = 0,$$

   επομένως είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{w} = (3,2)$.

   Συνεπώς, η ζητούμενη ευθεία είναι

   - Παράλληλη στο $\vec{w} = (3,2)$.
   - Διέρχεται από το $A(1,1)$.

Η εξίσωσή της λοιπόν είναι η

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

4. Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : &\quad x + 2y = 1 \\ \varepsilon_2 : &\quad x = y - 1 \end{aligned}$$

και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1.

5. Να βρεθεί η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB, με $A(1,2)$ και $(3,4)$.

Απάντηση:

Πρώτος τρόπος: Το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει συντεταγμένες

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (2,3). \tag{2.1.48}$$

Επίσης,

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3-1, 4-2) = (2,2).$$

Η μεσοκάθετος λοιπόν του AB πρέπει

- Να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2,-2)$, αφού $\vec{v} \perp \vec{AB}$. (Μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\langle \vec{v}, \vec{AB} \rangle = 0$)
- Να διέρχεται από το $M(2,3)$.

Επομένως, η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.1.49}$$

δηλαδή

$$x + y - 5 = 0.$$

Δεύτερος τρόπος: Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που ισαπέχουν από τα άκρα A, B, δηλαδή

$$d(M, A) = d(M, B).$$

Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη μεσοκαθέτο του AB αν και μόνο αν

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2},$$

δηλαδή

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2. \tag{2.1.50}$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα στην (2.1.50) παίρνουμε

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16,$$

η οποία μετά από απλοποιήσεις γίνεται

$$x + y - 5 = 0.$$

6. Έστω ευθείες με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : \quad 2x + y + 1 = 0, \tag{2.1.51}$$

$$\varepsilon_2 : \quad x - y + 1 = 0. \tag{2.1.52}$$

(α΄) Τέμνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; Σε πόσα σημεία; Να βρεθούν τα σημεία τομής.

(β΄) Να δοθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζονται από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Απάντηση:

(α΄) Υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0.$$

Συνεπώς οι ευθείες τέμνονται σε μοναδικό σημείο, το οποίο μπορεί να βρεθεί με την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x - y &= -1. \end{aligned}$$

Η μοναδική του λύση δίνει το σημείο $O(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(β΄) Πρώτα πρέπει να βρούμε εξισώσεις σε κανονική μορφή για τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Διαιρώντας την εξίσωση (2.1.51) με $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ και την εξίσωση (2.1.52) με $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : \quad & \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\ \varepsilon_2 : \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως οι διχοτόμοι δ_1, δ_2 των γωνιών των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δίνονται από

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad & \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)y + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \\ \delta_2 : \quad & \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)y + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

7. Έστω τρίγωνο ABC με $A(-1,1), B(0,2), C(1,-1)$.

(α΄) Να βρεθούν οι εξισώσεις των τριών διαμέσων του τριγώνου ABC.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(γ΄) Να βρεθεί το σημείο τομής των διαμέσων.

Απάντηση: Πρέπει πρώτα να βρούμε τα μέσα M_1, M_2, M_3 των τμημάτων AB, AC και BC αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} M_1 &= (\frac{0-1}{2}, \frac{2+1}{2}) = (-1/2, 3/2) \\ \text{και όμοια: } M_2 &= (0,0), \quad M_3 = (1/2, 1/2). \end{aligned}$$

Η εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα AM_3 δίνεται από

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_A - x_{M_3} \\ y - y_A & y_A - y_{M_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & -3/2 \\ y-1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0,$$

όπου απλοποιώντας παίρνουμε την εξίσωση

$$\varepsilon_1 : \quad x + 3y - 2 = 0.$$

Ομοίως, οι εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, που διέρχονται από τα ζεύγη σημείων B, M_2 και C, M_1 αντίστοιχα, είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 : &\quad x = 0, \\ \varepsilon_3 : &\quad 5x + 3y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας το κριτήριο της Πρότασης 11 υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 = 0,$$

και συμπεραίνουμε ότι οι τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ συντρέχουν.

2.2 Κύκλος

2.2.1 Εξισώσεις κύκλου

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ο κύκλος ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που απέχουν συγκεκριμένη απόσταση R (ακτίνα) από ένα σημείο K, το οποίο αποκαλούμε κέντρο.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ στο επίπεδο, και έστω ένα σημείο $K(x_0, y_0)$ και $R > 0$. Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο ακτίνας R με κέντρο K αν και μόνο αν

$$d(M, K)^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{2.2.1}$$

Η εξίσωση (2.2.1) είναι λοιπόν η αναλυτική εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $R > 0$.

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα στην (2.2.1) έχουμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0,$$

η οποία έχει τη γενική μορφή

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{2.2.2}$$

Πρόταση 12. *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{2.2.3}$$

με $\alpha^2+\beta^2-4\gamma > 0$ *αναπαριστά κύκλο κέντρου* $K(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ *και ακτίνας* $R = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$.

Απόδειξη.
Πρώτος τρόπος: Συμπλήρωση τετραγώνων. Η εξίσωση (12) μπορεί να γραφτεί ως

$$\left(x^2 + 2\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{\beta}{2}y + \frac{\beta^2}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}\right)^2,$$

η οποία συνεπάγεται το ζητούμενο.

Δεύτερος τρόπος: Γεωμετρικός τρόπος με αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Έστω ότι επιχειρούμε να μετατοπίσουμε παράλληλα το σύστημα $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ στο σύστημα $(O', \vec{e_1}, \vec{e_2})$, και έστω ότι το σημείο O' έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) ως προς το σύστημα $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Έστω τώρα ένα σημείο M με συντεταγμένες (x, y) ως προς το σύστημα $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, και συντεταγμένες (X, Y) ως προς το σύστημα $(O', \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Τότε, τα x, y, X, Y σχετίζονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{matrix} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{matrix}. \tag{2.2.4}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (12) τις τιμές x, y από τις εξισώσεις (2.2.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &(X + x_0)^2 + (Y + y_0)^2 + \alpha(X + x_0) + \beta(Y + y_0) + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 + 2x_0X + x_0^2 + Y^2 + 2y_0y + y_0^2 + \alpha X + \alpha x_0 + \beta Y + \beta y_0 + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 + Y^2 + (2x_0 + \alpha)X + (2y_0 + \beta)Y + x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0. \end{aligned}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι αν επιλέξουμε $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$, $y_0 = -\frac{\beta}{2}$ οι πρωτοβάθμιοι όροι στην παραπάνω εξίσωση φεύγουν. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε λοιπόν

$$X^2 + Y^2 = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} - \gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{4} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}\right)^2.$$

Η παραπάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο ακτίνας $R = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$ και κέντρου O', αφού το O' έχει συντεταγμένες $(0, 0)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O', \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Επομένως, η εξίσωση (2.2.3) αναπαριστά κύκλο ακτίνας $R = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$ και κέντρου O' με συντεταγμένες ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς $(x_0, y_0) = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$.

□

2.2.2 Κύκλος που ορίζουν 3 σημεία

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδια Γεωμετρία ότι τρία μη συνευθειακά σημεία K, L, M στο επίπεδο ορίζουν έναν μοναδικό κύκλο, διερχόμενο από τα K, L, M.

Σε αυτήν τη παράγραφο θα δούμε πώς οι ιδιότητες των οριζουσών μπορούν να μας βοηθήσουν να βρούμε εύκολα την εξίσωση ενός κύκλου που διέρχεται από τρία σημεία $K(x_1, y_1), L(x_2, y_2), M(x_3, y_3)$.

Από την Πρόταση 2.2.3, καθε εξίσωση της μορφής

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{2.2.5}$$

με $a \neq 0$ είναι εξίσωση κύκλου, αφού διαιρώντας την με a καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής (2.2.3).

Τώρα, η ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι πως αναπτύσσοντας την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

ως προς την πρώτη γραμμή, παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}(x^2+y^2) - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} x$$
$$+ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot 1.$$

Επομένως η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2.6}$$

περιγράφει κύκλο. Πρέπει να βρούμε τις σταθερές $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ ώστε ο κύκλος αυτός να διέρχεται από τα K, L, M. Θέλουμε δηλαδή η (2.2.6) να ικανοποιείται για τα ζεύγη $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δυο γραμμές ίσες είναι αυτομάτως μηδέν. Συνεπώς, η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ικανοποιείται για τα ζεύγη $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, και επομένως περιγράφει τον ζητούμενο κύκλο.

2.2.3 Θεώρημα του Απολλώνιου

Έστω δύο σημεία $A \neq B$ του επιπέδου και $0 < \kappa \neq 1$. Θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου που ικανοποιούν

$$d(M, A) = \kappa \cdot d(M, B). \tag{2.2.7}$$

Πρώτα, επιλέγουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ προσαρμοσμένο στο πρόβλημα. Δηλαδή

- O είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

- $\vec{e}_1$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το $\vec{AB}$
- $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$. Μπορούμε να επιλέξουμε το $\vec{e}_2$ τέτοιο ώστε το σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ να είναι θετικά προσανατολισμένο, αλλά δεν θα μας χρειαστεί αυτό εδώ.

Σε αυτό το σύστημα αναφοράς τα σημεία A, B μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση μίας μόνο παραμέτρου, δηλαδή υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} A &= (-\alpha, 0) \\ B &= (\alpha, 0), \end{aligned}$$

και αυτό είναι το βασικό πλεονέκτημα αυτής της επιλογής συστήματος αναφοράς. Ως προς ένα γενικό ορθοκανονικό σύστημα, τα σημεία A, B θα χρειάζονταν 4 παραμέτρους για να προσδιοριστουν: $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, αυξάνοντας την πολυπλοκότητα των υπολογισμών χωρίς λόγο.

Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου, ικανοποιεί δηλαδή την (2.2.7). Υψώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.2.7) στο τετράγωνο έχουμε

$$\begin{aligned} &(x+\alpha)^2 + y^2 = \kappa^2(x-\alpha)^2 + \kappa^2 y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 = \kappa^2 x^2 - 2\kappa^2 \alpha x + \kappa^2\alpha^2 + \kappa^2 y^2 \\ &\Leftrightarrow (\kappa^2-1)x^2 + (\kappa^2-1)y^2 - 2\alpha(\kappa^2+1)x + (\kappa^2-1)\alpha^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha\frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}x + \alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου

$$K\left(\alpha\frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}, 0\right)$$

και ακτίνας

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2\left(\frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}\right)^2 - 4\alpha^2} = \frac{2\kappa\alpha}{|\kappa^2-1|}.$$

2.2.4 Εφαπτομένη κύκλου

Έστω κύκλος c με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R, με εξίσωση δηλαδή

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2,$$

διερχόμενος από σημείο $A(x_1, y_1)$. Η εφαπτόμενη ε του κύκλου από το A είναι ευθεία διερχόμενη από το A, κάθετη στην ακτίνα $\vec{KA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Η ε λοιπόν θα έχει εξίσωση

$$
\begin{aligned}
& (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0 \\
\iff \quad & (x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_0 + y_0 - y_1)(y_1 - y_0) = 0 \\
\iff \quad & (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2) = 0 \\
\iff \quad & (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - R^2 = 0,
\end{aligned}
$$

αφού το A ανήκει στον κύκλο c και επομένως $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$.

Επομένως, η εφαπτόμενη ευθεία έχει εξίσωση

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = R^2.$$

2.2.5 Ασκήσεις στον κύκλο

1. Να βρεθεί η τομή του κύκλου

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

   με την ευθεία $x + y + 1 = 0$.

2. Να βρεθούν τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) των κύκλων

$$
\begin{aligned}
c_1 : \quad & (x - 1)^1 + (y - 1)^2 = 9, \\
c_2 : \quad & x^2 + y^2 = 4.
\end{aligned}
$$

3. Να βρεθεί ο κύκλος με κέντρο πάνω στην ευθεία

$$2x + 3y - 4 = 0$$

   διερχόμενος από τα σημεία $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$.

2.3 Κωνικές τομές

Ορισμός 9. *Κωνική τομή λέγεται μια καμπύλη που παίρνουμε αν τμήσουμε έναν κυκλικό κώνο με επίπεδο που δεν διέρχεται από την κορυφή O του κώνου.*

Παρατήρηση 2.3.1. Αν στον παραπάνω ορισμό το επίπεδο διέρχεται από την κορυφή O τότε η τομή είναι μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις

- Σημείο: μάλιστα η κορυφή του κώνου O.
- Ευθεία: μια από τις γεννέτειρες του κώνου O
- Ζεύγος τεμνόμενων ευθειών: δύο συνεπίπεδες γεννέτειρες του κώνου, οι οποίες φυσικά τέμνονται στην κορυφή O.

Αυτές τις περιπτώσεις τις αποκαλούμε εκφυλισμένες κωνικές επιφάνειες.

Θεώρημα 2 (Dandelin)**.** *Κάθε κωνική τομή εκτός του κύκλου είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ενός επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις $d(M,E)$ από σταθερό σημείο E και $d(M,\delta)$ από σταθερή ευθεία δ ικανοποιούν*

$$d(M,E) = e \cdot d(M,\delta), \tag{2.3.1}$$

για κάποιον σταθερό συντελεστή $e > 0$. Το σημείο E ονομάζεται εστία της κωνικής τομης, η ευθεία δ διευθετούσα και η σταθερά e εκκεντρότητα.

Παρατήρηση 2.3.2. Συγκρίνετε με το Θεώρημα του Απολλώνιου. Τώρα το ένα από τα δύο σημεία έχει αντικατασταθεί από ευθεία.

Διακρίνουμε τρεις κατηγορίες κωνικών τομών, ανάλογα με την τιμή της σταθεράς e. Δηλαδή αν

1. $e < 1$: η κωνική τομή αποκαλείται **έλλειψη**.
2. $e = 1$: η κωνική τομή αποκαλείται **παραβολή**.
3. $e > 1$: η κωνική τομή αποκαλείται **υπερβολή**.

Άσκηση: Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής τομής στον $\mathbb{R}^2$ με εκκεντρότητα $e = \frac{1}{2}$, εστία $E(1,1)$ και διευθετούσα $\delta : x + y + 1 = 0$.
Απάντηση: Κάθε σημείο $M(x,y)$ της ζητούμενης κωνικής τομής ικανοποιεί

$$d(M,E) = \frac{1}{2} d(M,\delta). \tag{2.3.2}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} d(M,E)^2 &= \left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 \\ &= x^2-2x+1+y^2-2y+1 \\ &= x^2+y^2-2x-2y+2 \end{aligned}$$

και από την (2.1.35) έχουμε

$$d(M,\delta)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{(\sqrt{1^2+1^2})^2} = \frac{x^2+y^2+1+2xy+2x+2y}{2}.$$

Επομένως, υψώνοντας την (2.3.2) στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-2x-2y+2 = \frac{x^2+y^2+1+2xy+2x+2y}{8} \\ \Leftrightarrow\ & 8x^2+8y^2-16x-16y+16 = x^2+y^2+1+2xy+2x+2y \\ \Leftrightarrow\ & 7x^2+7y^2-2xy-18x-18y+15=0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση λοιπόν της κωνικής τομής είναι

$$7x^2+7y^2-2xy-18x-18y+15=0. \tag{2.3.3}$$

Παρατήρηση 2.3.3. Εφόσον η εξίσωση αυτή προέκυψε από την (2.3.2), όπου έχουμε υποθέσει ότι η εκκεντρότητα $e=\frac{1}{2}<1$, γνωρίζουμε πως αναπαριστά έλλειψη. Αν όμως μας είχε δοθεί μόνο η εξίσωση (2.3.3), αυτή τη στιγμή δεν έχουμε τρόπο να δούμε τι γεωμετρικό αντικείμενο περιγράφει. Δηλαδή αν περιγράφει έλλειψη, παραβολή, υπερβολή, ή ίσως κάποια άλλη καμπύλη που δεν είναι κωνική τομή. Θα αναπτύξουμε αργότερα μεθόδους που θα μας επιτρέπουν να απαντάμε σε τέτοιες ερωτήσεις.

2.3.1 Κανονικές εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ότι με κατάλληλη επιλογή συστήματος συντεταγμένων οι κωνικές τομές περιγράφονται από πολύ απλές εξισώσεις, σε αντίθεση με την κατάσταση της παραπάνω άσκησης.

Θα χρειαστεί να αξιοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες/συμμετρίες που έχουν οι κωνικές τομές κάθε κατηγορίας, και τις οποίες αναλύουμε παρακάτω.

Κύριος άξονας συμμετρίας κωνικής τομής: Έστω E η εστία και δ η διευθετούσα μιας κωνικής τομής, σύμφωνα με το Θεώρημα του Dandelin, και έστω ε η ευθεία κάθετη στην δ που διέρχεται από το E.

Παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση (2.3.1) το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ε επίσης ικανοποιεί την (2.3.1). Η ευθεία ε είναι επομένως *άξονας συμμετρίας* της κωνικής τομής, ανεξαρτήτως της τιμής της εκκεντρότητας e.

Τώρα προχωράμε σε πιο συγκεκριμένη μελέτη των διάφορων κωνικών τομών.

- **Παραβολή (**$e = 1$**):** Θέτοντας $e = 1$ στην εξίσωση (2.3.1) βλέπουμε ότι κάθε σημείο της παραβολής ισαπέχει απο την εστία και την διευθετούσα.

  Έστω O εκείνο το σημείο πάνω στον άξονα συμμετρίας ε με αυτή την ιδιότητα. Θα αποκαλούμε το O κορυφή της παραβολής.

  Ορίζουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ με $\vec{e}_1 \parallel \varepsilon$, $\vec{e}_2 \perp \varepsilon$ και O την κορυφή της παραβολής.

  Σε αυτό το σύστημα η εστία είναι το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$ για κάποιο $p > 0$ ενώ η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x + \frac{p}{2} = 0$, αφού το O ισαπέχει από την εστία και την διευθετούσα (από επιλογή). Ο αριθμός p λοιπόν είναι η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα της παραβολής.

  Τώρα, αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην παραβολή

  $$d(M, E)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2. \tag{2.3.4}$$

  Επίσης από την (2.1.35)

  $$d(M, \delta)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px. \tag{2.3.5}$$

  Εξισώνοντας τις (2.3.4), (2.3.5) παίρνουμε

  $$\begin{aligned} & x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px \\ & \Leftrightarrow y^2 = 2px. \end{aligned}$$

  Επομένως, σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, η παραβολή έχει εξίσωση

  $$y^2 = 2px. \tag{2.3.6}$$

  Η (2.3.6) λέγεται **κανονική εξίσωση παραβολής**.

  Παρατηρούμε ότι η συμμετρία της παραβολής ως προς τον κύριο άξονα φαίνεται αμέσως από την εξίσωση (2.3.6): Αν ένα σημείο $M(x, y)$ ικανοποιεί την (2.3.6), τότε και το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των x, $M'(x, -y)$, την ικανοποιεί.

- **Έλλειψη ($e < 1$):** Έστω ε ο κύριος άξονας συμμετρίας, όπως παραπάνω. Δηλαδή, $\varepsilon \perp \delta$ και $E \in \varepsilon$. Επίσης, θέτουμε Z να είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και δ.

  1. *Εύρεση των κορυφών της έλλειψης:* Μπορούμε να βρούμε δύο σημεία A, A' της ευθείας ε που να ανήκουν επίσης και στην έλλειψη. Δηλαδή ικανοποιούν

     $$\begin{aligned} &d(A,E) = e \cdot d(A,Z) \\ &d(A',E) = e \cdot d(A',Z) \end{aligned} \quad \text{επειδή } A, A' \text{ ανήκουν στην έλλειψη,}$$

     $$\begin{aligned} &d(A,E) + d(AZ) = d(E,Z) \\ &d(A',Z) - d(A',E) = d(E,Z) \end{aligned} \quad \text{επειδή } A, A' \text{ ανήκουν στην ευθεία } \varepsilon.$$

     Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να βρούμε ότι τα A και A' πρεπει να ικανοποιούν

     $$d(A,Z) = \frac{1}{1+e} d(E,Z) \quad \text{και} \quad d(A',Z) = \frac{1}{1-e} d(E,Z). \tag{2.3.7}$$

     Αφού το $d(E,Z)$ είναι δοσμένο (είναι απλά η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (2.3.7) για να βρούμε τα A, A'.

