

Μάθημα 1

1) Σχέση ισοδυναμίας

Έστω ένα σύνολο X .

Μια σχέση στο Q είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq X \times X$.

Αν $(x_1, x_2) \in R$, λέμε ότι x_1 σχετίζεται με το x_2 (μέσω της R) και γράφουμε $x_1 \sim x_2$.

Μια σχέση καλείται σχέση ισοδυναμίας αν:

(i) για κάθε $x \in X$ είναι $x \sim x$, (δηλαδή $(x, x) \in R$)

(ii) αν $(x, y) \in R$ και $x \sim y$, τότε $y \sim x$

(iii) αν $(x, y, z) \in R$ με $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z$

Παραδείγματα:

(i) $X = \{\text{σημεία του επιπέδου}\}$, $0 \in X$. Ορίζω μια σχέση στο X , ως εξής: Αν $P, Q \in X$ λέω ότι $P \sim Q \Leftrightarrow \tauα R, Q$ ισαπέχουν από το $0 \rightarrow [d(P, 0) = d(Q, 0)]$. Η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

(ii) $X = \mathbb{N}$.

Ορίζω μια σχέση στο X ως εξής:

Αν $\alpha, \beta \in X$ λέω ότι $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$

οι αριθμοί α και β έχουν το ίδιο ψηφίο μονάδων στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα (π.χ. $106 \sim 76$).

Ορισμός:

Αν \sim είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X , τότε για κάθε $x \in X$ ορίζω την κλάση ισοδυναμίας του $[x]$, ως εξής:

$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subseteq X$.

Ιδιότητες:

(i) $[x] \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$ (καθώς $x \in X$ μιας και $x \sim x$)

(ii) Αν $x, y \in X$, τότε $[x] = [y]$ ή $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Απόδειξη: Αν $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ επιλέγω $z \in [x] \cap [y]$. Θα δείξω ότι $[x] = [y]$ δηλαδή ότι $[x] \subseteq [y]$ και $[y] \subseteq [x]$. Για παράδειγμα θα δείξω ότι $[x] \subseteq [y]$.

Έστω $w \in [x]$. Τότε, $w \sim x$. Όμως, $z \in [x]$ και άρα $x \sim z$. Συνεπώς, $w \sim z$. Όμως, $z \in [y]$ και άρα $z \sim y$. Συνεπώς, $w \sim y \Rightarrow w \in [y]$.

(iii) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$. Αυτό ισχύει γιατί κάθε $x \in X$ είναι $x \in [x] \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$.

Άρα, $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ (για κάθε $x \in X$ ορίζεται το $[x] = X$).

Ορισμός:

Μια διαμέριση του X είναι μια συλλογή F υποσυνόλων, τέτοια ώστε:

(i) αν $Y \in F$ τότε $Y \neq \emptyset$

(ii) αν $Y, Y' \in F$ τότε $Y = Y'$ ή $Y \cap Y' = \emptyset$

(iii) $X = \bigcup_{Y \in F} Y$

Παραδείγματα:

(i) $X = \{\text{σημεία του επιπέδου}\}$. $0 \in X$. Ορίζω $P \sim Q \Leftrightarrow d(P, 0) = d(Q, 0)$.

Αν $P \in X$ τότε $[P] = \{\text{σημεία του κύκλου με κέντρο και ακτίνα } d(P, 0)\}$

(ii) $X = \mathbb{N}$, $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ το ίδιο τελευταίο ψηφίο. Εδώ, αν $\alpha \in X$ τότε $[\alpha] = \{\alpha + 10n, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$

Ορισμός:

Αν \sim είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X , το σύνολο πηλίκου X/\sim είναι ακριβώς το σύνολο των

κλάσεων ισοδυναμίας. Με άλλα λόγια $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$

Παραδείγματα:

(i) $X/\sim = \{c_r : r \geq 0\}$

(ii) $X/\sim = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]\}$

όπου για παράδειγμα $[2] = \{2, 12, 22, 32, \dots\}$

2) Συναρτήσεις:

Ορισμός:

Αν, X, Y είναι σύνολα, τότε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι ένα υποσύνολο $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ που είναι τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$ με $(x, y) \in \Gamma_f$ και γράφω $y = f(x)$

Ορισμός:

Αν, X, Y, Z είναι σύνολα, και $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι απεικονίσεις, μπορώ να ορίσω τη σύνθεση $g \circ f : X \rightarrow Z$. Θέτοντας $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ για κάθε $x \in X$.

- Η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται 1-1 ανν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Η συνάρτηση f είναι επί ανν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$.

Παραδείγματα:

(i) Αν οι $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι 1-1, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης 1-1.

Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και άρα $g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$, δηλαδή $g \circ [f(x_1)] \neq g \circ [f(x_2)]$, η $g \circ f$ είναι 1-1.

(ii) Αν οι $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης επί.

Αν $z \in Z$ τότε υπάρχει $y \in Y$ με $z = g(y)$. Επίσης, υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$. Συνεπώς, $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$, η $g \circ f$ είναι επί.

(iii) Αν $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι συναρτήσεις και η $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι 1-1, τότε η f είναι επίσης 1-1.

Απόδειξη του (iii):

Έστω ότι $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ τότε $(g \circ f)(x_1) = g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = (g \circ f)(x_2) \in Z$. Αυτό είναι άτοπο μιας και η $g \circ f$ είναι 1-1. Θα πρέπει λοιπόν να είναι $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ η f είναι 1-1.

(iv) Αν $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι απεικονίσεις και η $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι επί, τότε η g είναι επίσης επί.

Απόδειξη του (iv):

Θεωρώ $z \in Z$. Καθώς η $g \circ f$ είναι επί, υπάρχει $x \in X$ με $z = (g \circ f)(x)$, δηλαδή $z = g[f(x)]$, όπου $f(x) \in Y$. Άρα, η g είναι επί.

Ορισμός:

Αν X είναι ένα σύνολο, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X : X \rightarrow X$ είναι η απεικόνιση με $Id_X(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση:

Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση:

(i) η f είναι 1-1 ανν υπάρχει $r : Y \rightarrow X$ με $r \circ f = Id_X$

(ii) η f είναι επί ανν υπάρχει απεικόνιση $s : Y \rightarrow X$ με $f \circ s = Id_Y$

(iii) η f είναι 1-1 και επί ανν υπάρχει $g : Y \rightarrow X$ με $f \circ g = Id_Y$ και $g \circ f = Id_X$ (στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση g είναι μοναδική και γράφουμε $g = f^{-1}$).

Απόδειξη:

(i) Αν υπάρχει $r : Y \rightarrow X$ με $r \circ f = Id_X$, τότε η f είναι $1 - 1$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι $1 - 1$. Θεωρώ ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και ορίζω μια απεικόνιση $r : Y \rightarrow X$ ως εξής:

Αν για το $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$, ορίζω $r(y) = x$. Αν για το $y \in Y$ δεν υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$, ορίζω $r(y) = x_0$.

Για κάθε $x \in X$ είναι $(r \circ f)(x) = r[f(x)] = x = Id_X(x)$.

(ii) Αν υπάρχει $s : Y \rightarrow X$ με $f \circ s = Id_Y$, τότε (καθώς η $f \circ s = Id_Y : Y \rightarrow Y$ είναι επί) και η f είναι επί.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $f : X \rightarrow Y$ είναι επί.

Ορίζω μια συνάρτηση $s : Y \rightarrow X$ ως εξής:

Για κάθε $y \in Y$ επιλέγω ένα $x \in X$ με $y = f(x)$ και ορίζω $s(y) := x$. Τότε για κάθε $y \in Y$ είναι $(f \circ s)(y) = f[s(y)] = y = Id_Y$, άρα $f \circ s = Id_Y$.

(iii) Αν υπάρχει $g : Y \rightarrow X$ με $f \circ g = Id_Y$ και $g \circ f = Id_X$, τότε η f είναι $1 - 1$ ($g \circ f : 1 - 1 \Rightarrow f : 1 - 1$) και επί ($f \circ g$ επί $\Rightarrow f$ επί).

Αντίστροφα, αν η f είναι $1 - 1$ και επί, τότε υπάρχουν $r, s : Y \rightarrow X$ με $r \circ f = Id_X$ και $f \circ s = Id_Y$. Όμως, για κάθε $y \in Y$ είναι $r(y) = r[Id_Y(y)] = r[(f \circ s)(y)] = r[f[s(y)]] = (r \circ f)[s(y)] = Id_X[s(y)] = s(y)$. Συνεπώς, $r = s$.

Ορισμός:

Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση.

(i) Αν $A \subseteq X$, τότε $f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } y = f(x)\} \subseteq Y$

(ii) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

Ιδιότητες:

(i) αν $A \subseteq X$ τότε $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι $1 - 1$.

Πράγματι, αν $a \in A$ τότε $f(a) \in f(A) \Rightarrow a f f^{-1}[f(A)] : A \subseteq f^{-1}[f(A)]$.

Αν η f είναι $1 - 1$ και $x \in f^{-1}[f(A)]$ τότε $f(x) \in f(A)$ και άρα $f(x) = f(a)$, για κάποιο $a \in A$.

Καθώς η f είναι $1 - 1$, έπεται ότι $x = a \in A$, $f^{-1}[f(a)] \subseteq A$.

(ii) Για κάθε $B \subseteq Y$ είναι $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι επί.

Μάθημα 2

Παρατήρηση

Έστω συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$. Αν $A \subseteq X$ ορίζεται η εικόνα $f(A) \subseteq Y$ ως εξής:

$f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } y = f(a)\}$.

Επίσης, αν $B \subseteq Y$ τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B) \subseteq X$, ως εξής:

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Έχουμε δει ότι για κάθε $A \subseteq X$ είναι $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ και μάλιστα, αν η f είναι $1 - 1$, τότε $A = f^{-1}[f(A)]$.

Για κάθε $B \subseteq Y$ είναι $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ και μάλιστα, αν η f είναι επί, ισχύει ότι $f[f^{-1}(B)] = B$.

Πράγματι, αν $y \in f(A)$ τότε υπάρχει $a \in f^{-1}(B)$ με $y = f(a)$.

Καθώς $a \in f^{-1}(B)$, είναι $f(a) \in B$. Συνεπώς, $y \in B$ $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$.

Υποθέτοντας τώρα ότι η f είναι επί, θεωρώ $y \in B$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$.

Για το $x \in X$ είναι $f(x) = y \in B$.

Συνεπώς, είναι $x \in f^{-1}(B)$ και άρα $y = f(x) \in f[f^{-1}(B)]$, $B \subseteq f[f^{-1}(B)]$.

Μαθηματική επαγωγή

$$\begin{cases} A \subseteq \mathbb{N} \\ 0 \in A \\ \text{αν } n \in A, \text{ τότε } n+1 \in A \end{cases} \rightarrow A = \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} B \subseteq \mathbb{N} \\ B \neq \emptyset \end{cases} \rightarrow \text{υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στο } B$$

Παραδείγματα:

(i) Θέλω να δείξω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{Έστω, } A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1\}$$

$$\text{Είναι } 0 \in A \text{ γιατί } 2^0 = 2^{0+1} - 1$$

$$\text{Επίσης αν υποθέσω ότι } n \in A, \text{ τότε είναι } 1+2+4+\dots+2^n = 2^{n+1}-1 \text{ και άρα } 1+2+4+\dots+2^{n+1} = (2^{n+1}-1) + 2^{n+1} = 2^{n+2}-1$$

Συνεπώς, $n+1 \in A$. Έτσι, είναι $A = \mathbb{N}$.

(ii) Θεωρώ το $X = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ο $p \in X$ λεγεται πρώτος αν δεν υπάρχουν $x, y \in X$ με $p = xy$. (π.χ ο αριθμός 7 είναι πρώτος, ο 12 δεν είναι καθώς $12 = 2 \cdot 6$). Κάθε αριθμός $x \in X$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Πράγματι, μπορώ να θεωρήσω το σύνολο

$$Y = \{n : \text{είναι φυσικός με } n \geq 2 \text{ ο οποίος δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών}\}.$$

Θέλω να δείξω ότι $Y = \emptyset$.

Ας υποθέσουμε ότι $Y \neq \emptyset$. Τότε το Y έχει ένα ελάχιστο στοιχείο n . Ο αριθμός n δε μπορεί να είναι πρώτος. Συνεπώς, μπορώ να γράψω $n = xy$ για κάποια $x, y \in X$. Καθώς είναι $x, y < n$, είναι $x, y \notin Y$. Συνεπώς μπορώ να γράψω τους x, y ως γινόμενα πρώτων. Τότε όμως, ο $n = xy$ είναι επίσης γινόμενο πρώτων, δηλαδή $n \notin Y$, ΑΤΟΠΟ.

Πίνακες

Ένας $n \times m$ πίνακας A είναι ένα παράταγμα $n \cdot m$ αριθμών (στοιχείων του \mathbb{R} ή του \mathbb{C}) ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Γράφω συμβολικά $A = (a_{ij})_{i,j}$. Αν $n = m$, ο πίνακας καλεεται τετραγωνικός.

$$\text{Πχ. ο } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ είναι ένας } 2 \times 3 \text{ πίνακας.}$$

$$\text{ο } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ είναι ένας τετραγωνικός } 2 \times 2 \text{ πίνακας.}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται άνω τριγωνικός αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλεεται κάτω τριγωνικός αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = a_{ij}$ λέγεται διαγώνιος αν $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ένας $1 \times m$ πίνακας $A = (a_{11}a_{12} \cdots a_{1m})$ καλείται πίνακας -γραμμή.

Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορεί να γραφτεί ως

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \text{ όπου } r_1, r_2, \dots, r_n \text{ είναι πίνακες -γραμμή διαστάσεων } 1 \times m \text{ και } (r_i : \eta \ i \text{ γραμμή του } A).$$

Ένας $n \times 1$ πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ καλείται πίνακας -στήλη.

Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορεί να γραφτεί ως

$A = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m) = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, όπου c_1, c_2, \dots, c_m είναι οι στήλες διαστάσεων $n \times 1$ του A

Ορισμός:

Θεωρώ έναν $n \times m$ πίνακα $A = (a_{ij})$. Ο ανάστροφος του A είναι ο $m \times n$ πίνακας $A^t = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = a_{ji}$.

Πχ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 2×3 πίνακας.

$$A^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ειδικότερα, ο ανάστροφος ενός πίνακα-γραμμή r με διάσταση $1 \times m$ είναι ο πίνακας -στήλη r^t με διάσταση $m \times 1$. Αντίστροφα, ο ανάστροφος ενός πίνακα -στήλη c είναι ο πίνακας -γραμμή c^* .

Παρατηρήσεις:

(i) Αν ο A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, τότε $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου r_1, r_2, \dots, r_n είναι οι γραμμές του A .

Τότε, $A^t = (r_1^t, r_2^t, \dots, r_n^t)$, δηλαδή οι στήλες του A^t είναι οι ανάστροφοι των γραμμών του A . Ομοίως μπορώ να γράψω $A = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m)$ όπου c_1, c_2, \dots, c_m είναι οι στήλες του A . Τότε,

$A^t = \begin{pmatrix} c_1^t \\ c_2^t \\ \vdots \\ c_m^t \end{pmatrix}$, δηλαδή οι γραμμές του A^t είναι οι ανάστροφοι των στηλών του A .

(ii) Για κάθε $n \times m$ πίνακα A , ο ανάστροφος του $m \times n$ πίνακα A^t είναι ο πίνακας A , δηλαδή $(A^t)^t = A$.

Αν $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ij})$ και $(A^t)^t = c_{ij}$, τότε:

$$c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}.$$

$$\text{Πχ. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Ορισμός

Ένας $n \times n$ πίνακας A καλείται συμμετρικός αν $A = A^t$.

Πχ. ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, ενώ ο $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι συμμετρικός, καθώς

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Ορισμός

Έστω $\mathbb{R}^{n \times m}$ το σύνολο των $n \times m$ πινάκων. Ορίζω δυο πράξεις $\mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, ως εξής:

$$\text{Αν } A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ και } B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{ τότε:}$$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ και}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots \\ \lambda a_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Πχ. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \text{ τότε } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ και}$$

$$7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Ιδιότητες

Οι πράξεις που ορίσαμε, για $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουν τις εξής ιδιότητες:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(ii) $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(iii) Ο πίνακας $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι έτοιμος ώστε $A + 0 = A$ (ουδέτερο στοιχείο)

(iv) αν $A = (a_{ij})$, τότε για τον πίνακα $-A = (-a_{ij})$ είναι $A + (-A) = 0$ (ύπαρξη αντιθέτου)

(v) $\lambda(A + B) = \lambda A + \mu A$ (επιμεριστική ιδιότητα)

(vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (επιμεριστική ιδιότητα)

(vii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

(viii) $1 \cdot A = A$

Άλλες Ιδιότητες

(i) Ο πίνακας $-A$ με την ιδιότητα $A + (-A) = 0$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη:

Έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ με $A + B = 0$. Θέλω να δείξω ότι $B = -A$. Είναι:

$$B = 0 + B = [A + (-A)] + B = [(-A) + A] + B = (-A) + (A + B) = -A + 0 = -A$$

(ii) $-(-A) = A$

Απόδειξη:

Είναι $(-A) + A = A + (-A) = 0$ και άρα ο A είναι ο μοναδικός πίνακας ο οποίος προστιθέμενος με τον $-A$ δίνει 0. Άρα, $A = -(-A)$

$$(iii) -(A + B) = (-A) + (-B)$$

Απόδειξη:

Λόγω της μοναδικότητας του αντιθέτου (i) αρκεί να δείξω ότι $(A + B) + [(-A) + (-B)] = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως, } (A + B) + [(-A) + (-B)] &= (B + A) + [(-A) + (-B)] = B + [A + (-A)] + (-B) = \\ &= B + 0 + (-B) = B + (-B) = 0 \end{aligned}$$

Μάθημα 3

Ιδιότητες

(i) $0 \cdot A = \lambda \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$, όπου $0, \lambda \in \mathbb{R}$ και \mathbb{O}, A είναι $n \times m$ πίνακες.

Απόδειξη:

$$0 \cdot A = (0 + 0)A = 0A + 0A \Rightarrow 0A + (-0A) = 0A + 0A + (-0A) \Rightarrow \mathbb{O} = 0A + \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O} = 0A.$$

$$\lambda \cdot \mathbb{O} = \lambda(\mathbb{O} + \mathbb{O}) = \lambda\mathbb{O} + \lambda\mathbb{O} \Rightarrow \lambda\mathbb{O} + (-\lambda\mathbb{O}) = \lambda\mathbb{O} + \lambda\mathbb{O} + (-\lambda\mathbb{O}) \Rightarrow \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} + \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O}.$$

$$(ii) (-\lambda)A = \lambda(-A) = -\lambda A$$

Απόδειξη:

$$\mathbb{O} = 0A = [\lambda + (-\lambda)]A = \lambda A + (-\lambda)A \Rightarrow (-\lambda)A = -\lambda A.$$

$$\mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} = \lambda[A + (-A)] = \lambda A + \lambda(-A) \Rightarrow \lambda(-A) = -\lambda A.$$

Παράδειγμα:

Θεωρώ τους 2×3 πίνακες A, B με $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Τότε, } A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

Αν A, B είναι δύο $n \times m$ πίνακες και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $(A + B)^t = A^t + B^t$ και $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

$$A = (a_{ij}) \rightarrow A^t = (a_{ji})$$

$$B = (b_{ij}) \rightarrow B^t = (b_{ji})$$

$$A + B = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(A + B)^t = (d_{ij}), \quad (d_{ij}) = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\text{Πχ. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} = A^t + B^t$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A^t = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{13} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \lambda A^t$$

Ορισμός

Ο $n \times n$ πίνακας A καλείται αντισυμμετρικός, αν είναι $A^t = -A$

Παρατήρηση

Αν ο $A = (a_{ij})$ είναι αντισυμμετρικός, τότε $a_{ii} = 0 \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots$

Πρόταση

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A , υπάρχουν μοναδικοί πίνακες B, C , με τον B συμμετρικό και τον C αντισυμμετρικό, ώστε $A = B + C$.

Απόδειξη

Θεωρώ τους πίνακες $B = \frac{A + A^t}{2}$ και $C = \frac{A - A^t}{2}$.

Παρατηρώ ότι $B + C = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}2A = A$.

Επίσης, είναι $B^t = [\frac{1}{2}(A + A^t)]^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = B$, ο B είναι συμμετρικός.

Για τον C είναι:

$C^t = [\frac{1}{2}(A - A^t)]^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = C$, ο C είναι αντισυμμετρικός.

Μοναδικότητα

Έστω ότι είναι $A = B_0 + C_0$, όπου ο B_0 είναι συμμετρικός και ο C_0 αντισυμμετρικός. Τότε:

$A^t = (B_0 + C_0)^t = B_0^t + C_0^t = B_0 - C_0$, και άρα

$A + A^t = B_0 + C_0 + B_0 - C_0 = 2B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}(A + A^t)$.

Ομοίως, $A - A^t = B_0 + C_0 - B_0 + C_0 = 2C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2}(A - A^t)$.

Άσκηση

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. Βρείτε 2×2 πίνακες B, C με τον B συμμετρικό και τον C αντισυμμετρικό ώστε $A = B + C$.

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Ορισμός

Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times k$ πίνακας, τότε ο πίνακας AB είναι ο $n \times k$ πίνακας που ορίζεται ως εξής:

Το γινόμενο μιας γραμμής του πίνακα A $r = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$ με μια στήλη του πίνακα A $c = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

είναι ο 1×1 πίνακας $(\sum_{i=1}^m a_i b_i) = r \times c$.

Το γινόμενο $c \times r$ είναι ο $m \times m$ πίνακας:

$c \times r = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \times (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_m \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m a_1 & b_m a_2 & \dots & b_m a_m \end{pmatrix}$. Ασφαλώς, οι πίνακες $r \times c$ και

$c \times r$ δεν είναι ίσοι.

Επιπλέον, αν A είναι ένας 2×3 πίνακας και B ένας 3×4 πίνακας, τότε το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας 2×4 πίνακας. Όμως το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι λοιπόν, $AB \neq BA$.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Επίσης είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Ορισμός

Ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I_n είναι ο διαγώνιος πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Αν γράψω $I_n = (\delta_{ij})$, τότε:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Παρατήρηση

$I_n \cdot A = A$ και $A \cdot I_m = A$, για κάθε $n \times m$ πίνακα A .

Απόδειξη:

$$\text{Αν } A = (a_{ij}) \text{ } I_n \cdot A = (\xi_{ij}),$$

είναι $\xi_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$ και άρα $I_n \cdot A = A$.

Αν $A \cdot I_m = (n_{ij})$ τότε $n_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$.

Ιδιότητες

(i) $(AB)C = A(BC)$, όπου $A : n \times m$ πίνακας, $B : m \times k$ πίνακας, $C : k \times l$ πίνακας

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ όπου $A : n \times m$ πίνακας, $B, C : m \times k$ πίνακας

(iii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iv) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

Απόδειξη του (ii):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+k & f+l \\ g+m & h+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(e+k) + b(g+m) & a(f+l) + b(h+n) \\ c(e+k) + d(g+m) & c(f+l) + d(h+n) \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dm & cl + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(e+k) + b(g+m) & a(f+l) + b(h+n) \\ c(e+k) + d(g+m) & c(f+l) + d(h+n) \end{pmatrix}$$

Επομένως, ισχύει ότι $A(B + C) = AB + AC$

Ορισμός

Στο σύνολο των $n \times m$ πινάκων, ορίζω για κάθε (i, j) με $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$ τον πίνακα

E_{ij} , ο οποίος έχει 1 στην i, j -θέση και 0 εκτός.

Πχ. Στο σύνολο των 2×2 πινάκων ορίζω

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις

(i) Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ μπορώ να γράψω

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

Γενικά, στο σύνολο των $n \times m$ πινάκων, έχω ότι για κάθε $A = (a_{ij})$ ισχύει ότι:

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

(ii) Αν $i, k \in \{1, \dots, n\}$ και $j, l \in \{1, \dots, m\}$, τότε στο σύνολο των $n \times m$ πινάκων ισχύει η ισότητα

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & \text{αν } j = k \\ 0, & \text{αν } j \neq k \end{cases}$$

Πχ. (για 2×2 πίνακες)

$$E_{11} \cdot E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

$$E_{11} \cdot E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

Μάθημα 4

Άσκηση

Αν $I_n = A$, όπου A ένας $n \times m$ πίνακας

$I_n = (\delta_{ij})$, $A = (a_{ij})$.

Ποιό είναι το στοιχείο στην (i, j) -θέση του A .

Λύση:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \dots + \delta_{in} a_{nj} = \delta_{ii} a_{ij} = 1 a_{ij} = a_{ij}.$$

Παραδείγματα

(i) Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και B είναι ένας $m \times k$ πίνακας, τότε είναι $(AB)^t = B^t A^t$ όπου $B^t : k \times m$ πίνακας και $A^t : m \times n$ πίνακας.

Γράφω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Θα δείξω ότι τα στοιχεία στην (i, j) -θέση των $(AB)^t$ και $B^t A^t$ είναι ίσα.

$$[(i, j) \text{ θέση του } (AB)^t] = [(j, i) \text{ θέση του } (AB)] = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki}$$

$$[(i, j) \text{ θέση του } B^t A^t] = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki} \text{ όπου } b_{ki} \text{ -στοιχείο του } B \text{ και } a_{jk} \text{ -στοιχείο του } A.$$

Άρα είναι $(AB)^t = B^t A^t$.

(ii) Να δείξω ότι $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}$ για κάθε $n \geq 0$.

Το ζητούμενο ισχύει για $n = 0, 1, \dots$

Χρησιμοποιώ επαγωγή και υποθέτω ότι $n \geq 0$ και

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}. \text{ Τότε} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1+2n-4n & 4-8n+12n \\ n-2n-1 & -4n+6n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2n & 4+4n \\ -n-1 & 2n+3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-2(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & 2(n+1)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα με βάση την αρχή της επαγωγής, έπεται ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \geq 0$.

$$(iii) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}.$$

Αν οι A, B είναι διαγώνιοι πίνακες $n \times n$, τότε AB είναι επίσης διαγώνιος πίνακας.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \mu_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mu_i E_{ii}$$

$$\text{Άρα είναι } AB = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii} \right) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i E_{ii} \right) = \sum_{i,j} (\lambda_i E_{ii}) (\mu_j E_{jj}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j E_{ii} E_{jj} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} E_{ij} =$$

$$\sum_i \lambda_i \mu_i \delta_{ii} E_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i E_{ii} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & t & cg \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah & at + bk & cg + el + mc \\ 0 & dk & dl + em \\ 0 & 0 & zm \end{pmatrix}$$

Γενικά αν οι A, B είναι άνω τριγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε ο πίνακας AB είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Γράφω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Για κάθε $i > j$ είναι $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Για να δείξω ότι ο AB είναι άνω τριγωνικός πρέπει να δείξω ότι για κάθε $i > j$ το στοιχείο στην (i, j) -θέση του είναι 0. Άρα πρέπει να δείξω ότι για $i > j$ είναι $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0$. Άρα να δείξω ότι για $i > j$ και κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ είναι $a_{ik} b_{kj} = 0$.