     Παρατήρηση: Επειδή $e > 0$ τα A, A' είναι διαφορετικά σημεία του επιπέδου. Επίσης,

     $$\lim_{e \to 1^-} d(A',Z) = \lim_{e \to 1^-} \left(\frac{1}{1-e} d(E,Z) \right) = d(E,Z) \lim_{e \to 1^-} \frac{1}{1-e} = +\infty,$$

     και

     $$\lim_{e \to 1^-} d(A,Z) = \lim_{e \to 1^-} \left(\frac{1}{1+e} d(E,Z) \right) = d(E,Z) \lim_{e \to 1^-} \frac{1}{1+e} = \frac{1}{2} d(E,Z).$$

     Δηλαδή, καθώς η εκκεντρότητα e τείνει στο 1 από αριστερά, το σημείο A μετακινείται προς το μέσο του τμήματος EZ ενώ το A' απομακρύνεται στο "άπειρο". Αυτό συμφωνεί με το γεγονός ότι η παραβολή έχει μόνο μία κορυφή, η οποία είναι το μέσο του τμήματος EZ.

  2. Τοποθετούμε σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ έτσι ώστε:

     – $\vec{e}_1 \parallel \varepsilon$
     – $\vec{e}_1$ και $\vec{A'A}$ έχουν την ίδια φορά
     – O είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA'.

     Λόγω συμμετρίας της έλλειψης ως προς τον κύριο άξονα, δεν μας ενδιαφέρει η φορά του $\vec{e}_2$, αρκεί να είναι κάθετο στο $\vec{e}_1$ και με μέτρο μονάδα ώστε το σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ να είναι ορθοκανονικό.

3. *Η εστία και η διευθετούσα στο σύστημα συντεταγμένων:* Έστω ότι γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων A, A'. Λόγω της επιλογής του συστήματος όπως παραπάνω, αυτές είναι $A(a,0), A'(-a,0)$ για κάποιο $a > 0$.

   Έστω επίσης ότι $E(\lambda, 0)$ και $Z(\mu, 0)$. Θέλουμε να βρούμε τα λ, μ συναρτήσει των a, e. Αφού τα A, A, E, Z ανήκουν στην ε έχουμε

$$\begin{aligned} a - \lambda &= d(O,A) - d(O,E) = d(A,E) \\ &= e \cdot d(A,Z) = e(d(O,Z) - d(O,A)) = e(\mu - a), \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned} a + \lambda &= d(O,A') - d(O,E) = d(A',E) \\ &= e \cdot d(A',Z) = e(d(O,Z) + d(O,A')) = e(\mu + a). \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

   Επιλύοντας το σύστημα (2.3.8) - (2.3.9) παίρνουμε ότι $\lambda = ae$ και $\mu = \frac{a}{e}$. Δηλαδή, εστία είναι το σημείο

$$E(ae, 0) \tag{2.3.10}$$

   ενώ η διευθετούσα έχει εξίσωση

$$x - \frac{a}{e} = 0. \tag{2.3.11}$$

4. *Εξίσωση της έλλειψης:* Έστω τυχαίο σημείο $M(x,y)$ στην έλλειψη, ικανοποιεί δηλαδή την εξίσωση

$$d(M,E) = e \cdot d(M,\delta). \tag{2.3.12}$$

   Υπολογίζουμε ότι

$$d(M,E)^2 = (x - ae)^2 + y^2 = x^2 + (ae)^2 - 2xae + y^2, \tag{2.3.13}$$

   ενώ με εφαρμογή της (2.1.35) παίρνουμε

$$d(M,\delta)^2 = \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 = x^2 + \frac{a^2}{e^2} - 2x\frac{a}{e}. \tag{2.3.14}$$

   Επομένως, υψώνοντας την (2.3.12) στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας τις (2.3.13), (2.3.14), παίρνουμε

$$x^2 + (ae)^2 - 2xae + y^2 = e^2x^2 + a^2 - 2xae, \tag{2.3.15}$$

   δηλαδή

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = (1 - e^2)a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Θέτοντας $b^2 = a^2(1-e^2)$, όπου $b = a\sqrt{1-e^2}$, καταλλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.3.16}$$

που την αποκαλούμε **κανονική εξίσωση έλλειψης**.

5. *Γεωμετρικές πληροφορίες που μας δίνει η κανονική εξίσωση:*

   – Δευτερεύων άξονας συμμετρίας: Για κάθε σημείο $M(x,y)$ που ικανοποιεί την (2.3.16), το σημείο $M(x,-y)$ επίσης την ικανοποιεί. Συνεπώς, η ευθεία από το O κάθετη στον κύριο άξονα της έλλειψης είναι επίσης άξονας συμμετρίας της.

   – Κέντρο συμμετρίας: Για κάθε σημείο $M(x,y)$ που ικανοποιεί την (2.3.16), το σημείο $M(-x,-y)$ επίσης την ικανοποιεί. Συνεπώς, το σημείο O είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης.

   – Τα σημεία $B(0,b), B(0,-b)$ είναι τα σημεία πάνω στον δευτερεύοντα άξονα που ανήκουν στην έλλειψη, και η σχέση με τις κορυφές $A(a,0), A'(-a,0)$ της έλλειψης και την εκκεντρότητά της e είναι

   $$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

   – Δεύτερο ζεύγος εστίας-διευθετούσας: Έστω το σημείο $E'(-ae,0)$ και η ευθεία $\delta' : x + \frac{a}{e} = 0$, που είναι τα συμμετρικά των E και δ ως προς τον δευτερεύοντα άξονα συμμετρίας της έλλειψης. Για κάθε σημείο M της έλλειψης, ας συμβολίσουμε με M' το συμμετρικό του ως προς τον δευτερέυοντα άξονα. Έχουμε τότε, λόγω συμμετρίας, ότι

   $$d(M,E') = d(M',E) = e \cdot d(M',\delta) = e \cdot d(M,\delta').$$

   Επομένως, τα E', δ' είναι επίσης εστία και διευθετούσα της έλλειψης που ορίζουν τα E, δ, και μάλιστα με την ίδια εκκεντρότητα e.

• **Υπερβολή** (e>1): Μέσω διαδικασίας παρόμοιας με εκείνη που ακολουθήσαμε στην περίπτωση της έλλειψης έχουμε τα εξής:

  – Έστω ε ο κύριος άξονας συμμετρίας, δηλαδή η ε είναι ευθεία κάθετη στη διευθετούσα δ διερχόμενη από την εστία E.

  – Υπάρχουν σημεία A, A' πάνω στον κύριο άξονα ε που να ανήκουν και στην υπερβολή. Τα σημεία A, A' τα αποκαλούμε κορυφές της υπερβολής.

  – Έστω O το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA'.

– Επιλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ με $\vec{e}_1$ ομόρροπο του $\vec{AA'}$.
– Αν τα σημεία A, A' έχουν συντεταγμένες $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ ως προς το επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων, τότε η εστία είναι το σημείο
$$E(ae, 0)$$
και η διευθετούσα είναι η ευθεία
$$\delta: \quad x - \frac{a}{e} = 0.$$
– Η υπερβολή σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση
$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1, \\ \iff \quad & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$
αν θέσουμε $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.
– Αν (x, y) ικανοποιεί την εξίσωση της υπερβολής, τότε και τα $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ την ικανοποιούν. Επομένως η υπερβολή έχει και έναν δευτερεύοντα άξονα συμμετρίας, την ευθεία που τέμνει την ε κάθετα στο σημείο O, και επομένως και ένα δεύτερο ζεύγος εστίας - διευθετούσας τα
$$\begin{aligned} & E'(-ae, 0), \\ \delta': \quad & x + \frac{a}{e} = 0 \end{aligned}$$
αντίστοιχα, συμμετρικά των E, δ ως προς τον δευτερεύοντα άξονα.

Επιπλέον, η υπερβολή έχει και κέντρο συμμετρίας, το σημείο O.
– Η υπερβολή έχει ασύμπτωτες τις ευθείες
$$\begin{aligned} \zeta_1: \quad & \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ \zeta_2: \quad & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \end{aligned}$$

2.3.2 Εστιακή ιδιότητα της έλλειψης

Παρατηρούμε την εξής σχέση μεταξύ των δύο εστίων E, E' και διευθετουσών δ, δ'. Για κάθε σημείο M της έλλειψης έχουμε
$$d(M, E) = e \cdot d(M, \delta) \quad \text{και} \quad d(M, E') = e \cdot d(M, \delta').$$

Επομένως,

$$d(M,E)+d(M,E')=e(d(M,\delta)+d(M,\delta'))=e\cdot d(\delta,\delta')=e\frac{2a}{e}=2a.$$

Δηλαδή, το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου M της έλλειψης από τις δύο εστίες είναι σταθερό, ανεξάρτητο δηλαδή του σημείου, και ίσο με την απόσταση $2a$ των κορυφών A, A'.