- Αν $i > k$ τότε $a_{ik} = 0$ και άρα $a_{ik} b_{kj} = 0$
- Αν $i \leq k$ τότε $j < k$ και άρα $b_{kj} = 0$ και άρα $a_{ik} b_{kj} = 0$

Ποιό είναι το στοιχείο στην (i, i) -θέση του AB ?

Απάντηση

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k < i} (a_{ik} + b_{ki} + a_{ii} b_{ii}) + \sum_{k > i} a_{ik} b_{ki} = a_{ii} b_{ii}.$$

(v) Αν A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες και $AB = BA$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $A^n B = BA^n (*)$ και $(AB)^n = A^n B^n (**)$.

Απόδειξη της (*)

$n = 0$ $IB = BI$, ισχύει.

Υποθέτω ότι $n \geq 0$ και $A^n B = BA^n$ και υπολογίζω:

$$A^{n+1}B = AA^nB = ABA^n = BAA^n = BA^{n+1}$$

Απόδειξη της (**)

Για $n = 0$ πρέπει να δείξω ότι $I_n = I_n A$, ισχύει.

Υποθέτω ότι $n \geq 0$ και $(AB)^n = A^n B^n$ υπολογίζω ότι:

$$(AB)^{n+1} = (AB)(AB)^n = ABA^n B^n =_{(*)} AA^n BB^n = A^{n+1} B^{n+1}.$$

(vi) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \times n$ πίνακα A είναι:

$$(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n).$$

Αν B είναι ένας $n \times n$ πίνακας, έτσι ώστε $AB = BA$ για κάθε $n \times n$ πίνακα A τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{με } B = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Γράφω } B = (b_{ij}) = \sum_{i,j} b_{ij} E_{ij}.$$

Θεωρώ δείκτες μ, ρ με $\mu \neq \rho$. Είναι $B \cdot E_{\mu\rho} = E_{\mu\rho} \cdot B$.

$$\text{Υπολογίζω } B \cdot E_{\mu\rho} = \left(\sum_{i,j} b_{ij} E_{ij} \right) E_{\mu\rho} = \sum_{i,j} b_{ij} E_{ij} E_{\mu\rho} = \sum_{i,j} b_{ij} \delta_{j\mu} E_{i\rho} = \sum_i b_{i\mu} E_{i\rho}.$$

$$\text{Είναι } E_{\mu\rho} \cdot B = E_{\mu\rho} \left(\sum_{i,j} b_{ij} E_{ij} \right) = \sum_{i,j} b_{ij} E_{\mu\rho} E_{ij} = \sum_{i,j} b_{ij} \delta_{\rho i} E_{\mu j} = \sum_j b_{\rho j} E_{\mu j}.$$

Συνεπώς, $\sum_i b_{i\mu} E_{i\rho} = \sum_j b_{\rho j} E_{\mu j}$, δηλαδή πρέπει:

$$b_{\rho\rho} = b_{\mu\mu} \text{ και } b_{i\mu} = 0 \text{ για } i \neq \mu.$$

Ορισμός

Ο $n \times n$ πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας B με $AB = I_n = BA$.

Παρατήρηση:

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο πίνακας B με $BA = I_n = AB$ είναι μοναδικός (συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται αντίστροφος του A).

Απόδειξη παρατήρησης:

$$\text{Έστω } G \text{ με } AG = I_n = GA. \text{ Τότε, } G = I_n G = (BA)G = B(AG) = BI_n = B.$$

Παραδείγματα

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ Ψάχνω $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $AB = I_2 = BA$. Είναι:

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -3a - 7c & -3b + 7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2c = 1 \\ -3a + 7c = 0 \\ b - 2d = 0 \\ -3b + 7d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ c = 3 \\ b = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Άρα αν υπάρχει ο B , είναι $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Μένει να δείξω ότι $BA = I_2$. Πράγματι:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Συνεπώς, ο A είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ Ψάχνω να βρω $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $AB = I_2 = BA$

Είναι:

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 5a + 10c & 5b + 10d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 5a + 10c = 0 \\ 5b + 10d = 1 \end{cases} \text{ Αν } a + 2c = 1, \text{ τότε } 5a + 10c = 5(a + 2c) = 5 \neq 0. \text{ Συνεπώς δεν υπάρχει}$$

τέτοιος B και άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\lambda_i \neq 0$

για κάθε i . Στην περίπτωση αυτή, είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

Υποθέτοντας ότι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i μπορώ να θεωρήσω τον διαγώνιο πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} E_{ii}.$$

$$\text{Υπολογίζω } AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \lambda_2^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n \text{ και όμοια είναι}$$

$BA = I_n$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν $\lambda_i = 0$, τότε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & \dots & * \\ b_{21} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & * \\ b_{n1} & * & \dots & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Για τον ίδιο λόγο, είναι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$

(iv) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με $A^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.

Πράγματι, μπορώ να υπολογίσω:

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I_n + A + \dots + A^{k-1} - (A + A^2 + \dots + A^k) = I_n - A^k = I_n$$

και

$$(I_n + A + \dots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n + A + \dots + A^{k-1} - (A + A^2 + \dots + A^k) = I_n - A^k = I_n.$$

Μάθημα 5

Ιδιότητες

Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες

(i) ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ο λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$

(iv) ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Απόδειξη:

(i) Γνωρίζουμε ότι $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

Άρα υπάρχει ο $(A^{-1})^{-1}$ και είναι $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Υπολογίζω $ABB^{-1}A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

Άρα υπάρχει ο $(AB)^{-1}$ και είναι ίσος με $B^{-1}A^{-1}$.

(iii) Υπολογίζω $(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = \lambda\lambda^{-1}AA^{-1} = 1 \cdot I_n = I_n$

$(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1} \cdot \lambda A^{-1}A = 1 \cdot I_n = I_n$

Συνεπώς, ο λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

(iv) Η σχέση $AA^{-1} = I_n$ δίνει $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n$.

Ομοίως η σχέση $A^{-1}A = I_n$ δίνει $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$.

Συνεπώς ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Παράδειγμα

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας ώστε ο $I_n - AB$ είναι αντιστρέψιμος.

Τότε ο πίνακας $I_m - BA$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα:

$$(I_m - BA) = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$$

Έστω $G = (I_n - AB)^{-1}$. Τότε είναι $G(I_n - AB) = I_n$ και $(I_n - AB)G = I_n$, δηλαδή

$$G - GAB = I_n (**)$$

και $G - ABC = I_n (*)$.

Για να δείξω ότι $(I_m - BA)^{-1} = I_m + BGA$, αρκεί να δείξω ότι $(I_m - BA)(I_m + BGA) = I_m =$

$$(I_m + BGA)(I_m - BA).$$

Υπολογίζω:

$$\begin{aligned} (I_m - BA)(I_m + BGA) &= I_m + BGA - BA - BABGA = \\ &= I_m + BGA - BA - B(G - I_n)A \text{ (από *)} = I_m + BGA - BA - BGA + BI_nA = \\ &= I_m - BA + BA = I_m \end{aligned}$$

Ομοίως είναι:

$$\begin{aligned} (I_m + BGA)(I_m - BA) &= I_m - BA + BGA - BGABA = \\ &= I_m - BA + BGA - B(G - I_n)A = I_m - BA + BGA - BGA + BI_nA = \\ &= I_m - BA + BA = I_m \end{aligned}$$

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$(I - AB)^{-1} = I + AB + BABA + BABABA + \dots$$

Ψάχνω τον

$$\begin{aligned} (I - BA)^{-1} &= I + BA + BABA + BABABA + \dots = I + B(A + ABA + ABABA + \dots) \\ &= I + B(I + AB + ABAB + \dots)A = I + B(I - AB)^{-1}A. \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \\ \epsilon x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3 = \theta \end{cases}, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta \in \mathbb{R}$$

Ο 2×3 πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \end{pmatrix}$ καλείται πίνακας των συντελεστών του συστήματος.

Ο 2×4 πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \vdots & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \vdots & \theta \end{pmatrix}$ καλείται επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

Ο πίνακας των αγνώστων είναι ο $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Μπορώ να γράψω το σύστημα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Γενικά, ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{pmatrix}$$

μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ δηλαδή ως } Ax = b, \text{ με } A \text{ τον πίνακα των συντελεστών και } b \text{ τον πίνακα των σταθερών όρων.}$$

Πρόβλημα

$$\text{Βρες λύσεις του συστήματος } A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = b$$

Ορισμός

Αν $b_1 = b_2 = \cdots = c_m = 0$ (αν δηλαδή $b = 0$, ως $n \times 1$ πίνακας) το γραμμικό σύστημα καλείται ομογενές.

Η μηδενική (ή τετριμμένη) λύση ενός ομογενούς συστήματος είναι αυτή για την οποία $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Παρατήρηση

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας, b ένας $n \times 1$ πίνακας και E ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε:

(i) κάθε λύση του συστήματος $Ax = b$ είναι λύση του συστήματος $(EA)x = Eb$.

(ii) αν ο E είναι αντιστρέψιμος, τότε τα συστήματα $Ax = b$ και $(EA)x = Eb$ έχουν τις ίδιες λύσεις (είναι ισοδύναμα).

Στόχος:

Για να λύσω το σύστημα $Ax = b$, επιλέγω κατάλληλα τον αντιστρέψιμο πίνακα E , έτσι ώστε το ισοδύναμο σύστημα $(EA)x = Eb$ να είναι απλό.

Πχ. Αν υπάρχει αντιστρέψιμος E ώστε ο $EA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, τότε το σύστημα

$(EA)x = Eb$ είναι ακριβώς το:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Eb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = Eb$$

Απόδειξη:

(i) Αν c είναι μια λύση του $Ax = b$, είναι $Ac = b$ και άρα $(EA)c = E(Ac) = Eb$. Συνεπώς το c είναι μια λύση του συστήματος $(EA)x = Eb$.

(ii) Αν ο E είναι αντιστρέψιμος, τότε μια λύση του $(EA)x = Eb$ είναι λύση του $E^{-1}(EA)x = E^{-1}(Eb)$, δηλαδή του $Ax = b$.

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας. Μπορώ να γράψω $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου r_1, r_2, \dots, r_n είναι οι γραμμές

του $1 \times m$ πίνακα.

Ορισμός: Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών του A (στοιχειώδεις γραμμοπράξεις)

τύπου I: Διαλέγω $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και αντικαθιστώ την r_i με το λr_i :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ r_{i-1} \\ \lambda r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

τύπου II: Διαλέγω $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και αντικαθιστώ την r_i με το $r_i + \lambda r_j$:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \end{pmatrix}$$

τύπου III: Επιλέγω δείκτες $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$ και εναλλάσσω τις γραμμές r_i και r_j :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Δύο $n \times m$ πίνακες A, B καλούνται γραμμοϊσοδύναμοι αν μπορώ να λάβω τον B από τον A μέσω μιας πεπερασμένης επαλληλίας στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Ορισμός

Ο $n \times m$ πίνακας B είναι κλιμακωτός αν:

(i) το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής είναι 1.

(ii) αν η γραμμή r_i είναι μηδενική, τότε $r_i = r_{i+1} = \dots = r_n = 0$.

(iii) αν $i < i'$ και το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της r_i (αντίστοιχα της $r_{i'}$) είναι στη θέση j (αντίστοιχα j'), τότε $j < j'$.

Αν επιπλέον το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο μιας γραμμής είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης τότε λέμε ότι ο B είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Παραδείγματα

Ο 4×5 πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Ο 4×5 πίνακας $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Το γραμμικό σύστημα $Gx = b$, δηλαδή το $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_5 = b_1 \\ x_3 + 7x_5 = b_2 \\ x_4 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$ είναι απλό.

Αν $b_4 = 0$, τότε οι λύσεις είναι της μορφής:

$$x_1 = b_1 - 2x_2 - 6x_5$$

$$x_3 = b_2 - 7x_5$$

$$x_4 = b_3$$

όπου $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα (απαλοιφής του Gauss):

Κάθε $n \times m$ πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν ανοιγμένο κλιμακωτό πίνακα B .

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 11 & -1 \\ 2 & 9 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim_{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 2 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 11 & -1 \end{pmatrix} \sim_{r_2 \rightarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -17 \\ 0 & 3 & 11 & -1 \end{pmatrix} \sim_{r_3 \rightarrow r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 5 & 50 \end{pmatrix} \sim_{r_3 \rightarrow \frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim_{r_1 \rightarrow r_1 + r_3, r_2 \rightarrow r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim_{r_1 \rightarrow r_1 - 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 168 \\ 0 & 1 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Γραμμοϊσοδυναμία

Ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή

Στοιχειώδεις πίνακες: Προκύπτουν από τον I_n εφαρμόζοντας κάποια στοιχειώδη γραμμοπράξη.