Ισχύει όμως και το αντίστροφο:

Πρόταση 13. *Έστω E, E' δύο σημεία του επιπέδου και $a > 0$ τέτοιο ώστε $2a > d(E,E')$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που ικανοποιούν*

$$d(M,E)+d(M,E')=2a \tag{2.3.17}$$

είναι έλλειψη με εστίες E, E', απόσταση κορυφών $2a$ και εκκεντρότητα

$$e=\frac{d(E,E')}{2a}. \tag{2.3.18}$$

Απόδειξη. Η γενική μέθοδος είναι να επιλέξουμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στο πρόβλημα, ώστε να δείξουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος ικανοποιεί την κανονική εξίσωση έλλειψης με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Από τα παραπάνω (ή λόγω της συμμετρίας του ισχυρισμού της πρότασης ως προς E και E') μαντεύουμε ότι η κατάλληλη αρχή αξόνων O πρέπει να είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος EE', οπότε περιμενουμε η ευθεία EE' να είναι και ο κύριος άξονας συμμετρίας της έλλειψης που θα προκύψει. Επομένως, επιλέγουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ με $\vec{e}_1$ να είναι ομόρροπο με το $\vec{E'E}$.

Έχοντας **ορίσει** $e=\frac{d(E,E')}{2a}$, βλέπουμε ότι τότε $E(ae,0), E'(-ae,0)$ (επομένως, στο τέλος e θα είναι πράγματι η εκκεντρότητα της έλλειψης). Συνεπώς, η (2.3.17) δίνει

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x-ae)^2+y^2}+\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=2a \\
\iff\quad & \sqrt{(x-ae)^2+y^2}-2a=-\sqrt{(x+ae)^2+y^2} \\
\implies\quad & (\sqrt{(x-ae)^2+y^2}-2a)^2=(x+ae)^2+y^2 \\
\iff\quad & (x-ae)^2+y^2+4a^2-4a\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=(x+ae)^2+y^2 \\
\iff\quad & 4a\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=(x-ae)^2-(x+ae)^2+4a^2=4a(a-xe) \\
\implies\quad & (x-ae)^2+y^2=a-xe \\
\iff\quad & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1,
\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η κανονική εξίσωση έλλειψης με τις ζητούμενες ιδιότητες. Συνεπώς, κάθε σημείο που ικανοποιεί την (2.3.17) ανήκει σε αυτή την έλλειψη. □

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

Άσκηση 4. *(Εστιακή ιδιότητα της υπερβολής) Έστω E, E' σημεία του επιπέδου και $a > 0$ που ικανοποιεί $2a < d(E, E')$. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που ικανοποιούν*
$$|d(M, E) - d(M, E')| = 2a$$
είναι υπερβολή με εκκεντρότητα
$$e = \frac{d(E, E')}{2a}$$
και απόσταση μεταξύ των κορυφών $d(A, A') = 2a$.

2.3.3 Εφαπτόμενες κωνικών τομών

Παραβολή

Έστω παραβολή με εξίσωση
$$y^2 = 2px,$$
και σημείο $M(x_0, y_0)$ σημείο της, δηλαδή $y_0^2 = 2px_0$. Γράφοντας την εξίσωση της παραβολής ως
$$x = \frac{1}{2p}y^2,$$
βλέπουμε ότι η παραβολή είναι το γράφημα της συνάρτησης $x = f(y) = \frac{1}{2p}y^2$. Επομένως, η εφαπτομένη στο (x_0, y_0) θα έχει εξίσωση
$$x - x_0 = f'(y_0)(y - y_0).$$
Αφού $f'(y) = \frac{1}{p}y$, προκύπτει η εξίσωση
$$\begin{aligned}
& x - x_0 = \frac{1}{p}y_0(y - y_0) \\
\iff \quad & x - x_0 = \frac{1}{p}y_0 y - \frac{1}{p}y_0^2 \\
\iff \quad & x - x_0 = \frac{1}{p}y_0 y - \frac{1}{p}2px_0 \\
\iff \quad & x - x_0 = \frac{1}{p}y_0 y - 2x_0 \\
\iff \quad & p(x + x_0) = y_0 y.
\end{aligned}$$

Πρόταση 14. *Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο της (x_0, y_0) έχει εξίσωση*

$$p(x + x_0) = y_0 y.$$

Έλλειψη

Έστω έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.3.19}$$

και σημείο της $M(x_0, y_0)$, δηλαδή ισχύει η $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Τώρα δεν είναι δυνατόν να γράψουμε ολόκληρη την έλλειψη σαν γράφημα κάποιας συνάρτησης, όπως στην περίπτωση της παραβολής. Όμως, πάντα μπορούμε να βρούμε κάποια συνάρτηση f, ώστε ένα από τα δύο να συμβαίνει

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(f(x))^2}{b^2} = 1, \tag{2.3.20}$$

$$\text{ή} \quad x_0 = f(y_0) \quad \text{και} \quad \frac{(f(y))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3.21}$$

Για παράδειγμα, αν $x_0 > 0$ και $y_0 > 0$ μπορούμε να λύσουμε την (2.3.19) ως

$$y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = f(x),$$

ώστε να περιγράψουμε την έλλειψη γύρω από το $M(x_0, y_0)$ σαν γράφημα της συνάρτησης f. Αντίστοιχα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις για τα x_0, y_0.

Παραγωγίζοντας την (2.3.20) στο x_0 παίρνουμε

$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{b^2} = \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0 f'(x_0)}{b^2} = 0,$$

άρα

$$\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0 f'(x_0)}{b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_0 f'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} x_0.$$

Η εφαπτόμενη στο σημείο (x_0, y_0) έχει εξίσωση

$$\begin{aligned}
& y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad y_0(y - y_0) = y_0 f'(x_0)(x - x_0) \\
\Longleftrightarrow \quad & y_0 y - y_0^2 = -\frac{b^2}{a^2} x_0 x + \frac{b^2}{a^2} x_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_0 y + \frac{b^2}{a^2} x_0 x = \frac{b^2}{a^2} x_0^2 + y_0^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας την (2.3.21) στο y_0 παίρνουμε

$$\frac{2x_0 f'(y_0)}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} = 0 \iff x_0 f'(y_0) = -\frac{a^2 y_0}{b^2}.$$

Επομένως, η εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0) θα έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} & x - x_0 = f'(y_0)(y - y_0) \\ \iff & x_0(x - x_0) = x_0 f'(y_0)(y - y_0) \\ \iff & x_0(x - x_0) = -\frac{a^2 y_0}{b^2}(y - y_0) \\ \iff & \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

Πρόταση 15. *Η εφαπτομένη της έλλειψης* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *σε ένα σημείο της* (x_0, y_0) *έχει εξίσωση*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Υπερβολή

Με ανάλογο τρόπο βλέπουμε οτι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 16. *Η εφαπτομένη της υπερβολής* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *σε ένα σημείο της* (x_0, y_0) *έχει εξίσωση*

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Εφαρμογή/Άσκηση

Έστω η έλλειψη

$$c: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Τότε, το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της έλλειψης από τυχούσα εφαπτομένη της είναι σταθερό και ίσο με b^2.

Απόδειξη: Έστω τυχαίο σημείο (x_0, y_0) πάνω στην c και ε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο (x_0, y_0), δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &= 1 \\ \varepsilon: \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Επίσης, είδαμε ότι η σταθερά b σχετίζεται με την εκκεντρότητα e της έλλειψης με την εξίσωση $b^2 = a^2(1-e^2)$, και άρα $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. Επιπλέον, οι εστίες έχουν συντεταγμένες

$$E(ae, 0) \quad \text{και} \quad E'(-ae, 0).$$

Υπολογίζουμε τότε

$$d(E,\varepsilon) = \frac{|\frac{x_0}{a^2}ae + \frac{y_0}{b^2}0 - 1|}{\sqrt{(x_0/a^2)^2 + (y_0/b^2)^2}} = \frac{|\frac{x_0 e}{a} - 1|}{\sqrt{(x_0/a^2)^2 + (y_0/b^2)^2}},$$

$$d(E',\varepsilon) = \frac{|\frac{x_0}{a^2}(-ae) + \frac{y_0}{b^2}0 - 1|}{\sqrt{(x_0/a^2)^2 + (y_0/b^2)^2}} = \frac{|\frac{x_0 e}{a} + 1|}{\sqrt{(x_0/a^2)^2 + (y_0/b^2)^2}}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
d(E,\varepsilon)\cdot d(E',\varepsilon) &= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left|\left(\frac{x_0 e}{a} - 1\right)\left(\frac{x_0 e}{a} + 1\right)\right| \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left|\left(\frac{x_0 e}{a}\right)^2 - 1\right| \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left|\frac{x_0^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 1\right| \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left|\frac{x_0^2}{a^2} - 1 - \frac{x_0^2 b^2}{a^4}\right| \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left|-\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2 b^2}{a^4}\right| \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2 b^2}{a^4}\right)\frac{b^2}{b^2} \\
&= \left(\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right)^{-1} \left(\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2\right) b^2 \\
&= b^2
\end{aligned}$$

2.3.4 Κατοπτρική ιδιότητα της παραβολής

Πρόταση 17. *Έστω παραβολή (P) με εστία E και κορυφή O. Θεωρούμε M ένα τυχαίο σημείο της (P), και ε την ευθεία διερχόμενη από το M, που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής από το M. Επιπλέον, έστω x ημιευθεία παράλληλη και με την ίδια φορά με την ημιευθεία OE. Τότε η κάθετη ε διχοτομεί τη γωνία $E\hat{M}x$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων ώστε η παραβολή να παίρνει την κανονική εξίσωση

$$y^2 = 2px,$$

και επιπλέον $O(0,0)$ και $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Έστω λοιπόν σήμειο $M(x_0, y_0)$ πάνω στην παραβολή, ικανοποιεί δηλαδή

$$y_0^2 = 2px_0,$$

για κάποιο $p > 0$.

Η εφαπτόμενη στην (P) από το M έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} & p(x + x_0) = y_0 y \\ \iff \quad & px - y_0 y + px_0 = 0. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το διάνυσμα

$$\vec{w} = (p, -y_0)$$

είναι κάθετο στην εφαπτομένη από το M και επομένως παράλληλο με την ευθεία ε.

Επιπλέον, η ημιευθεία Mx είναι ομόρροπη με το διάνυσμα

$$\vec{v}_1 = (1, 0).$$

Θέτουμε επίσης

$$\vec{v}_2 = \vec{ME} = \left(\frac{p}{2} - x_0, -y_0\right),$$

και

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \widehat{(\vec{w}, \vec{v}_1)} \\ \theta_2 &= \widehat{(\vec{v}_2, \vec{w})} \end{aligned}$$

Η ευθεία ε διχοτομεί την $E\hat{M}x$ αν και μόνο αν $\theta_1 = \theta_2$. Υπολογίζουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \text{συν}\theta_1 &= \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{v}_1||||\vec{w}||}, \\ \text{συν}\theta_2 &= \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{v}_2||||\vec{w}||}. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle &= p, \\
\langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle &= p\left(\frac{p}{2} - x_0\right) + y_0^2, \\
||\vec{v}_1|| &= 1, \\
||\vec{v}_2|| &= \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως, αφού $\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
& \theta_1 = \theta_2 \\
\iff \quad & \text{συν}\theta_1 = \text{συν}\theta_2 \\
\iff \quad & \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{v}_1||||\vec{w}||} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{v}_2||||\vec{w}||} \quad \iff \quad \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{v}_1||} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{v}_2||} \\
\iff \quad & p = \frac{p\left(\frac{p}{2} - x_0\right) + y_0^2}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2}} = \frac{\frac{p^2}{2} - px_0 + 2px_0}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + 2px_0}} = \frac{p(\frac{p}{2} + x_0)}{\sqrt{\left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2}} = p\frac{\frac{p}{2} + x_0}{\left|\frac{p}{2} + x_0\right|} = p,
\end{aligned}$$

η οποία ισχύει πάντα. Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι $y_0^2 = 2px_0$ καθώς και ότι $\frac{p}{2} + x_0 > 0$, αφού $p, x_0 > 0$. □

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να λυθεί η παρακάτω άσκηση.

Άσκηση 5. *(Κατοπτρική ιδιότητα της έλλειψης) Έστω έλλειψη με εστίες E, E' και M τυχαίο σημείο της. Τότε η κάθετος ε στην εφαπτομένη της έλλειψης στο M, διερχόμενη από το M, διχοτομεί τη γωνία $E\hat{M}E'$.*

2.4 Γενική δευτεροβάθμια εξίσωση

Εχουμε μέχρι στιγμής δει ότι οικεία γεωμετρικά αντικείμενα όπως ο κύκλος και οι υπόλοιπες κωνικές τομές περιγράφονται με εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Γεννάται επομένως το ερώτημα, τι γεωμετρικά αντικείμενα είναι δυνατόν να περιγραφούν με τέτοιου είδους εξισώσεις, δηλαδή της γενικής μορφής

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{2.4.1}$$

όπου $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ είναι πραγματικές σταθερές, ενώ τα x, y περιγράφουν συντεταγμένες σημείων στο $\mathbb{R}^2$. Περιοριζόμαστε στην περίπτωση που a, b, c δεν είναι όλα μηδέν, ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.4.2}$$

γιατί τότε η εξίσωση είναι στην πραγματικότητα εξίσωση πρώτου βαθμού, και άρα περιγράφει ευθεία.

Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων δεύτερου βαθμού είναι οι ακόλουθες

1. Κύκλος: $x^2 + y^2 = R^2$
2. Έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. Παραβολή: $y^2 = 2px$
4. Υπερβολή: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. Φανταστική έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
6. Ζεύγος τεμνόμενων ευθειών: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
7. Ζεύγος φανταστικών ευθειών, τεμνόμενων στο $(0, 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
8. Ζεύγος παράλληλων ευθειών: $y^2 - c^2 = 0$, όπου $c > 0$
9. Δύο ευθείες που ταυτίζονται: $y^2 = 0$
10. Δύο “παράλληλες” (δηλαδή μη τεμνόμενες) φανταστικές ευθείες: $y^2 = -1$

Η βασική φιλοσοφία που θα ακολουθήσουμε για την μελέτη μιας γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι η εξής:

- αφού οι κανονικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού κύκλων και κωνικών τομών προέκυψαν μετά από προσεκτική επιλογή συστήματος συντεταγμένων,

- είναι αναμενόμενο πως, αν η εξίσωση (2.4.1) περιγράφει κάποιο από τα παραπάνω γνωστά αντικείμενα, θα πρέπει να υπάρχει κάποια αλλαγή συστήματος συντεταγμένων, από το ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ σε κάποιο ορθοκανονικό σύστημα $(O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$, η οποία να μετασχηματίζει την εξίσωση (2.4.1) σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Θα δούμε ότι ισχύει μάλιστα το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Για κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση με δυο αγνώστους x, y όπως η* (2.4.1). *σε σύστημα συντεταγμένων Oxy, υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $O'XY$ ώστε η εξίσωση να μετασχηματίζεται σε μια από τις περιπτωσεις (1) - (10) παραπάνω.*

Η παρακάτω συζήτηση θα οδηγήσει στην απόδειξη του θεωρήματος.

2.4.1 Στροφή του συστήματος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$ το οποίο προκύπτει από στροφή του $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ κατά γωνία θ.

Αν λοιπόν κάποιο σημείο έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ και (x', y') ως προς το $(O, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$ τότε τα x, y, x', y' σχετίζονται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} x &= \text{συν}\theta \cdot x' - \text{ημ}\theta \cdot y' \\ y &= \text{ημ}\theta \cdot x' + \text{συν}\theta \cdot y' \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Θέλουμε να δούμε αν με κατάλληλη επιλογή της γωνίας θ είναι δυνατόν να απλοποιηθεί η εξίσωση που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε στην γενική δευτεροβάθμια εξίσωση (2.4.1) τις σχέσεις (2.4.3). Για παράδειγμα, επιθυμούμε η νέα εξίσωση να μην περιέχει όρους της μορφής $x'y'$, εφόσον καμιά από τις ειδικές περιπτώσεις δεν έχει αντίστοιχους όρους.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
&a(\text{συν}\theta \cdot x' - \text{ημ}\theta \cdot y')^2 + 2b(\text{συν}\theta \cdot x' - \text{ημ}\theta \cdot y')(\text{ημ}\theta \cdot x' + \text{συν}\theta \cdot y')+ \\
&+ c(\text{ημ}\theta \cdot x' + \text{συν}\theta \cdot y')^2 + d(\text{συν}\theta \cdot x' - \text{ημ}\theta \cdot y') + e(\text{ημ}\theta \cdot x' + \text{συν}\theta \cdot y') + f = 0
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

$$\begin{aligned}
\iff &(x')^2(a\,\text{συν}^2\theta + 2b\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta + c\,\text{ημ}^2\theta) \\
&+ x'y'\,(-2a\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta + 2b\,\text{συν}^2\theta - 2b\,\text{ημ}^2\theta + 2c\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta) \\
&+ (y')^2(-a\,\text{ημ}^2\theta - 2b\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta + c\,\text{συν}^2\theta) \\
&+ x'(d\,\text{συν}\theta + e\,\text{ημ}\theta) + y'(-d\,\text{ημ}\theta + e\,\text{συν}\theta) + f = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Σημασία στο συλλογισμό μας έχει ο μεικτός όρος

$$\begin{aligned}
&x'y'\,(-2a\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta + 2b\,\text{συν}^2\theta - 2b\,\text{ημ}^2\theta + 2c\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta) = \\
&= x'y'(2b\,\text{συν}2\theta - (a-c)\text{ημ}2\theta),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\begin{aligned}
\text{συν}2\theta &= \text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta \\
\text{ημ}2\theta &= 2\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν η θ επιλύει την εξίσωση

$$2b\,\text{συν}2\theta - (a-c)\text{ημ}2\theta = 0, \tag{2.4.6}$$

ο $x'y'$ όρος στην (2.4.5) εξαφανίζεται. Ειδικότερα,

- Αν $a \neq c$ η (2.4.6) γίνεται

  $$\text{σφ}2\theta = \frac{\text{συν}2\theta}{\text{ημ}2\theta} = \frac{a-c}{2b}, \tag{2.4.7}$$

  η οποία πάντα επιλύεται.

- Αν $a = c$ η (2.4.6) ικανοποιείται για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

- Αν $b = 0$ τότε $\theta = 0$ ικανοποιεί την (2.4.6). Δηλαδή αφού εξαρχής η (2.4.1) δεν έχει μεικτό όρο xy, δεν χρειάζεται να γίνει στροφή των αξόνων.

Συμπέρασμα: Μετά από στροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία που ικανοποιεί την (2.4.6), η εξίσωση παίρνει πάντα τη μορφή

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0, \tag{2.4.8}$$

και μάλιστα ο σταθερός όρος f δεν αλλάζει.

2.4.2 Μεταφορά του συστήματος

Ας δούμε τώρα πώς επηρεάζει μια μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων κατά διάνυσμα (ξ, η). Δηλαδή θεωρούμε το σημείο O' με συντεταγμένες (ξ, η) ως προς το σύστημα $(O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$, και παίρνουμε το νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$.

Συγκεκριμένα, οι συντεταγμένες (x', y') ενός σημείου ως προς το σύστημα $(O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ σχετίζονται με τις συντεταγμένες του, (X, Y), ως προς το $(O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} x' &= X + \xi \\ y' &= Y + \eta. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4.8), έχουμε:

$$\begin{aligned} &a'(X+\xi)^2 + c'(Y+\eta)^2 + d'(X+\xi) + e'(Y+\eta) + f = 0, \\ \iff &a'X^2 + c'Y^2 + (2a'\xi + d')X + (2c'\eta + e')Y + (a'\xi^2 + c'\eta^2 + d'\xi + e'\eta + f) = 0. \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Από τα παραπάνω, βλέπουμε ότι ενδέχεται με κατάλληλη επιλογή των ξ, η να γίνουν οι συντελεστές των X, Y ή ο σταθερός όρος, μηδέν.