• τύπου I: Για $\lambda \neq 0$: $D(i, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$

• τύπου II: Επιλέγω i, j και $\lambda \in \mathbb{R}$: $M(i, j, \lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

• τύπου III: $E(i, j)$,

πχ. $E(1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $E(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Πρόταση

Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Μάλιστα είναι:

$$D(i, \lambda)^{-1} = D(i, \lambda^{-1}), \quad M(i, j, \lambda)^{-1} = M(i, j, -\lambda) \quad \text{και} \quad E(i, j)^{-1} = E(i, j).$$

Απόδειξη:

$$\Upsilon\text{πολογίζω } D(i, \lambda)D(i, \lambda^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda \cdot \lambda^{-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n \quad \text{και} \quad D(i, \lambda^{-1})D(i, \lambda) = \cdots = I_n.$$

Άρα ο $D(i, \lambda)$ είναι αντιστρέψιμος και $D(i, \lambda)^{-1} = D(i, \lambda^{-1})$

$$M(i, j, \lambda)M(i, j, -\lambda) = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n - \lambda E_{ij} + \lambda E_{ij}I_n - \lambda^2 E_{ij}E_{ij} = I_n - \lambda^2 E_{ij}E_{ij} = I_n \quad \text{και} \quad \text{ομοίως} \quad M(i, j, -\lambda)M(i, j, \lambda) = I_n.$$

Άρα ο $M(i, j, \lambda)$ είναι αντιστρέψιμος και $M(i, j, \lambda)^{-1} = M(i, j, -\lambda)$.

Πχ. $E(1, 2)E(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Γενικά, $E(i, j)E(i, j) = I_n$.

Πρόταση

Κάθε στοιχειώδης γραμμοπράξη οδηγεί από ένα πίνακα A στον πίνακα EA , για κάποιον κατάλληλο

στοιχειώδη πίνακα.

Απόδειξη

- τύπου I: $D(i, \lambda)A$.
Ο πίνακας $D(i, \lambda)A$ προκύπτει από τον A μέσω της πράξης $r_i \rightarrow \lambda r_i$.

- τύπου II:

$$E(1, 2, \lambda)A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \cdots & a_{1m} + \lambda a_{2m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right)$$

Άρα ο πίνακας $M(1, 2, \lambda)A$ προκύπτει από τον A μέσω της στοιχειώδους γραμμοπράξης $r_1 \rightarrow r_1 + \lambda r_2$.

- τύπου III: $E(1, 2)A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{array} \right)$

Συνεπώς ο πίνακας $E(1, 2)A$ προκύπτει από τον A μέσω της πράξης $r_1 \leftrightarrow r_2$.

Πρόταση

Έστω A, B δύο $n \times m$ πίνακες. Τότε οι A, B είναι γραμμοϊσοδύναμοι αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις $n \times n$ $E_1 E_2 \cdots E_k$ ώστε $B = E_k \cdots E_2 E_1 A$.

Απόδειξη

[\Rightarrow] Μπορώ να εφαρμόσω διαδοχικά στοιχειώδεις γραμμοπράξεις ώστε να μετασχηματίσω τον A στον B .

$$A = A_0 \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A_{k-1} \rightsquigarrow A_k = B$$

Από το προηγούμενο, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k ώστε:

$$A_1 = E_1 A_0$$

$$A_2 = E_2 A_1$$

\vdots

$$A_k = E_k A_{k-1}$$

$$\text{Άρα } A_k = E_k A_{k-1} = E_k E_{k-1} A_{k-2} = \cdots = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A_0,$$

$$\text{δηλαδή } B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

[\Leftarrow] Μπορώ να μετασχηματίσω τον A στον B κάνοντας ακριβώς k βήματα ως εξής:

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow E_k \cdots E_2 E_1 A = B.$$

Άρα οι A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

Πρόταση

Η γραμμοϊσοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων.

Απόδειξη:

Ανακλαστική και συμμετρική ιδιότητα: Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B , μπορώ να βρω $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k ώστε $B = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Τότε, $A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} B = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$.

Άρα ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A .

Μεταβατική ιδιότητα: Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B και ο B με τον C . Συνεπώς μπορώ να γράψω $B = E_k \cdots E_1 A$ και $G = E_{k+\lambda} \cdots E_{k+1} B$ για κάποιο $k, \lambda \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, \dots, E_{k+\lambda}$. Συνεπώς, $G = E_{k+\lambda} \cdots E_{k+1} E_k \cdots E_1 A$ και άρα ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον G .

Πόρισμα

Για κάθε $n \times m$ πίνακα A υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k τέτοιοι ώστε ο πίνακας $E_k \cdots E_2 E_1$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν $n \times n$ πίνακα A :

- (i) ο A είναι αντιστρέψιμος
- (ii) ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n
- (iii) ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Απόδειξη:

(i) \rightarrow (ii) Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k ώστε ο $B = E_k \cdots E_2 E_1 A$ να είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Καθώς οι πίνακες A, E_1, E_2, \dots, E_k είναι αντιστρέψιμοι, το ίδιο ισχύει για το γινόμενο $B = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Συνεπώς, ο B δεν έχει καμία μηδενική γραμμή. Άρα $B = I_n$, δηλαδή ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n .

(ii) \rightarrow (iii) Γνωρίζουμε ότι (καθώς ο I_n είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k με $A = E_k \cdots E_2 E_1 I_n = E_k \cdots E_2 E_1$

(iii) \rightarrow (i) Αυτό είναι προφανές, καθώς οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος.

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Παραδείγματα

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 12 \end{cases}$$

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων είναι το εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \end{array} \right\} \text{ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ!}$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -7 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{10}{3} & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{19} & \frac{9}{19} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{28}{19} & \frac{85}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{39}{57} & \frac{96}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{19} & \frac{9}{19} \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{19} & \frac{21}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{39}{57} & \frac{32}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{19} & \frac{9}{19} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα είναι το εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{2}{19}x_4 = \frac{21}{19} \\ x_2 + \frac{39}{57}x_4 = \frac{32}{19} \\ x_3 - \frac{10}{19}x_4 = \frac{9}{19} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{21}{19} - \frac{2}{19}x_4 \\ x_2 = \frac{32}{19} - \frac{39}{57}x_4 \\ x_3 = \frac{9}{19} + \frac{10}{19}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Μάθημα 7

Παράδειγμα

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{array} \right\}$$

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Συνεπώς το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = -3x_5 \end{array} \right\}, \text{ όπου } x_3, x_5 \text{ είναι ελεύθερες μεταβλητές.}$$

Παρατήρηση

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Γνωρίζουμε ότι ο A είναι γραμμο-ϊσοδύναμος με τον I_n . Συνεπώς υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες E_1, E_2, \dots, E_k ώστε $I_n = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Συνεπώς είναι $I_n A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 A A^{-1}$, δηλαδή $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 I_n$. Άρα μπορώ να υπολογίσω τον A^{-1} ξεκινώντας από τον I_n , αν εφαρμόσω την ίδια ακολουθία γραμμοπράξεων που οδηγεί από τον A στον I_n .

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο A^{-1} (αν υπάρχει) του $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{Θεωρώ τον } (A:I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 19 & 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 8 & 19 & 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -11 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -11 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & 27 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -11 & 3 \end{array} \right) = (I_3:A^{-1})$$

$$\text{Συνεπώς } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 19 & 27 & -7 \\ -8 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

Ορίζουσες

Ορισμός

$\mathbb{R}^{n \times n} = \{n \times n \text{ πραγματικοί πίνακες}\}$

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ γράφω $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ όπου r_i είναι η i - γραμμή του πίνακα.

Ορισμός

Μια ορίζουσα απεικόνιση $D : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$(i) \text{ Αν } A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r'_i + r''_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r'_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r''_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \text{ τότε } D(A) = D(B) + D(C)$$

$$(ii) \text{ Αν } A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r'_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \text{ και } \Delta = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r'_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \text{ τότε } D(A) = \lambda D(\Delta).$$

(iii) Αν δυο γραμμές του A είναι ίσες τότε $D(A) = 0$.

(iv) $D(I_n) = 1$.

Παραδείγματα

(i) $n = 1$ $D(a) = aD(1) = aD(I_1) = a$

(ii) για $n = 2$ $D \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Αυτή η απεικόνιση ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii), (iii), (iv) του ορισμού.

- Για την (iv): $D(I_2) = D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

- Για την (iii): $D \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0$

- Για την (i): Αν $A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = D \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε:
 $D(A) = (a_1 + a_2)d - (b_1 + b_2)c = (a_1d - b_1c) + (a_2d - b_2c) = D(B) + D(C)$

- Για την (ii): Αν $A = \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ c & d \end{pmatrix}$ και $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε:
 $D(A) = (\lambda a')d - (\lambda b')c = \lambda(a'd - b'c) = \lambda D(A')$

Πως μεταβάλλεται το $D(A)$ αν εφαρμόσω στον A μια στοιχειώδη γραμμοπράξη;

τύπου I: $r_i \rightarrow \lambda r_i$

Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασηματισμού $r_i \rightarrow \lambda r_i$, τότε $D(B) = \lambda D(A)$ (από την ιδιότητα (ii) του ορισμού)

τύπου II: $r_i \rightarrow r_i + \lambda r_j$ για $i \neq j$

Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασηματισμού $r_i \rightarrow r_i + \lambda r_j$, τότε $D(B) = D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(i)}{=} D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(ii)}{=} D(A) + \lambda D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(iii)}{=} D(A) \cdot \lambda \cdot 0 = D(A)$

$$D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(ii)}{=} D(A) + \lambda D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(iii)}{=} D(A) \cdot \lambda \cdot 0 = D(A)$$

τύπου III: $r_i \rightarrow r_j$

Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασχηματισμού $r_i \rightarrow r_j$, τότε $D(B) = -D(A)$

Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{(iii)}{=} D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(i)}{=} D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(i)}{=} \\ & = D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \stackrel{(iii)}{=} D(A) + D(B). \end{aligned}$$

Άρα, $D(B) = -D(A)$.

Πόρισμα

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και D μια ορίζουσα απεικόνιση. Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω μιας στοιχειώδους γραμμοπράξης τότε $D(A) = 0 \Leftrightarrow D(B) = 0$.

Απόδειξη:

τύπου I: Για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι $D(B) = \lambda D(A)$.

τύπου II: $D(B) = D(A)$.

τύπου III: $D(B) = -D(A)$.

Πόρισμα

Αν οι $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, και 0 είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, τότε $D(A) = 0 \Leftrightarrow D(B) = 0$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και πίνακες $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, με $A_0 = A_1 A_k = B$ έτσι ώστε ο A_{i+1} να προκύπτει από τον A_i μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.

Από το παραπάνω πόρισμα, είναι:

$$D(A_0) = 0 \Leftrightarrow D(A_1) = 0 \Leftrightarrow D(A_2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow D(A_k) = 0$$

Πρόταση

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και D είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, τότε $D(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ο A είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη:

$[\Rightarrow]$ Γνωρίζω ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ο οποίος έχει ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Καθώς $D(A) \neq 0$, έπεται ότι $D(B) \neq 0$. Αν ο B έχει μηδενική n -οστή γραμμή, τότε $D(B) \stackrel{(ii)}{=} 0D(B) = 0$, άτοπο.

Συνεπώς ο B δεν έχει καμία μηδενική γραμμή. Άρα $B = I_n$. Καθώς ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n , αυτός είναι αντιστρέψιμος.

$[\Leftarrow]$ Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n .

Καθώς $D(I_n) = 1 \neq 0$ (από ιδιότητα (iv) του ορισμού), έπεται ότι $D(A) \neq 0$.

Στόχος

- Υπαρξη D (για κάθε n)
- Μοναδικότητα D (για κάθε n)

Υπαρξη ορίζουσας απεικόνισης:

Χρησιμοποιώ επαγωγή στο n .

$$n = 1 : D_1(a) = a$$

$$n = 2 : D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \text{ (ισχύουν οι ιδιότητες (i)-(iv) του ορισμού).}$$

Γενικά, υποθέτοντας ότι $D_{n-1} : \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, ορίζουμε την $D_n : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

Θεωρώ τον $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και για κάθε δείκτες i, j ορίζω A_{ij} τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον A διαγράφοντας την i - γραμμή και την j - στήλη.

$$\text{Με τον συμβολισμό αυτό ορίζω } D_n(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1})$$

Πχ. $n = 2$

$$D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a D_1(d) + (-1)^{2+1} c D_1(b) = ad - bc$$

$n = 3$

$$D_3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a D_2 \begin{pmatrix} e & f \\ h & k \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} d D_2 \begin{pmatrix} b & c \\ h & k \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} g D_2 \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} = \\ = a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce) = aek - afh - dbk + dch + gbf - gce$$

Μάθημα 8

Ορισμός

Αν $D_{n-1} : \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, τότε ορίζουμε $D_n : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1})$$

Ισχυρισμός:

Η απεικόνιση D_n είναι μια απεικόνιση ορίζουσας.

$$\text{Πχ. } D_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot D_2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 D_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 D_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4(2 \cdot 9 - 8 \cdot 3) + 7(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$$

Ι ιδιότητα Ορισμού:

Υποθέτω ότι $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A = (a_{ij})$ και $r_1 = r' + r''$,
(δηλαδή $(a_{11} \cdots a_{1n}) = (a'_{11} a'_{12} \cdots + a'_{1n}) + (a''_{11} + a''_{12} + \cdots + a''_{1n})$).

$$\text{Θεωρώ } A' = \begin{pmatrix} r' \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} \text{ και } A'' = \begin{pmatrix} r'' \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Υπολογίζω

$$D(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{ij}) = a_{11} + D(A_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = \\ = a'_{11} D(A_{11}) + a''_{11} D(A_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} (D(A'_{i1}) + D(A''_{i1})) =$$

$$\begin{aligned}
&= a'_{11}D(A'_{11}) + a''_{11}D(A''_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A'_{i1}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A''_{i1}) = \\
&= D(A') + D(A'')
\end{aligned}$$

II ιδιότητα Ορισμού:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad r_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}), \quad r = (b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n}), \quad B = \begin{pmatrix} r \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad r_1 = \lambda r$$

Υπολογίζω:

$$\begin{aligned}
D(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = a_{11} D(A_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = \\
&= \lambda b_{11} D(B_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} b_{i1} \lambda D(B_{i1}) = \lambda [b_{11} D(B_{11}) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} b_{i1} D(B_{i1})] = \lambda D(B)
\end{aligned}$$

III ιδιότητα Ορισμού:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad r_1 = r_2$$

Από τον ορισμό του D είναι:

$$\begin{aligned}
D(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = a_{11} D(A_{11}) - D(A_{21}) + \sum_{i=3}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = \\
&= \sum_{i=3}^n (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) = 0
\end{aligned}$$

IV ιδιότητα Ορισμού:

$$D_n(I_n) = 1 \cdot D_{n-1}(I_n - 1) - 0 \cdots + 0 \cdots + \cdots = D_{n-1}(I_n - 1) = 1$$

Στόχος: μοναδικότητα της ορίζουσας απεικόνισης D .