- Αν το γινόμενο $a'c' \neq 0$, θέτοντας $\xi = -d'/2a'$ και $\eta = -e'/2c'$ οι συντελεστές των X και Y γίνονται μηδέν. Μπορούμε δηλαδή να απαλείψουμε τους πρωτοβάθμιους όρους με κατάλληλη μεταφορα, ώστε η εξίσωση να πάρει τη μορφή

  $$a'X^2 + c'Y^2 + \mu = 0, \tag{2.4.11}$$

  για κάποιο $\mu \in \mathbb{R}$.

  Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος (X, Y) που ικανοποιεί την (2.4.11) το ζεύγος $(-X, -Y)$ επίσης την ικανοποιεί, και επομένως η καμπύλη έχει **κέντρο συμμετρίας**.

- Αν το γινόμενο $a'c' = 0$, κάποιο από τα a', c' είναι μη μηδενικό, αφού διαφορετικά η εξίσωση δεν είναι δεύτερου βαθμού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $c' \neq 0$ και $a' = 0$.

  Τότε, θέτοντας $\eta = \frac{e'}{2c'}$ μπορούμε να διώξουμε τον πρωτοβάθμιο όρο $(2c'\eta + e')Y$ από την εξίσωση (2.4.10). Η εξίσωση τότε γίνεται

  $$c'Y^2 + d'X + \left(-\frac{(e')^2}{4c'} + d'\xi + f\right) = 0.$$

  – Αν $d' \neq 0$, μπορούμε να βρούμε ξ ώστε

  $$-\frac{(e')^2}{4c'} + d'\xi + f = 0,$$

και άρα η εξίσωση (2.4.10) παίρνει τη μορφή

$$c'Y^2 + \kappa X = 0, \tag{2.4.12}$$

για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$.

– Αν $d' = 0$ τότε έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$$c'Y^2 + \lambda = 0, \tag{2.4.13}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Συμπέρασμα: Μετά από κατάλληλη στροφή και μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων η αρχική εξίσωση (2.4.1) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις

- $a'X^2 + c'Y^2 + \mu = 0$, για καποια $a', c', \mu \in \mathbb{R}$, με $a'c' \neq 0$. Άρα η καμπύλη είναι ένα από τα παρακάτω:

  – **Κύκλος:** αν $a' = c'$, $\mu \neq 0$, μ ετερόσημο των a', c'. Για παράδειγμα

  $$2X^2 + 2Y^2 - 4 = 0.$$

  – **Έλλειψη:** αν $a' \neq c'$, $a'c' > 0$ και $\mu \neq 0$ ετερόσημο των a', c'. Για παράδειγμα

  $$X^2 + 3Y^2 - 2 = 0.$$

  – **Φανταστική έλλειψη:** αν $a'c' > 0$ και $\mu \neq 0$ ομόσημο των $a'c'$. Για παράδειγμα

  $$X^2 + 3Y^2 + 1 = 0.$$

  – **Φανταστικές ευθείες τεμνόμενες σε πραγματικό σημείο:** αν $a'c' > 0$ και $\mu = 0$. Για παράδειγμα:

  $$X^2 + 4Y^2 = 0,$$

  αφού μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την εξίσωση ως

  $$(X - 2iY)(X + 2iY) = 0$$

  που ικανοποιείται για $X = 4iY$ ή $X = -4iY$.

  – **Υπερβολή:** αν $a'c' < 0$ και $\mu \neq 0$. Για παράδειγμα

  $$2X^2 - 3Y^2 - 2 = 0.$$

– **Πραγματικές ευθείες τεμνόμενες σε σημείο:** αν $a'c' < 0$ και $\mu = 0$. Για παράδειγμα
$$X^2 - 4Y^2 = 0,$$
η οποία παραγοντοποιείται σε
$$(X - 2Y)(X + 2Y) = 0,$$
και επομένως ικανοποιείται για (X, Y) πάνω στις ευθείες $X = 2Y$ ή $X = -2Y$, που τέμνονται στο $(0, 0)$.

• $c'Y^2 + \kappa X = 0$ ή $a'X^2 + \kappa Y = 0$, όπου $\kappa \neq 0$. Τότε η καμπύλη είναι **παραβολή**.

• $c'Y^2 + \lambda = 0$, για $c' \neq 0$ ή $a'X^2 + \lambda = 0$ για $a' \neq 0$. Τότε η καμπύλη είναι

– **Ζεύγος παράλληλων ευθειών:** αν $\lambda \neq 0$. Για παράδειγμα
$$Y^2 = 2.$$

– **Ζεύγος συμπιπτουσών ευθειών:** αν $\lambda = 0$. Δηλαδή όταν
$$Y^2 = 0$$
ή
$$X^2 = 0.$$

– **Ζεύγος "παράλληλων" φανταστικών ευθειών:** αν $\lambda < 0$. Για παράδειγμα
$$Y^2 = -1$$
ή
$$X^2 = -1.$$

2.4.3 Παραδείγματα

1. Να βρεθεί τι καμπύλη αναπαριστά η εξίσωση
$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 6\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 2 = 0. \tag{2.4.14}$$
Απάντηση: Η παραπάνω εξίσωση, σε αντιστοιχία με τη θεωρία που αναπτύξαμε σε αυτήν την παράγραφο, έχει
$$a = 5,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 6\sqrt{2},\ e = -10\sqrt{2},\ f = 2.$$

Πρώτα βρίσκουμε θ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$\begin{aligned} 2b\,\text{συν}2\theta &= (a-c)\text{ημ}2\theta \\ \iff 6\,\text{συν}2\theta &= 0, \end{aligned}$$

Η γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Συνεχίζουμε με στροφή του συστήματος κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} x' &= x\,\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= x\,\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

στην εξίσωση (2.4.14), η οποία μετασχηματίζεται τελικά στην

$$8(x')^2 + 2(y')^2 - 16x' - 4y' + 2 = 0. \tag{2.4.15}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε μεταφορα του συστήματος κατα διάνυσμα (ξ, η), θέτουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} x' &= X + \xi, \\ y' &= Y + \eta, \end{aligned}$$

στην (2.4.15) ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned} 8(X+\xi)^2 + 2(Y+\eta)^2 - 16(X+\xi) - 4(Y+\eta) + 2 &= 0, \\ \iff 8X^2 + 2Y^2 - 16(\xi+1)X - 4(\xi+1)Y + 8\xi^2 + 16\xi + 2\eta^2 + 4\eta + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν οτι φεύγουν και οι δυο πρωτοβάθμιοι όροι της εξίσωσης, αν επιλέξουμε $\xi = \eta = -1$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 8X^2 + 2Y^2 - 8 &= 0 \\ \iff X^2 + \frac{Y^2}{4} &= 1, \end{aligned}$$

η οποία όπως έχουμε δει περιγράφει **έλλειψη**.

2. Να βρείτε τι καμπύλη περιγράφει η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y + 6 = 0. \tag{2.4.16}$$

Απάντηση: Από την εξίσωση (2.4.16) προσδιορίζουμε

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ d = 2\sqrt{2},\ e = 5\sqrt{2},\ f = 6. \tag{2.4.17}$$

Επόμενως η κατάλληλη γωνία στροφής θ προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} &2b\,\text{συν}2\theta = (a-c)\,\text{ημ}2\theta \\ \iff &-2\,\text{συν}2\theta = 0. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Μια λύση της (2.4.18) είναι η $\theta = \frac{\pi}{4}$, και επομένως αφού $\text{συν}\frac{\pi}{4} = \text{ημ}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ θα κάνουμε την ακόλουθη αλλάγη συστήματος συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x' &= x\,\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= x\,\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην εξίσωση (2.4.16) και κάνοντας υπολογισμούς παίρνουμε τελικά

$$2(y')^2 - 8y' - 2x' + 6 = 0. \tag{2.4.19}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι (2.4.19) δεν έχει δευτεροβάθμιο όρο $(x')^2$ (ο όρος $x'y'$ έχει φύγει λόγω της στροφής του συστήματος συντεταγμένων). Αντιστοιχεί λοιπόν στην περίπτωση $a'c' = 0$ της γενικής θεωρίας, και επομένως δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Συνεπώς, η εξίσωση (2.4.16) **δεν περιγράφει:** κύκλο, έλλειψη, υπερβολή, φανταστική έλλειψη, ζεύγος τεμνόμενων ευθειών και ζεύγος φανταστικών ευθειών. Περιγράφει ίσως **παραβολή** ή **ζεύγος ταυτιζόμενων** ή **παράλληλων ευθειών** ή **ζεύγος "παράλληλων" φανταστικών ευθειών**.

Σε αυτό το στάδιο, μπορούμε να προχωρήσουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, θέτοντας $x' = X + \xi, y' = Y + \eta$ σκοπεύοντας να προσδιορίσουμε τα ξ, η ώστε να απλοποιηθεί η εξίσωση.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνων. Συγκεκριμένα, η (2.4.19) γίνεται

$$\begin{aligned} &2[(y')^2 - 4y' + 4] - 8 - 2x' + 6 = 0 \\ \iff &2(y'-2)^2 - 2x' - 14 = 0 \\ \iff &2(y'-2)^2 - 2(x'+7) = 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας λοιπόν $X = x' + 7$ και $Y = y' - 2$ (που αντιστοιχεί σε μεταφορά του συστήματος $Ox'y'$ κατά το διάνυσμα $(\xi, \eta) = (-7, 2)$) παιρνουμε την εξίσωση

$$Y^2 = X, \tag{2.4.20}$$

που περιγράφει **παραβολή**.