X : μη κενό σύνολο.

$F: X \rightarrow X$

Αν $f, g: X \rightarrow X$ μπορώ να ορίσω την $fog: X \rightarrow X$ με $(fog)(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in X$.

Γνωρίζουμε ότι αν $f, g: X \rightarrow X$ είναι $1-1$ συναρτήσεις, τότε η fog είναι επίσης $1-1$.

Ομοίως, αν $f, g: X \rightarrow X$ επί, τότε η fog είναι επίσης επί.

Συνεπώς, αν $f, g: X \rightarrow X$ είναι $1-1$ και επί, τότε η fog είναι επίσης $1-1$ και επί.

Ορισμός

$S_X = \{f: X \rightarrow X \mid \eta \ f \ 1-1 \ \text{και} \ \text{επί}\}$.

Συνεπώς, αν f και $g \in S_X$ τότε $fog \in S_X$.

Ορισμός

Το σύνολο S_X αν $X = \{1, 2, \dots, n\}$ συμβολίζεται με S_n και ονομάζεται σύνολο μεταθέσεων σε n σύμβολα.

Τα στοιχεία $\sigma \in S_n$ καλούνται μεταθέσεις σε n σύμβολα.

Ορισμός

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ καλείται αντιμετάθεση αν υπάρχουν $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i \neq j$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ και $\sigma(k) = k$ για $k \neq i, j$.

Μια μετάθεση σε S_n καλείται κύκλος μήκους k και αν υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(j) = j$ αν $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Παρατήρηση 1

Ένας κύκλος μήκους 2 είναι ακριβώς μια αντιμετάθεση.

Παρατηρήσεις 2

(i) Κάθε μετάθεση είναι σύνολο κύκλων:

$$i, \sigma(i), \sigma^2(i), \sigma^3(i), \dots, \sigma^k(i) = \sigma^\lambda(i), \quad k < \lambda$$

Είναι $i = \sigma^{\lambda-k}(i)$.

(ii) Κάθε κύκλος είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Πχ. $\sigma \in S_n, \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(i) = i$ για $i \geq 4$

$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n, \sigma_1(1) = 3, \sigma_1(3) = 1, \sigma_1(i) = i$ για $i \neq 1, 3$

$\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1, \sigma_2(i) = i$ για $i \neq 1, 2$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 : 1_{\sigma_2} \rightarrow 2_{\sigma_1} \rightarrow 2$$

$$2_{\sigma_2} \rightarrow 1_{\sigma_1} \rightarrow 3$$

$$3_{\sigma_2} \rightarrow 3_{\sigma_1} \rightarrow 1$$

$$i_{\sigma_2} \rightarrow i_{\sigma_1} \rightarrow i \text{ για } (i \geq 4)$$

(iii) Κάθε αντιμετάθεση $\sigma \in S_n$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Πρόταση

Έστω $D_1, D_2 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο απεικονίσεις ορίζουσας. Τότε $D_1 = D_2$.

Απόδειξη

Θα δείξω ότι η συνάρτηση $D = D_1 - D_2 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ με $D(A) = D_1(A) - D_2(A)$ είναι η μηδενική συνάρτηση.

Η συνάρτηση D ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) στον ορισμό των οριζουσών. Συνεπώς, όπως έχουμε δει είναι $D(A) = D(B)$ αν ο B προκύπτει από τον A μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών τύπου II.

Θεωρώ $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Για κάθε $i = 1, \dots, n$ γράφω $r_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ και

$$r_i = a_{i1}(1 \ 0 \ \dots \ 0) + a_{i2}(0 \ 1 \ \dots \ 0) + \dots + a_{in}(0 \ 0 \ \dots \ 1) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n = \sum_j a_{ij}e_j.$$

$$\text{Συνεπώς είναι } A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}e_j \\ \sum_j a_{2j}e_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}e_j \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } D(A) = \sum_{j_1} a_{1j_1} D \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} a_{1j_1} a_{2j_2} D \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \dots =$$

$$= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} D \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} \quad (n^n \text{ όροι})$$

Αν κάποιο j_a ισούται με κάποιο j_2 , τότε $D = \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = 0$.

Αν $j_a \neq j_b$ για $a \neq b$, είναι $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Άρα η αντιστοιχία $k \rightarrow j_k$ είναι μια μετάθεση σε n σύμβολα. Συνεπώς η $k \rightarrow j_k$ είναι σύνθεση m αντιμεταθέσεων (για κάποιο m).

Έτσι λοιπόν $D \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = (-1)^n D \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = (-1)^m D(I_n) = (-1)^m [D_1(I_n) - D_2(I_n)] = 0$.

Τελικά είναι $D(A) = 0$.

Μάθημα 9

Υπαρξη - μοναδικότητα ορίζουσας $det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1})$$

Παρατηρήσεις:

(i) Είδαμε στην απόδειξη της μοναδικότητας της det , ότι

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \pm a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \pm a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

(ii) Η απεικόνιση $A \rightarrow \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i2} det(A_{i2})$ έχει επίσης τις ιδιότητες της det . Λόγω μοναδικότητας της ορίζουσας είναι $det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i2} det(A_{i2})$.

Πιο γενικά, για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ είναι $det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{ij} det(A_{ij})$ (ανάπτυγμα κατά *Laplace* της ορίζουσας ως προς τη j -στήλη).

(iii) Η ορίζουσα ενός $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ του οποίου δυο στήλες είναι ίσες, είναι 0.

Γράφω $A = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n)$ με c_1, c_2, \dots, c_n τις στήλες του.

Υπάρχουν $j', j'' \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $j' \neq j''$ και $c_{j'} = c_{j''}$.

Θέλω να δείξω ότι $det(A) = 0$. Χρησιμοποιώ επαγωγή στο n .

$$\underline{n=2} \ A = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \rightarrow det(A) = ac - ac = 0$$

Επαγωγικό βήμα $n > 2$: Επιλέγω $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $j \neq j', j''$. Αναπτύσσοντας κατά *Laplace* ως προς τη j -στήλη, έχω:

$$det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot 0 = 0 \text{ (ο } A \text{ έχει δυο στήλες ίσες).}$$

(iv) Αν A είναι ένας τριγωνικός πίνακας τότε $det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Επαγωγή ως προς n :

Για $n = 1$ ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτω ότι το ζητούμενο ισχύει για $(n - 1) \times (n - 1)$ τριγωνικούς πίνακες (όπου $n \geq 2$) και θεωρώ έναν τριγωνικό $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$.

Υποθέτω ότι $a_{ij} = 0$ αν $i > j$. Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη είναι:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}\det(A_{21}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}) = \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) \text{ ο οποίος είναι ένας άνω τριγωνικός } (n - 1) \times (n - 1) \text{ πίνακας} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}(a_{22} \cdots a_{nn}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

Υποθέτω ότι $a_{ij} = 0$ αν $i < j$. Αναπτύσσοντας ως προς τη n -οστή στήλη, είναι:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}) + (-1)^{n+n}a_{nn}\det(A_{nn}) = \\ &= (-1)^{n+n}a_{nn}(a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1}a_{n-1}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

Παραδείγματα

(i) $A = (a)$, $\det(A) = a$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $\det(A) = -ab$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & z \end{pmatrix}$, $\det(A) = d \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = d(-ab) = -abd$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & z \\ n & t & i & k \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-n)\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & z \end{pmatrix} = (-n)d(-ab) = abdn$

Ορισμός

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζω $B = \text{adj}A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τον προσαρτημένο πίνακα του A ως εξής:

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = (-1)^{i+1}\det(A_{ji}).$$

Πχ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι $(\text{adj}A)A = \det(A)I_n$.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$.

Απόδειξη:

Η σχέση $(\text{adj}A)A = (\det A)I_n$ δίνει ότι:

$\text{adj}A = (\det A)I_n A^{-1}$, δηλαδή ότι $\text{adj}A = (\det A)A^{-1}$. Καθώς ο A είναι αντιστρέψιμος, είναι $\det A \neq 0$. Συνεπώς, έπεται ότι $\frac{1}{\det A} \text{adj}A = A^{-1}$.

Εφαρμογή

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \text{ τότε είναι } \text{adj}A = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 27 + (-19) + (-7) = 1.$$

$$\text{Άρα, ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος και } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη Πρότασης:

Έστω $A = (a_{ij})$ και $\text{adj}A = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Θέλω να υπολογίσω τον πίνακα $(\text{adj}A)A = c_{ij}$.

$$\text{Είναι } c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \det(A_{ki}) a_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{kj} \det(A_{ki}).$$

- Αν $i = j$, τότε $c_{ii} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki} \det(A_{ki}) = \det A$ (ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά *Laplace* ως προς τη i -στήλη).
- Αν $i \neq j$, τότε αν γράψω $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ και ορίσω $x_{ij} = (c_1 \ \dots \ c_{i-1} \ c_j \ c_{i+1} \ \dots \ c_n)$ τότε $c_{ij} = \det x_{ij} = 0$ (ο πίνακας X_{ij} έχει δυο στήλες ίσες) (ανάπτυγμα κατά *Laplace* ως προς την i -στήλη).

Πρόταση (τύπος του Cramer)

Θεωρώ ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\text{και } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση, την εξής:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Εδώ $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αντικαθιστώντας τη j -στήλη του A με τη στήλη b .

(Αν $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, τότε $A_j = (c_1 \ \dots \ c_{j-1} \ b \ c_{j+1} \ \dots \ c_n)$ για $j = 1, 2, \dots, n$).

Απόδειξη

Η σχέση $Ax = b$ δίνει $x = A^{-1}b$, δηλαδή:

$$x = \frac{1}{\det A} (\text{adj}A)b.$$

Συνεπώς, $x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+1} \det(A_{ji}) b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j \det(A_{ji}) = \frac{1}{\det A} \det A_i$ (ανάπτυγμα κατά *Laplace* ως προς την i -στήλη)

Μάθημα 10

Παράδειγμα

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώ τον τύπο του *Cramer* :

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6$$

$$D_x = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -18$$

$$D_y = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix} = -6$$

$$D_z = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} = -12$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-6} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός

Ένας R διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο V , εφοδιασμένο με πράξεις:

$$V \times V \rightarrow V$$

$$(u, u') \rightarrow u + u' \text{ άθροισμα}$$

$$R \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, u) \rightarrow \lambda u \text{ (βαθμωτός εξωτερικός πολλαπλασιασμός)}$$

έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$(i) \quad u + u' = u' + u \text{ για } u, u' \in V$$

$$(ii) \quad (u + u') + u'' = u + (u' + u'') \text{ για } u, u', u'' \in V$$

$$(iii) \quad \text{υπάρχει } 0 \in V \text{ ώστε } u + 0 = u \text{ για κάθε } u \in V$$

$$(iv) \quad \text{για κάθε } u \in V \text{ υπάρχει } \bar{u} \in V \text{ με } u + \bar{u} = 0 \in V$$

$$(v) \quad \lambda(u + u') = \lambda u + \lambda u' \text{ για } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } u, u' \in V$$

$$(vi) \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \text{ για } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και } u \in V$$

$$(vii) \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \text{ για } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και } u \in V$$

$$(viii) \quad 1 \cdot u = u \text{ για κάθε } u \in V$$

Παραδείγματα

(i) Το \mathbb{R} με τις συνήθεις πράξεις είναι ένας \mathbb{R} διανυσματικός χώρος.

(ii) Το σύνολο $\mathbb{R}^{n \times m}$ των $n \times m$ πινάκων (με το σύννητες άθροισμα και βαθμωτό πολλαπλασιασμό) είναι ένας διανυσματικός χώρος.

(iii) Το σύνολο X των διανυσμάτων με αρχή το 0 του επιπέδου είναι ένας διανυσματικός χώρος.

(iv) Θεωρώ το $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$.

Καθώς το άθροισμα δυο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση ορίζεται η απεικόνιση:

$$C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$$

$$(f, g) \rightarrow f + g, \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

Ομοίως ορίζεται η απεικόνιση:

$$\mathbb{R} \times C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$$

$$(\lambda, f) \rightarrow \lambda f$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

Καθώς αυτές οι δυο πράξεις ανάγονται στο άθροισμα και το γινόμενο αριθμών, ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου.

(v) Το $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων στη μεταβλητή x είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις:

Αν $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ (πεπερασμένο άθροισμα) και $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ (πεπερασμένο άθροισμα) τότε:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots \text{ και } \lambda f(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \dots$$

(vi) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρώ το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Είναι $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$.

Οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
- $\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$

(vii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρώ το σύνολο $V = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \geq n\}$

Με το σύνηθες άθροισμα και εξωτερικό πολλαπλασιασμό, το V είναι ένας διανυσματικός χώρος.

(viii) $V = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών.

Γενικές Ιδιότητες

(i) Το στοιχείο $0 \in V$ για το οποίο είναι $u + 0 = u(**)$ για κάθε $u \in V$, είναι μοναδικό και ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο του V .

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $w \in V$ είναι ένα στοιχείο ώστε $u + w = u(*)$ για κάθε $u \in V$ τότε η σχέση (*) για $u = 0$ θα είναι:

$$0 = 0 + w = w + 0 = w \text{ και προκύπτει η σχέση (***) για } u = w. \text{ Άρα } w = 0.$$

(ii) Για κάθε $u \in V$ το στοιχείο $\bar{u} \in V$ με $u + \bar{u} = 0 \in V$ είναι μοναδικό και ονομάζεται αντίθετο του u και συμβολίζεται με $-u$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\bar{u} \in V$ είναι ένα στοιχείο με $u + \bar{u} = 0$. Τότε:

$$\bar{u} = \bar{u} + 0 = \bar{u} + (u + \bar{u}) = (\bar{u} + u) + \bar{u} = 0 + \bar{u} = \bar{u}.$$

(iii) Αν $u, u' \in V$, τότε $-(u + u') = (-u) + (-u')$.

Απόδειξη:

$$\text{Προφανές, γιατί } u + u' + (-u) + (-u') = u' + u + (-u) + (-u') = u' + 0 + (-u') = u' + (-u') = 0$$

(iv) $0u = \lambda 0 = 0 \in V$ ($u \in V, \lambda \in \mathbb{R}$)

Απόδειξη:

$$0u = (0 + 0)u = 0u + 0u \Rightarrow 0 = 0u$$

$$\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0 \Rightarrow 0 = \lambda 0$$

(v) $\lambda(-u) = (-\lambda u) = -\lambda u$

Απόδειξη:

$$0 = \lambda 0 = \lambda[u + (-u)] = \lambda u + \lambda(-u) \Rightarrow \lambda(-u) = -\lambda u$$

$$0 = 0u = [\lambda + (-\lambda)]u = \lambda u + (-\lambda)u \Rightarrow (-\lambda u) = -\lambda u.$$

Ορισμός

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $U \subset V$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν:

(i) $0 \in U$

(ii) $u, u' \in U$, τότε $u + u' \in U$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in U$, τότε $\lambda u \in U$.

Παρατήρηση

Ένας διανυσματικός υπόχωρος U του διανυσματικού χώρου V είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος ως προς τους περιορισμούς των πράξεων του V .

Παραδείγματα

(i) Το υποσύνολο $T_n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(ii) Το σύνολο Λ των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος n εξισώσεων με m αγνώστους είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{m \times 1}$.

Έστω $Ax = 0$ το σύστημα ($A \in \mathbb{R}^{n \times m}$).

Αν $u, u' \in \Lambda$, τότε: $Au = 0$ και $Au' = 0$.

Συνεπώς, $A(u + u') = Au + Au' = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + u' \in \Lambda$ και για $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in \Lambda$. Τέλος, $A \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in \Lambda$.

(iii) Έστω $V = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{R}\}$ ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών.

Αν $U = \{(a_n)_n \in V : \text{υπάρχει το όριο } \lim a_n\}$, τότε ο U είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V .

- $(0, 0, 0, \dots) \in U$
- Αν $(a_n)_n, (b_n)_n \in U$, τότε $(a_n + b_n)_n \in U$ και μάλιστα $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- Αν $(a_n)_n \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $(\lambda a_n)_n \in U$ και μάλιστα $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$.

Αν $U_0 = \{(a_n)_n \in V : \lim a_n = 0\}$, τότε το U_0 είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V (του U άρα και του V).

Αν $U_{00} = \{(a_n)_n \in V : \text{υπάρχει } n_0 \text{ με } a_n = 0 \text{ για } n \geq n_0\}$, όπου το n_0 εξαρτάται από την $(a_n)_n$, τότε ο U_{00} είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U_0 άρα και του U και του V , αφού $U_{00} \subseteq U_0 \subseteq U \subseteq V$.

(iv) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Ο μέγιστος υπόχωρος του V είναι ο ίδιος ο V .

Ο ελάχιστος υπόχωρος του V είναι ο μηδενικός υπόχωρος, το $\{0\}$.

Αν $u \in V$, τότε το υποσύνολο $A = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος.

- $0 = 0 \cdot u \in A$
- $\lambda u + \mu u = (\lambda + \mu)u \in A$
- $\lambda'(\lambda u) = (\lambda'\lambda)u \in A$

Παρατήρηση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $A, B \subseteq V$ δυο υπόχωροι.

Η τομή $A \cap B \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V :

- $0 \in A$, καθώς ο A είναι υπόχωρος
 $0 \in B$ καθώς ο B είναι υπόχωρος.
 Συνεπώς, $0 \in A \cap B$
- Έστω $u, u' \in A \cap B$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $u, u' \in A$ και άρα (καθώς ο A είναι υπόχωρος) είναι $u + u', \lambda u \in A$.
 Ομοίως, $u, u' \in B$ και άρα (καθώς ο B είναι υπόχωρος) είναι $u + u' \in B$.
 Συνεπώς, $u + u' \in A \cap B$ και $\lambda u \in A \cap B$. Προφανώς είναι:
 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Επιπλέον, αν $U \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος με $UA \subseteq A$ και $U \subseteq B$, τότε $U \subseteq A \cap B$.

Ορισμός

Ορίζω $A + B = \{u \in V : \text{υπάρχει } a \in A \text{ και } b \in B \text{ με } u = a + b\}$.

Το $A + B$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V , ο οποίος καλείται 'άθροισμα' των υποχώρων A και B .

- $0 = 0 + 0 \in A + B$

- Έστω $u, u' \in A + B$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε μπορώ να γράψω $u = a + b$ και $u' = a' + b'$ για κάποια $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$. Συνεπώς, είναι $u + u' = a + b + a' + b' = (a + a') + (b + b') \in A + B$ και $\lambda u = \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \in A + B$

Μάθημα 11

V διανυσματικός χώρος

$A, B \subseteq V$ διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός

$A + B = \{u \in V : u = a + b \text{ για κάποια } a \in A \text{ και } b \in B\}$

Γνωρίζουμε ότι ο $A + B$ είναι επίσης ένας διανυσματικός υπόχωρος του V .

Παρατηρήσεις:

(i) Είναι $A \subseteq A + B$ και $B \subseteq A + B$. Πράγματι, αν $a \in A$, τότε $a = a + 0 \in A + B$.

Άρα $A \subseteq A + B$

Ανάλογα, αν $b \in B$ τότε $b = b + 0 \in A + B$

(ii) Αν $U \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος με $A \subseteq U$ και $B \subseteq U$, τότε $A + B \subseteq U$.

Πράγματι, έστω $u \in A + B$. Τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $u = a + b$. Καθώς $A \subseteq U$ έπεται ότι $a \in U$. Ομοίως είναι $B \subseteq U$ και άρα $b \in U$.

Τελικά, είναι $a, b \in U \Rightarrow u = a + b \in U$. $A + B \subseteq U$.

Ορισμός

Αν $A, B \subseteq V$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι και $A \cap B = 0$, τότε το άθροισμα $A + B$ ονομάζεται ευθύ και γράφεται ως $A \oplus B$ (με άλλα λόγια, γράφω $W = A \oplus B$ αν είναι $W = A + B$ και $A \cap B = 0$).

Πρόταση

Έστω $A, B \subseteq V$ διανυσματικοί υπόχωροι. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο υπόχωρος $W = A \oplus B$ είναι το ευθύ άθροισμα των $A + B$.

(ii) Κάθε $w \in W = A + B$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $a + b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$.

Απόδειξη

(i \rightarrow ii) Γνωρίζουμε ότι για κάθε στοιχείο $w \in W = A + B$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $w = a + b$. Έστω ότι $a' \in A$ και $b' \in B$ με $w = a' + b'$.

Συνεπώς, είναι $a + b = a' + b' \Rightarrow a - a' = b' - b \in A \cap B$.

Όμως, $A \cap B = \{0\}$ και άρα $a - a' = b' - b = 0$. Τότε όμως $a = a'$ και $b = b'$.

(ii \rightarrow i) Για να δείξω ότι το άθροισμα $A + B$ είναι ευθύ, θα δείξω ότι $A \cap B = 0$.

Έστω $w \in A \cap B$. Τότε είναι $w \in A + B = W$ και άρα από την υπόθεση (ii) μπορώ να γράψω το w με μοναδικό τρόπο ως $a + b$ (με $a \in A$ και $b \in B$).

Παρατηρώ ότι $w = w + 0 = 0 + w$. Αναγκαστικά, πρέπει να είναι $w = 0$, $A \cap B = 0$.

Διανυσματικός Χώρος Πηλίκου

Έστω V διανυσματικός χώρος και $A \subseteq V$ διανυσματικός υπόχωρος.

Ορίζω μια σχέση στο V ως εξής: αν $v, v' \in V$ γράφω $v \sim v'$ ή $v - v' \in A$.

Παρατήρηση

Η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας:

- (ανακλαστική ιδιότητα) Αν $v \in V$, τότε $v - v = 0 \in A$ και άρα $v \sim v$
- (συμμετρική ιδιότητα) Έστω $v, v' \in V$ με $v \sim v'$.
Τότε, $v' - v \in A$ και άρα $v - v' = (-1)(v' - v) \in A$. Συνεπώς, $v' \sim v$
- (μεταβατική ιδιότητα) Έστω $v, v', v'' \in V$ με $v \sim v'$ και $v' \sim v''$.
Τότε, $v' - v \in A$, $v'' - v' \in A$. Συνεπώς, $(v' - v) + (v'' - v') \in A$, δηλαδή $v'' - v \in A$.
Άρα $v \sim v''$.

Η κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$

Από τον ορισμό είναι:

$$\begin{aligned} [v] &= \{v' \in V : v \sim v'\} = \{v' \in V : v' - v \in A\} = \\ &= \{v' \in V : \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } v' - v = a\} = \\ &= \{v' \in V : \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } v' = v + a\} =_{\text{αμβ}} v + A \end{aligned}$$

Η κλάση ισοδυναμίας $[v] = v + A$ ονομάζεται σύμπλοκο με αντιπρόσωπο το v . Θεωρώ τώρα το σύνολο πηλίκου $V/\sim = \{[v] : v \in V\} = \{v + A : v \in V\}$ και το συμβολίζω με V/A . Είναι δηλαδή:

$V/A = \{v + A : v \in V\}$. Θα ορίσω στο V/A την τομή ενός διανυσματικού χώρου.

- Πρόσθεση: Θεωρώ $v_1 + A, v_2 + A \in V/A$ (για κάποια $v_1, v_2 \in V$) και ορίζω το $(v_1 + A) + (v_2 + A) = (v_1 + v_2) + A$.

Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται δηλαδή από την επιλογή των αντιπροσώπων):

Έστω ότι $v_1 + A = v'_1 + A$ και $v_2 + A = v'_2 + A$. Θα δείξω ότι $(v_1 + v_2) + A = (v'_1 + v'_2) + A$. Πράγματι, είναι $v'_1 - v_1 \in A$ (μιας και $v_1 + A = v'_1 + A$) και $v'_2 - v_2 \in A$ (μιας και $v_2 + A = v'_2 + A$). Συνεπώς, $(v'_1 - v_1) + (v'_2 - v_2) \in A$, δηλαδή $(v'_1 + v'_2) - (v_1 + v_2) \in A$, δηλαδή $v_1 + v_2 \sim v'_1 + v'_2$, δηλαδή $(v_1 + v_2) + A = (v'_1 + v'_2) + A$.

- Εξωτερικός πολλαπλασιασμός: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v + A \in V/A$. Ορίζω $\lambda(v + A) = \lambda v + A$.

Θα πρέπει να δείξω ότι η παραπάνω πράξη δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου της κλάσης, δηλαδή ότι αν $v + A = v' + A$, τότε $\lambda v + A = \lambda v' + A$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, θα είναι $v' - v \in A$ και άρα $\lambda(v' - v) \in A$, δηλαδή $\lambda v' - \lambda v \in A$, δηλαδή $\lambda v \sim \lambda v'$, δηλαδή $\lambda v + A = \lambda v' + A$.

$$(v + A) + (w + A) = v + w + A$$

Με τον τρόπο αυτό, το σύνολο V/A παίρνει τη δομή ενός διανυσματικού χώρου (με άλλα λόγια, οι παραπάνω πράξεις ικανοποιούν τις ιδιότητες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου). Η επαλήθευση των ιδιοτήτων αυτών είναι άμεση από τον ορισμό και τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου V .

Για παράδειγμα, το αντίθετο $-(v + A)$ του $v + A \in V/A$ είναι το $(-v) + A$, μιας και $(v + A) + ((-v) + A) = (v + (-v)) + A = 0 + A$. Επιπλέον, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v_1 + A, v_2 + A \in V/A$, τότε $\lambda[(v_1 + A) + (v_2 + A)] = \lambda[(v_1 + v_2) + A] = \lambda(v_1 + v_2) + A = (\lambda v_1 + \lambda v_2) + A = (\lambda v_1 + A) + (\lambda v_2 + A) = \lambda(v_1 + A) + \lambda(v_2 + A)$.

Ορισμός

Ο διανυσματικός χώρος V/A που μόλις ορίσαμε ονομάζεται διανυσματικός χώρος πηλίκο του $V \text{ modulo } A$ (ως προς A).

Μάθημα 12

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $X \subseteq V$ με $X \neq \emptyset$. Θεωρώ το $V_0 \subseteq V$ με $V_0 = \{v \in V : \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ και } x_1, \dots, x_n \in X \text{ και } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ με } v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}$. Τότε το V_0 είναι ο ελάχιστος διανυσματικός υπόχωρος V που περιέχει το X .