2.4.4 Μελέτη γενικής δευτεροβάθμιας καμπύλης μέσω αναλλοίωτων

Σημείο αφετηρίας είναι πάλι η γενική δευτεροβάθμια καμπύλη

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \tag{2.4.21}$$

Σημείωση 2.4.1. Η γενική μορφή της εξίσωσης (2.4.21) διαφέρει σε σχέση με αυτή που παρουσιάστηκε στο μαθημα (και σε προηγούμενη έκδοση αυτών των σημειώσεων), δηλαδή

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{2.4.22}$$

ως προς την παρουσία του παράγοντα 2 στους πρωτοβάθμιους όρους. Η (2.4.21) είναι η σωστή μορφή ώστε οι ποσότητες που είδαμε στο μάθημα (και θα δούμε παρακάτω στις σημειώσεις) να είναι πράγματι αναλλοίωτες κάτω από στροφή και μεταφορά των αξόνων. Στην παράγραφο αυτή έχουν γίνει οι απαραίτητες αλλαγές: οι τύποι για τις αναλλοίωτες είναι οι ίδιοι, μόνο ο ορισμός των d, e από την εξίσωση αλλάζει (δείτε την τελευταία παράγραφο με τα παραδείγματα)

Παρατηρούμε τις παρακάτω σχέσεις πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2, \tag{2.4.23}$$

$$\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey. \tag{2.4.24}$$

Συνεπώς, θέτοντας

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

και

$$D = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix},$$

η (2.4.21) γράφεται

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \tag{2.4.25}$$

Έχουμε επίσης τη σχέση

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \tag{2.4.26}$$

συνεπώς ένας εναλλακτικός τρόπος να γραφτεί η εξίσωση (2.4.21) είναι:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{2.4.27}$$

Παρακάτω θα δούμε πώς επηρεάζουν οι μετασχηματισμοί στροφής και μεταφοράς του συστήματος συντεταγμένων την εξίσωση (2.4.25).

Επίδραση στροφής του συστήματος συντεταγμένων

Έστω ο πίνακας στροφής

$$P = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}. \tag{2.4.28}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ -\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}. \tag{2.4.29}$$

Όπως έχουμε δει, μετά από στροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία θ οι νέες συντετεγμένες (x', y') ενός σημείου με συνταγμένες (x, y) σχετίζονται μέσω του P:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \tag{2.4.30}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4.25) έχουμε λοιπόν

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T Q P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0 \tag{2.4.31}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^{-1} Q P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0 \tag{2.4.32}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0, \tag{2.4.33}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$Q' = P^{-1} Q P. \tag{2.4.34}$$

Επομένως:

- Η αρχική εξίσωση (2.4.25) μετασχηματίστηκε σε μία ίδιας μορφής, την (2.4.33)
- Ο πίνακας Q' είναι **όμοιος** με τον Q, λόγω της εξίσωσης (2.4.34).

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν η γωνία θ ικανοποιεί την

$$2b\text{συν}2\theta = (a - c)\text{ημ}2\theta,$$

τότε η νέα εξίσωση δεν έχει μεικτό όρο $x'y'$. Επομένως, με αυτή την επιλογή της γωνίας θ στον ορισμό του P, η σχέση (2.4.23) μας δίνει ότι ο πίνακας Q' έχει τη μορφή

$$Q' = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix}. \tag{2.4.35}$$

Δηλαδή ο Q' είναι διαγώνιος, και a', c' είναι οι ιδιοτιμές του.

Παρατήρηση 2.4.1. Γενικά, κάθε συμμετρικός $n \times n$ πίνακας Q είναι διαγωνίσιμος και μάλιστα υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ από ιδιοδιανύσματα του Q. Κατά συνέπεια, για κάθε συμμετρικό πίνακα Q υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P ώστε ο $P^{-1}QP$ να είναι διαγώνιος.

Επίδραση μεταφοράς του συστήματος συντεταγμένων

Μεταφέρουμε τώρα το σύστημα συντεταγμένων κατά ένα διάνυσμα (ξ, η), το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε σαν διάνυσμα στήλη ως

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν, ως προς τις νέες συντεταγμένες X, Y:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + \xi \\ Y + \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{2.4.36}$$

και επομένως η εξίσωση (2.4.33) μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \right) Q' \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right) + 2DP \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right) + f = 0, \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &\qquad + f + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση: Να δείξετε ότι αν ο πίνακας Q' είναι συμμετρικός τότε

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{2.4.37}$$

Εφαρμόζοντας την άσκηση στα παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' + DP\right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ + \left(f + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

όπου

- Ο πρώτος όρος είναι δευτέρου βαθμού, με πίνακα συντελεστών Q'. Μάλιστα, λόγω της (2.4.35), αυτός ο όρος είναι

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = a'X^2 + c'Y^2. \tag{2.4.39}$$

- Ο δεύτερος όρος είναι πρώτου βαθμού. Έστω ότι d', e' είναι τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' + DP. \tag{2.4.40}$$

  Έχουμε τότε

$$2\left(\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' + DP\right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 2d'X + 2e'Y. \tag{2.4.41}$$

- Ο τρίτος είναι ο σταθερός όρος

$$f' = f + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{2.4.42}$$

Εναλλακτικά λοιπόν, η εξίσωση (2.4.38) γράφεται

$$a'X^2 + c'Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f' = 0. \tag{2.4.43}$$

Αναλλοίωτες καμπύλης

Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα (μάλιστα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές). Επομένως, αφού Q' και Q είναι όμοιοι (δείτε την (2.4.34)), έχουμε τις εξής ισότητες

$$ac - b^2 = \mathrm{det}Q = \mathrm{det}Q' = a'c' \tag{2.4.44}$$
$$a + c = \mathrm{tr}Q = \mathrm{tr}Q' = a' + c', \tag{2.4.45}$$

Συνεπώς, τα $\mathrm{det}Q', \mathrm{tr}Q'$ που αφορούν στην εξίσωση (2.4.38) μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από την αρχική εξίσωση (2.4.21) μεσω του πίνακα Q.

Ορίζουμε λοιπόν τις ποσότητες

$$J_1 = \mathrm{tr}Q = a + c \tag{2.4.46}$$
$$J_2 = \mathrm{det}Q = ac - b^2, \tag{2.4.47}$$

οι οποίες είδαμε ότι μένουν αναλλοίωτες κατά την στροφή του συστήματος συντεταγμένων. Δηλαδή

$$\begin{aligned} J_1 &= a + c = a' + c' \\ J_2 &= ac - b^2 = a'c'. \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει, αλλά δεν θα το αποδείξουμε, ότι και η ποσότητα

$$J_3 = \mathrm{det}\left(\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) \tag{2.4.48}$$

μένει αναλλοίωτη κατώ από τους ίδιους μετασχηματισμούς. Δηλαδή, αν a', c', d', e', f' είναι όπως παραπάνω,

$$J_3 = \mathrm{det}\left(\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = \mathrm{det}\left(\begin{bmatrix} a' & 0 & d' \\ 0 & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}\right). \tag{2.4.49}$$

Παρατήρηση 2.4.2. Αφού η εξίσωση (2.4.21) είναι δευτέρου βαθμού ο πίνακας Q είναι διάφορος του μηδενός. Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι $J_1 = J_2 = 0$, αφού ένας **συμμετρικός** 2×2 πινακας με ίχνος και ορίζουσα μηδέν πρέπει να είναι μηδενικός (Άσκηση)

Επιπλέον, αφού $J_1 = a' + c'$ και $J_2 = a'c'$, βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε $a' = c' = 0$.

Καμπύλες με κέντρο συμμετρίας

Τώρα, μας απασχολεί το εξής ερώτημα: πότε υπάρχουν **μοναδικά** ξ, η ώστε μετά τη στροφή και τη μεταφορά κατά (ξ, η) η εξίσωση να πάρει τη μορφή

$$a'X^2 + c'Y^2 + f' = 0,$$

δηλαδή $d' = e' = 0$;

Από την (2.4.40), επιθυμούμε η εξίσωση ως προς ξ, η

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' = -DP$$

να έχει **μοναδική** λύση.

Ισοδύναμα, θέλουμε ο πίνακας Q' να είναι αντιστρέψιμος, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν

$$J_2 = \det Q = \det Q' \neq 0. \tag{2.4.50}$$

Συμπέρασμα

- Αν $J_2 = a'c' \neq 0$, εξίσωση (2.4.38) είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \left(f + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right) = 0, \\ \iff \quad & a'X^2 + c'Y^2 + f' = 0, \end{aligned}$$

  όπου τα a', c' είναι διάφορα του μηδενός και

$$Q' = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix},$$

$$f' = f + \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} Q' \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2DP \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

  Επομένως, η καμπύλη έχει κέντρο συμμετρίας και άρα είναι μία από τις παρακάτω: *κύκλος, έλλειψη, φανταστική έλλειψη, φανταστικές ευθείες τεμνόμενες σε πραγματικό σημείο, υπερβολή, ζεύγος ευθειών τεμνόμενων σε σημείο*.

- Αν $J_2 = a'c' = 0$ τότε **ακριβώς ένα** από τα a', c' είναι μηδέν, έστω ότι $a' = 0$. Η εξίσωση τότε (2.4.43) γίνεται

$$c'Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f',$$

  και θα δούμε ότι η καμπύλη είναι μία από τις εξής: *παραβολή, ζεύγος παράλληλων ευθειών, ζεύγος συμπιπτουσών ευθειών*.

Η περίπτωση $J_2 > 0$

Αν η αρχική δευτεροβάθμια εξίσωση ικανοποιεί $J_2 \neq 0$ τότε είδαμε ότι με κατάλληλη στροφή και μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$a'X^2 + c'Y^2 + f' = 0. \tag{2.4.51}$$

Επιπλέον, το J_2 μένει αναλλοίωτο και άρα τα a', c' είναι ομόσημα, αφού

$$J_2 = a'c' > 0.$$

Το πρόσημο των a', c' είναι τώρα σε θέση να μας το καθορίσει η αναλλοίωτη $J_1 = a' + c'$:

$$J_1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a' > 0 \text{ και } c' > 0,$$

$$J_1 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a' < 0 \text{ και } c' < 0.$$

Τέλος, η αναλλοίωτη J_3 έχει το ίδιο πρόσημο με τον σταθερό όρο f', αφού $J_2 > 0$ και

$$J_3 = \det\left(\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}\right) = a'c'f' = J_2 f'.$$

Έχουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

- a', c', f' ομόσημα, δηλαδή $J_1 J_3 > 0$: Τότε, η (2.4.51) δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί για κανένα ζεύγος (X, Y), όπως για παράδειγμα η

  $$X^2 + Y^2 = -1.$$

  Μια εξίσωση αυτής της μορφής λέμε ότι περιγράφει **φανταστική έλλειψη**.