Ορισμός

Γράφουμε $V_0 = \langle X \rangle$ και λέμε ότι ο V_0 είναι η γραμμική θήκη του υποσυνόλου X η ισοδύναμα ότι το X είναι σύνολο γεννητόρων του V_0 .

Απόδειξη

(i) V_0 διανυσματικός υπόχωρος:

Παρατηρώ ότι αν $x \in X$, τότε είναι $0_V = 0_{\mathbb{R}}x \in V_0$.

Έστω τώρα $v, v' \in V_0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Μπορώ να υποθέσω ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{R}$ με $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ και $v' = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n$. Τότε $v + v' = (\lambda_1 + \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2)x_2 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)x_n \in V_0$. Επιπλέον, $\lambda v = (\lambda \lambda_1)x_1 + (\lambda \lambda_2)x_2 + \dots + (\lambda \lambda_n)x_n \in V_0$.

Σημ: ο V_0 είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

(ii) $X \subseteq V_0$:

Αν $x \in X$, τότε $x = 1x \in V_0$

(iii) αν $U \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος και $X \subseteq U$, τότε $V_0 \subseteq U$:

Έστω U ένας διανυσματικός υπόχωρος του V με $X \subseteq U$. Θέλω να δείξω ότι $V_0 \subseteq U$. Για το σκοπό αυτό, θεωρώ $v \in V_0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, με $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$. Καθώς $X \subseteq U$, είναι $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$. Καθώς ο $U \subseteq V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος είναι $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n \in U$ και άρα $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in U$.

Παράδειγμα

(i) $X = \{x\}$. Τότε $\langle X \rangle = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Π.χ: $V = \mathbb{R}^2, v \in V$.

(ii) $X = \{x, y\}$. Τότε $\langle X \rangle = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Π.χ: $V = \mathbb{R}^3, v, v' \in V$

(iii) Θεωρώ το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των λύσεων V_0 του συστήματος είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Λύνω το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}z = 0 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$$\text{Άρα } V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}z \\ \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ορισμός

Έστω $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, γράφω $\langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Ερώτημα: Τι πράξεις στα v_1, v_2, \dots, v_n μπορώ να κάνω αφήνοντας τη γραμμική θήκη αμετάβλητη;

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, \dots, v_n \in V$. Τότε:

$$(i) \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle \quad (i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \neq 0)$$

$$(ii) \langle \dots, v_i, \dots, v_j, \dots \rangle = \langle \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots \rangle \quad (i \neq j, \lambda \in \mathbb{R})$$

$$(iii) \langle \dots, v_i, \dots, v_j, \dots \rangle = \langle \dots, v_j, \dots, v_i, \dots \rangle \quad (i \neq j)$$

Απόδειξη

(iii) Έστω $v \in \langle \dots, v_i, \dots, v_j, \dots \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda v_i + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i (v_i + \lambda v_j) + \dots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) v_j + \dots + \lambda_n v_n \in \langle \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j \rangle$

Αντίστροφα, έστω $v \in \langle \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j \rangle$. Τότε, υπάρχουν $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i (v_i + \lambda v_j) + \dots + \mu_j v_j + \dots + \mu_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \dots + (\mu_j + \mu_i \lambda) v_j + \dots + \mu_n v_n$$

(i) Αν $v \in \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle$, τότε μπορώ να γράψω:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \frac{\lambda_i}{\lambda} (\lambda v_i) + \dots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle.$$

Αντίστροφα, αν $v' \in \langle v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n \rangle$, τότε υπάρχουν $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ με $v' = k_1 v_1 + \dots + k_i (\lambda v_i) + \dots + k_n v_n = k_1 v_1 + \dots + (k_i \lambda) v_i + \dots + k_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle$

Ορισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, ορίζω το "χώρο των γραμμών" Γ_A του

$$A \text{ ως εξής: } \Gamma_A = \langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^{1 \times m}.$$

Πόρισμα

Αν οι $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι γραμοϊσοδύναμοι, τότε $\Gamma_A = \Gamma_B \subseteq \mathbb{R}^{1 \times m}$

Απόδειξη

Καθώς οι A, B είναι γραμοϊσοδύναμοι, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και πίνακες $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $A = A_0, A_k = B$ και A_{i+1} να προκύπτει από τον A_i εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Από την προηγούμενη πρόταση είναι: $\Gamma_{A_i} = \Gamma_{A_{i+1}}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, k-1$. Συνεπώς, $\Gamma_A = \Gamma_{A_0} = \Gamma_{A_1} = \dots = \Gamma_{A_k} = \Gamma_B$

Παράδειγμα

$$\text{Θεωρώ τον πίνακα } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι $\Gamma_A = \langle (2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών είναι:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Με βάση το πόρισμα, είναι $\Gamma_A = \langle (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 0, 0, 0) \rangle$, δηλαδή $\Gamma_A = \langle (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle$

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Τότε, $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$, αν και μόνο αν $v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$. (Δηλαδή αν $v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, για κάποιους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$).

Απόδειξη

Αν $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$ τότε παρατηρώ ότι $v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι $v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$. Τότε μπορώ να γράψω $v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, για κάποιους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Θέλω να δείξω ότι $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$. Καθώς $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$, έπεται ότι $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρώ $v \in \langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$ και γράφω $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_n (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) = (\mu_1 + \mu_n \lambda_1) v_1 + (\mu_2 + \mu_n \lambda_2) v_2 + \dots + (\mu_{n-1} + \mu_n \lambda_{n-1}) v_{n-1} \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$. Δείξαμε ότι $\langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ και άρα είναι $\langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$.

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, \dots, v_n \in V$. Τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) δεν υπάρχει i με $v_i \in \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle$

(ii) αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \in V$, τότε είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη

(i \rightarrow ii) Έστω ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με 0, ώστε $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Αν $\lambda_i \neq 0$, τότε έχω:

$-\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$ και άρα $v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_i} v_n$ και άρα $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ άτοπο.

(ii \rightarrow i) Αν είναι (για κάποιο i) $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ τότε μπορώ να γράψω

$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$ και άρα έχω την ισότητα:

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1)v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0 \in V$, άτοπο αφού $-1 \neq 0$.

Ορισμός

Τα $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα, αν αυτά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός

Το υποσύνολο $X \subseteq V$ καλείται γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι τα x_1, x_2, \dots, x_n γραμμικά ανεξάρτητα. Διαφορετικά το X καλείται γραμμικά εξαρτημένο. (Ισοδύναμα, το X είναι γραμμικά εξαρτημένο, αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ με τα x_1, \dots, x_n γραμμικά εξαρτημένα).

Παραδείγματα

(i) Τα στοιχεία $x^2 + x, x - 1, x^2 + 2 \in \mathbb{R}[X]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω ότι τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a(x^2 + x) + b(x - 1) + c(x^2 + 2) = 0$. Τότε, $(a+c)x^2 + (a+b)x + (-b+2c) =$

$$0 \in \mathbb{R}[X] \text{ και άρα είναι } \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases}$$

Λύνω το σύστημα κατά τα γνωστά:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ και άρα υπάρχει μόνο μια λύση, η μηδενική.

Άρα τα $x^2 + x$, $x - 1$, $x^2 + 2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) Τα διανύσματα $(1, -1)$, $(0, 1)$ και $(1, 1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

α' τρόπος

$$(1, 1) - (1, -1) = (0, 2) = 2(0, 1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) + (-\frac{1}{2})(1, -1)$$

β' τρόπος

Ψάχνω $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε $a(1, -1) + b(0, 1) + c(1, 1) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, δηλαδή $(a, -a) + (0, b) + (c, c) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ δηλαδή $\begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases}$

(iii) Το σύνολο $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}[X]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Πράγματι, για κάθε επιλογή $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ με $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Θα πρέπει να δείξω ότι τα $x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Υποθέτοντας ότι $\lambda_1 x^{a_1} + \lambda_2 x^{a_2} + \dots + \lambda_n x^{a_n} = 0 \in \mathbb{R}[X]$, έχω ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Το υποσύνολο $B \subseteq V$ καλείται βάση αν:

(i) το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο

(ii) $V = \langle B \rangle$.

Πρόταση

Το $B \subseteq V$ είναι μια βάση του V αν και μόνο αν για κάθε $v \neq 0, v \in V$ υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $v_1, \dots, v_n \in B$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$, ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Μάθημα 13

Ορισμός

Ένα σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\} = B \subseteq V$ καλείται βάση του V , αν τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για τα $v_1, \dots, v_n \in V$:

(i) Τα v_1, \dots, v_n αποτελούν βάση του V

(ii) Για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδική n -άδα συντελεστών $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ ώστε $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

Απόδειξη

(i \rightarrow ii)

Καθώς είναι $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, μπορώ για κάθε $v \in V$ να γράψω ότι $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ για κατάλληλα $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Αν $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, τότε $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ και άρα $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Καθώς τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά, είναι $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

(ii \rightarrow i)

Καθώς κάθε $v \in V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδιασμός των v_1, \dots, v_n είναι $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Για να δείξω ότι τα v_1, \dots, v_n αποτελούν μια βάση του V , αρκεί να δείξω ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ότι τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \in V$. Μπορώ επίσης να γράψω $0_V = 0_{\mathbb{R}} v_1 + \dots + 0_{\mathbb{R}} v_n$. Από τη μοναδικότητα της γραφής του 0_V ως γραμμικού συνδιασμού των v_1, \dots, v_n έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$.

Παραδείγματα

1) Θεωρώ τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R} . Μια βάση του αποτελεί το $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, είναι $a = a \cdot 1 = a \cdot e_1 \in \mathbb{R}$.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \cdot e_1 = 0 \Rightarrow \lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Άρα μια βάση του \mathbb{R} είναι το $\{e_1\}$.

2) Θεωρώ τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^2 .

Μια βάση του \mathbb{R}^2 αποτελείται από τα στοιχεία $(1, 0) = e_1, (0, 1) = e_2 \in \mathbb{R}^2$.

Για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ μπορώ να γράψω:

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = ae_1 + be_2$. Άρα $\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$.

Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda e_1 + \mu e_2 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, τότε $\lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

Άρα τα e_1, e_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3) Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 αποτελείται από τα $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Γενικά μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n αποτελούν τα στοιχεία $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$

Για κάθε $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορώ να γράψω:

$u = (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, \dots, 0, 1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$. Άρα $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

και άρα $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Άρα τα $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4) Μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 αποτελούν τα στοιχεία $u_1 = (1, -1)$ και $u_2 = (1, 2)$.

Θεωρώ ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ και ψάχνω $x, y \in \mathbb{R}$ με $u = xu_1 + yu_2$. Αν γράψω $u = (a, b)$, έχω ότι:

$$(a, b) = x(1, -1) + y(1, 2) = (x, -x) + (y, 2y) = (x + y, -x + 2y) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -x + 2y = b \end{cases}$$

$$\text{Άρα είναι } y = \frac{a+b}{3} \text{ και } x = \frac{2a-b}{3}$$

Καθώς το γραμμικό σύστημα λύνεται για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ συμπεραίνω ότι $\mathbb{R}^2 = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Καθώς η λύση είναι μοναδική, με βάση την πρόταση, τα u_1, u_2 αποτελούν βάση του \mathbb{R}^2 .

5) Τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, 0, -1)$ δεν αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Θα δούμε ότι τα u_1, u_2 δεν παράγουν τον \mathbb{R}^3 . Θεωρώ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ και ψάχνω $x, y \in \mathbb{R}$ με $(a, b, c) = x(1, 1, 1) +$

$$y(2, 0, -1) \Rightarrow (a, b, c) = (x, x, x) + (2y, 0, -y) \Rightarrow (a, b, c) = (x + 2y, x, x - y) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x = b \\ x - y = c \end{cases}$$

Πρέπει να είναι $x = b$ και άρα πρέπει $\begin{cases} 2y = a - b \\ y = b - c \end{cases}$

Αν $\frac{a-b}{2} \neq b-c$ το σύστημα δεν έχει λύση.

Π.χ: $a = 1, b = c = 0$. Το $(1, 0, 0)$ δε μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδιασμός των $(1, 1, 1), (2, 0, -1)$ (μιας και το αντίστοιχο σύστημα δε λύνεται), δηλαδή $(1, 0, 0) \notin \langle (1, 1, 1), (2, 0, -1) \rangle$ και άρα $\langle (1, 1, 1), (2, 0, -1) \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

6) Θεωρώ τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[X] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq 2\}$.

Τότε τα στοιχεία $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x^2 - 1, f_3(x) = x^2 + x$ δεν αποτελούν βάση. Θα δείξω ότι τα $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρώ $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με $\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) + \nu f_3(x) = 0 \in \mathbb{R}_2[x]$. Τότε είναι $\lambda(x+1) + \mu(x^2-1) + \nu(x^2+x) = 0 \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow$

$$\lambda x + \lambda + \mu x^2 - \mu + \nu x^2 + \nu x = 0 \Rightarrow (\mu + \nu)x^2 + (\lambda + \nu)x + (\lambda - \mu) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

Πρέπει $\lambda = \mu = -\nu \in \mathbb{R}$. Άρα η τριάδα $\lambda = 1, \mu = 1, \nu = -1$ είναι μια (μη μηδενική) λύση.

$$1f_1(x) + 1f_2(x) - 1f_3(x) = 0 \Leftrightarrow f_3(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες. Υποθέτω ότι ο B είναι σε ανοιγμένη κλιμα-

κωτή μορφή και γράφω $B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}^m$.