- a', c' έχουν αντίθετο πρόσημο από το f', δηλαδή $J_1 J_3 < 0$: η εξίσωση τότε περιγράφει **κύκλο** ή **έλλειψη**, όπως για παράδειγμα η

  $$X^2 + Y^2 - 1 = 0,$$

  που περιγράδει κύκλο ακτίνας 1.

- $f' = 0$, ισοδύναμα $J_3 = 0$ (αφού τα a', c' είναι διαφορετικά του μηδενός επειδή υποθέτουμε ότι $J_2 > 0$) : Η εξίσωση τότε γίνεται

  $$a'X^2 + c'Y^2 = 0,$$

  που ικανοποιείται μόνο για $X = Y = 0$ (αφού a', c' είναι ομόσημα) Λέμε τότε ότι περιγράφει **δύο φανταστικές ευθείες τεμνόμενες σε πραγματικό σημείο**.

Η περίπτωση $J_2 < 0$

Η αρχική δευτεροβάθμια εξίσωση τότε μετασχηματίζεται σε μία της μορφής

$$a'X^2 + c'Y^2 + f' = 0,$$

όπου τώρα τα a', c' είναι **ετερόσημα**, αφού $J_2 = a'c' < 0$.

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $f' \neq 0$, ισοδύναμα $J_3 = J_2 \cdot f' \neq 0$, όπως για παράδειγμα η $X^2 - Y^2 + 1 = 0$. Η εξίσωση περιγράφει τότε **υπερβολή**.

- $f' = 0$, ισοδύναμα $J_3 = 0$. Η εξίσωση τότε γίνεται

  $$|a'|X^2 - |c'|Y^2 = 0,$$

  η οποία μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

  $$(\sqrt{|a'|}X - \sqrt{|c'|}Y)(\sqrt{|a'|}X + \sqrt{|c'|}Y) = 0,$$

  και άρα περιγράφει δύο ευθείες τεμνόμενες στο σημείο $(X, Y) = (0, 0)$. Συγκεκριμένα, οι ευθείες στο συστημα συντεταγμένων X, Y είναι οι

  $$\begin{aligned} \varepsilon_1 &: \sqrt{|a'|}X - \sqrt{|c'|}Y = 0, \\ \varepsilon_2 &: \sqrt{|a'|}X + \sqrt{|c'|}Y = 0. \end{aligned}$$

Η περίπτωση $J_2 = 0$

Τότε, μετά από κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων η εξίσωση παίρνει μια από τις ακόλουθες μορφές

$$a'(x')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0, \quad a' \neq 0 \tag{2.4.52}$$

$$\text{ή} \quad c'(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0, \quad c' \neq 0. \tag{2.4.53}$$

Έστω ότι εχουμε την περίπτωση (2.4.52), αφού η περίπτωση (2.4.53) αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο, η (2.4.52) γίνεται

$$\begin{aligned} & a'\left((x')^2 + 2\frac{d'}{a'}x' + \left(\frac{d'}{a'}\right)^2\right) - \frac{(d')^2}{a'} + 2e'y' + f' = 0 \\ \iff \quad & a'\left(x' + \frac{d'}{a'}\right)^2 + 2e'y' + f - \frac{(d')^2}{a'} = 0 \\ \iff \quad & a'X^2 + 2e'y' + \mu = 0, \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει
$$\mu = f - \frac{(d')^2}{a'}$$
και
$$X = x' + \frac{d'}{a'}.$$

Από την τελική αυτή μορφή βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} J_1 &= a', \\ J_2 &= 0, \\ J_3 &= \det\left(\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & \mu \end{bmatrix}\right) = -a'(e')^2. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις

- $J_3 = 0$. Τότε, αφού $a' \neq 0$ αναγκαστικά έχουμε ότι $e' = 0$. Η εξίσωση επομένως έχει γίνει
$$X^2 = -\frac{\mu}{a'}.$$
Επομένως, η εξίσωση περιγράφει είτε **δύο ταυτιζόμενες ευθείες** (αν $\mu = 0$), είτε **δύο παράλληλες ευθείες** (αν $-\frac{\mu}{a'} > 0$), είτε **"παράλληλες" φανταστικές ευθείες** (αν $-\frac{\mu}{a'} < 0$)

- $J_3 \neq 0$. Τότε $e' \neq 0$, και η εξίσωση γράφεται
$$X^2 = -\frac{2e'}{a'}Y,$$
για $Y = y' + \frac{\mu}{2e'}$, και επομένως περιγράφει **παραβολή**.

2.4.5 Κριτήρια

Έχουμε λοιπόν καταλήξει στα παρακάτω κριτήρια για την αναγνώριση του είδους μιας δευτεροβάθμιας καμπύλης μέσω του υπολογισμού των αναλλοίωτων J_1, J_2, J_3.

1. $J_2 \neq 0$
   - $J_2 > 0$
     - $J_1 J_3 < 0$: **κύκλος** ή **έλλειψη**
     - $J_1 J_3 > 0$: **φανταστική έλλειψη**

    - $J_3 = 0$: **δυο φαναστικές ευθείες τεμνόμενες σε πραγματικό σημείο**

  - $J_2 < 0$
    - $J_3 \neq 0$: **υπερβολή**
    - $J_3 = 0$: **δύο πραγματικές ευθείες τεμνόμενες σε σημείο**

2. $J_2 = 0$
   - $J_3 \neq 0$: **παραβολή**
   - $J_3 = 0$: **δυο ταυτιζόμενες ευθείες**, **δύο παράλληλες ευθείες** ή **δύο παράλληλες φανταστικές ευθείες**

2.4.6 Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το είδος καμπύλης που περιγράφει η εξίσωση, με την μέθοδο των αναλλοίωτων.
$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 6\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 2 = 0.$$
Απάντηση: Από την εξίσωση παίρνουμε
$$a = 5,\ b = 3,\ c = 5,\ d = -3\sqrt{2},\ e = -5\sqrt{2},\ f = 2.$$
Επομένως οι αναλλοίωτες J_1, J_2, J_3 υπολογίζονται ως
$$\begin{aligned}
J_1 &= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = a + c = 10, \\
J_2 &= \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = ac - b^2 = 25 - 9 = 16, \\
J_3 &= \det\left(\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -3\sqrt{2} \\ 3 & 5 & -5\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}\right) = -128.
\end{aligned}$$
Τώρα έχουμε $J_2 = 16 > 0$, επομένως η καμπύλη είναι κύκλος, έλλειψη, φανταστική έλλειψη ή ζεύγος φανταστικών ευθειών τεμνομένων σε πραγματικό σημείο. Αφού όμως $J_1 J_3 = 10 \cdot (-128) < 0$, βλέπουμε ότι η καμπύλη είναι τελικά κύκλος ή έλλειψη.

Άν ήταν όμως κύκλος, από την Πρόταση 12 η εξίσωση δεν θα είχε τον μεικτό όρο $6xy$. Επομένως, είναι γνήσια έλλειψη.

2. Να βρεθεί το είδος των καμπύλων που περιγράφει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:
$$\begin{aligned}&\text{(a)}: \quad x^2-4y^2+4y-2=0,\\ &\text{(b)}: \quad x^2-4y^2+4y-1=0.\end{aligned}$$
Απάντηση:
Για την εξίσωση (a): Έχουμε
$$a=1,\ b=0,\ c=-4,\ d=0,\ e=2,\ f=-2,$$
επομένως,
$$\begin{aligned}J_1&=a+c=1-4=-3,\\ J_2&=ac-b^2=-4,\\ J_3&=\det\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\right)=4.\end{aligned}$$
Επειδή $J_2<0$ και $J_3\neq 0$, έχουμε ότι η καμπύλη είναι μια υπερβολή.

Για την εξίσωση (b): Έχουμε
$$a=1,\ b=0,\ c=-4,\ d=0,\ e=2,\ f=-1,$$
επομένως
$$\begin{aligned}J_1&=a+c=-3,\\ J_2&=ac-b^2=-4,\\ J_3&=\det\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{bmatrix}\right)=0.\end{aligned}$$
Επειδή $J_2<0$ και $J_3=0$ βλέπουμε ότι η καμπύλη είναι ζεύγος παράλληλων ή ταυτιζομένων ευθειών, ή ζεύγος "παράλληλων" φανταστικών ευθειών.

3. Να βρεθεί το είδος καμπύλης που περιγράφει η εξίσωση
$$4x^2+2y^2-4xy-1=0. \tag{2.4.54}$$
Απάντηση:
$$a=4,\ b=-2,\ c=2,\ d=0,\ e=0, f=-1$$

Άρα,

$$\begin{aligned} J_1 &= a + c = 6, \\ J_2 &= ac - b^2 = 8 - (-2)^2 = 4, \\ J_3 &= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= -8 + 4 = -4. \end{aligned}$$

Αφού $J_2 > 0$ και $J_1 J_3 = -24 < 0$, βλέπουμε ότι η εξίσωση περιγράφει μια έλλειψη.

4. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$4x^2 + 2y^2 - 4xy = 0; \tag{2.4.55}$$

Απάντηση: Μια προφανής λύση είναι η $x = y = 0$. Για να δούμε αν υπάρχουν και άλλες λύσεις κάνουμε μελέτη της εξίσωσης μέσω αναλλοίωτων:

$$a = 4,\ b = -2,\ c = 2,\ d = e = f = 0.$$

$$\begin{aligned} J_1 &= a + c = 6, \\ J_2 &= ac - b^2 = 4, \\ J_3 &= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0. \end{aligned}$$

Αφού $J_2 > 0$ και $J_3 = 0$ η καμπύλη είναι ζεύγος φανταστικών ευθειών που τέμνονται σε ένα πραγματικό σημείο.

Η εξίσωση επομένως έχει μόνο μία λύση, την προφρανή $x = y = 0$.