Αν η k -οστή γραμμή $r_k \neq (0, 0, \dots, 0)$ και $r_{k+1} = \dots = r_n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, τότε μια βάση του διανυσματικού χώρου $r_A \subseteq \mathbb{R}^m$ των γραμμών του A αποτελούν οι μη-μηδενικές γραμμές r_1, r_2, \dots, r_k του B.

Παράδειγμα

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$. Θεωρώ τις γραμμές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}^4$, όπου $\gamma_1 =$

$(1, 0, -1, 2), \gamma_2 = (0, 2, 1, 6), \gamma_3 = (-1, 4, 3, 10)$ και τον διανυσματικό υπόχωρο $\Gamma_A = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Εφαρμόζω τον αλγόριθμο απαλοιφής του Gauss.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Τότε, μια βάση του Γ_A αποτελούν τα $(1, 0, -1, 2), (0, 1, \frac{1}{2}, 3)$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\Gamma_A = \Gamma_B = \langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle = \langle r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n \rangle = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$. Συνεπώς οι γραμμές $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{R}^m$ παράγουν το διανυσματικό χώρο Γ_A . Μένει να δείξω ότι τα r_1, \dots, r_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Χρησιμοποιώ επαγωγή στο k .

$k = 1$: $r_1 = (0, \dots, 0, 1, *, \dots, *) \neq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

Αν $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 r_1 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, τότε (καθώς $r_1 \neq (0, 0, \dots, 0)$) είναι $\lambda_1 = 0$. Υποθέτω ότι το ζητούμενο ισχύει αν ο B έχει k μη-μηδενικές γραμμές. Θεωρώ $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Είναι:

$$r_1 = (0, \dots, 0, 1, *, \dots, *)$$

$$r_2 = (0, \dots, 0, 0, 1, *, \dots, *)$$

⋮

$$r_k = (0, \dots, 0, 0_{(k-οστη\ θέση)}, *, \dots, *)$$

Άρα η p -θέση (συντεταγμένη) του $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k \in \mathbb{R}^m$ είναι ίση με λ_1 . Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\lambda_1 = 0$. Άρα, $\lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ και άρα (από την n επαγωγική

υπόθεση) είναι $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Άρα, τα r_1, \dots, r_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Στόχος 1: Κάθε διανυσματικός χώρος V έχει βάση.

Στόχος 2: Κάθε 2 βάσεις του διανυσματικού χώρου V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ με $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. Τότε υπάρχουν $v'_1, v'_2, \dots, v'_n \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, τα οποία αποτελούν βάση του V .

Απόδειξη

Αν τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αυτά αποτελούν μια βάση του V . Αν όχι, μπορώ να βρω ένα i με $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$. Τότε είναι $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, δηλαδή $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = V$. Αν τα $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αυτά αποτελούν βάση του V . Αν όχι, βρίσκω $n-2$ στοιχεία από τα v_1, \dots, v_n (πετώντας εκτός από τα v_i και κάποιο άλλο v_j), τα οποία παράγουν το V .

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Αν τα $v_1, \dots, v_n \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα $v'_1, \dots, v'_m \in V$ παράγουν τον V (δηλ $V = \langle v'_1, \dots, v'_m \rangle$), τότε $n \leq m$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώ επαγωγή στο n . Αν $n = 0$, προφανές.

Αν $n = 1$, $v_1 \in V$ γραμμικά ανεξάρτητο $\rightarrow v_1 \neq 0 \in V \Rightarrow V \neq \{0\} \Rightarrow m \geq n$.

Επαγωγικό βήμα: Γνωρίζω ότι $v_1, \dots, v_n \in V = \langle v'_1, \dots, v'_m \rangle$. Αν $v_1, \dots, v_n \in \langle v'_1, \dots, v'_{m-1} \rangle$, τότε θεωρώντας τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα v_1, \dots, v_{n-1} του διανυσματικού χώρου $\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle$, από την επαγωγική υπόθεση έχω ότι $n-1 \leq m-1 \Rightarrow n \leq m$.

Διαφορετικά, μπορώ να υποθέσω ότι $v_n \in \langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \setminus \langle v'_1, \dots, v'_{m-1} \rangle$. Άρα, είναι

$v_n = \lambda_{n1} v'_1 + \lambda_{n2} v'_2 + \dots + \lambda_{n,m-1} v'_{m-1} + \lambda_{nm} v'_m$, με $\lambda_{nm} \neq 0$.

Γράφω ανάλογα $v_i = \lambda_{i1} v'_1 + \dots + \lambda_{i,m-1} v'_{m-1} + \lambda_{im} v'_m$, για κάθε $i = 1, \dots, n-1$ και θεωρώ τα διανύσματα:

$$v_1 - \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{nm}} v'_m, v_2 - \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{nm}} v'_m, \dots, v_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1,m}}{\lambda_{nm}} v'_m.$$

Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ανήκουν στην $\langle v'_1, \dots, v'_{n-1} \rangle$. Συνεπώς είναι (από την επαγωγική υπόθεση) $n-1 < m-1 \Rightarrow n \leq m$.

Μάθημα 14

Αν ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από k διανύσματα και υπάρχουν λ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον V_1 , τότε $\lambda \leq k$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος V έχει τουλάχιστον μια βάση.

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Αν v_1, \dots, v_n και u_1, \dots, u_m είναι δυο βάσεις του V , τότε $n = m$.

Ορισμός

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η διάσταση του V είναι n (ή ότι ο V είναι n -διάστατος διανυσματικός χώρος) και γράφουμε $\dim_R V = n$.

Απόδειξη πρότασης:

Καθώς τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα u_1, \dots, u_m παράγουν το διανυσματικό χώρο V , θα πρέπει να είναι $n \leq m$. Καθώς τα u_1, \dots, u_m είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα v_1, \dots, v_n παράγουν το διανυσματικό χώρο V , έπεται ότι $m \leq n$. Συνεπώς είναι $n = m$.

Παραδείγματα

1) $\dim \mathbb{R}^n = n$. Πράγματι, γνωρίσαμε ότι μια βάση του \mathbb{R}^n αποτελείται από τα e_1, \dots, e_n

2) $\dim \mathbb{R}^{n \times m} = n \cdot m$

3) Θεωρώ το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq n\}$.

Τότε $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$. Μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[n]$ αποτελούν τα $1, x, x^2, \dots, x^n$.

4) Έστω $T_n(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων. Με άλλα λόγια, $T_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ και $T_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ για } i > j\}$.

Είναι $\dim T_n(\mathbb{R}) = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Μια βάση του διανυσματικού χώρου $T_n(\mathbb{R})$ αποτελούν οι πίνακες

$n \rightarrow E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}$

$n-1 \rightarrow E_{22}, E_{23}, \dots, E_{2n}$

$n-2 \rightarrow E_{33}, E_{34}, \dots, E_{3n}$

\vdots

$E_{(n-1)(n-1)}, E_{(n-1)n}, E_{nn}$

Πρόταση

Θεωρώ ένα διανυσματικό χώρο V και n στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Τότε οι 2 από τις 3 παρακάτω ιδιότητες συνεπάγονται την τρίτη.

(i) $\dim V = n$

(ii) τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(iii) τα v_1, v_2, \dots, v_n παράγουν το διανυσματικό χώρο V .

Απόδειξη

(ii), (iii) \Rightarrow (i) :

Από τον ορισμό, έπεται ότι τα v_1, v_2, \dots, v_n αποτελούν βάση του V και άρα $\dim V = n$.

(i), (ii) \Rightarrow (iii) :

Θέλω να δείξω ότι $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Διαφορετικά μπορώ να επιλέξω $v \in V \setminus \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Θα δείξω ότι τα v_1, \dots, v_n, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0 \in V$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + -\frac{\lambda_n}{\lambda} v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, άτοπο. Άρα, είναι $\lambda = 0$ και έτσι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$.

Καθώς τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα πρέπει να είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Πράγματι λοιπόν τα v_1, v_2, \dots, v_n, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς ο V περιέχει $n+1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Καθώς $\dim V = n$, ο V μπορεί να παραχθεί από κάποια n το πλήθος στοιχεία w_1, w_2, \dots, w_n , άτοπο. Άρα πρέπει να είναι $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

(i), (iii) \Rightarrow (ii) :

Αν τα v_1, \dots, v_n δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μπορώ να βρω i , ώστε $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

Τότε είναι $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = V$. Συνεπώς ο διανυσματικός χώρος V μπορεί να παραχθεί από $(n-1)$ το πλήθος διανύσματα. Καθώς ο διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση n , υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V με n στοιχεία. Άτοπο!

Σημείωση: Τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λήμμα

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος χώρος διανυσματικός χώρος V και $v_1, \dots, v_n \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε υπάρχει βάση του V της μορφής $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m$ ($m = \dim V$).

Απόδειξη

Έστω $m = \dim V$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν m το πλήθος στοιχεία που παράγουν το V , και άρα $n \leq m$. Χρησιμοποιώ επαγωγή στο $m - n$. Αν $m - n = 0$, τότε $n = m = \dim V$. Καθώς $\dim V = n$ και τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι τα v_1, \dots, v_n παράγουν τον V , δηλαδή $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Έτσι, τα v_1, \dots, v_n αποτελούν μια βάση του V . Υποθέτω τώρα ότι το $m - n > 0$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για ζεύγη (n', m') με $m' - n' < m - n$. Είναι $n < m = \dim V$ και άρα $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \neq V$. (Καθώς $\dim V = m$, υπάρχουν m το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και άρα κάθε σύνολο γεννητόρων του V έχει $\geq m$ πλήθος στοιχείων). Υπάρχει $v_{n+1} \in V \setminus \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Τότε τα στοιχεία v_1, \dots, v_n, v_{n+1} είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \in V$, τότε πρέπει $\lambda_{n+1} = 0$ (διαφορετικά θα ήταν $v_{n+1} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ΑΤΟΠΟ).

Συνεπώς, είναι $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \in V$ και άρα (λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των v_1, \dots, v_n) πρέπει $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής μπορώ να συμπληρώσω τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα v_1, \dots, v_n, v_{n+1} σε μια βάση του V (μιας και $m - (n+1) = m - n - 1 < m - n$).

Πόρισμα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$ και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρος. Τότε:

- (i) $\dim U \leq \dim V$ και
- (ii) $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$.

Απόδειξη

(i) Ο διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση n και άρα υπάρχει σύνολο γεννητόρων του V με n το πλήθος στοιχεία. Άρα κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του V έχει $\leq n$ στοιχεία. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $U \leq n$ στοιχεία.

Αν $U = 0$, τότε $\dim U = 0$.

Αν $U \neq 0$, επιλέγω $u \in U$, $u \neq 0$.

Αν $U = \langle u \rangle$, τότε το U είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Αν $U \neq \langle u \rangle$, τότε επιλέγω $u' \in U \setminus \langle u \rangle$ και δείχνω όπως πριν ότι τα u, u', u'' είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η διαδικασία αυτή τελειώνει μετά από το πολύ n βήματα και άρα έχω μια βάση του U με $\leq n$ στοιχεία. Άρα $\dim U \leq n = \dim V$.

(ii) (\Rightarrow) OK

(\Leftarrow) Υποθέτω ότι $\dim U = \dim V = n$ και βρίσκω μια βάση u_1, \dots, u_n του U . Τα u_1, \dots, u_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του U , άρα και του V . Καθώς $\dim V = n$, έπεται ότι u_1, \dots, u_n παράγουν τον V , δηλαδή $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = U$ και άρα $U = V$.

Πόρισμα

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και μάλιστα $\dim U \leq \dim V = n$.

Έστω u_1, \dots, u_k μια βάση του U (όπου $k = \dim U$). Τα u_1, \dots, u_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα μπορώ να βρω μια βάση του V της μορφής $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$. Ορίζω $u' = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$. (Παρατηρώ ότι τα u_{k+1}, \dots, u_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\dim U' = n - k$). Θα δείξω ότι $V = U \oplus U'$, δηλαδή ότι $V = U + U'$ και $U \cap U' = 0$.

Έστω $v \in V$. Καθώς τα $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ αποτελούν μια βάση του V , μπορώ να γράψω $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n$. Θέτω $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ και $u' = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$,

οπότε είναι $v = u + u' \in U + U'$.

Έστω $w \in U \cap U'$. Τότε είναι $w \in U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ και άρα $w = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ για κατάλληλα $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Ομοίως είναι $w \in U' = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$ και άρα μπορώ να γράψω $w = \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_n u_n$ για κάποια $\mu_{k+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Τελικά είναι $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = w = \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_n u_n$ και άρα $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k + (-\mu_{k+1}) u_{k+1} + \dots + (-\mu_n) u_n = 0 \in V$.

Τα $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ αποτελούν βάση του V και άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, είναι $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ και έτσι $w = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = 0$.

Παρατήρηση

$$\dim V = n = k + (n - k) = \dim U + \dim U'.$$

Πρόταση

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $U, W \subseteq V$ δυο διανυσματικοί υπόχωροι. Τότε, $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Απόδειξη

Έστω a_1, \dots, a_k μια βάση του $U \cap W$ (οπότε είναι $k = \dim(U \cap W)$). Μπορώ να συμπληρώσω τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα a_1, \dots, a_k σε μια βάση $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\lambda$ του U (οπότε $k + \lambda = \dim U$). Ομοίως μπορώ να συμπληρώσω τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα a_1, \dots, a_k σε μια βάση $a_1, \dots, a_k, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ του W (οπότε είναι $k + \mu = \dim W$). Θα δείξω ότι τα $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ αποτελούν μια βάση του $U + W$. Τότε θα είναι $\dim(U + W) = k + \lambda + \mu = (k + \lambda) + (k + \mu) - k = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Έστω $v \in U + W$. Τότε μπορώ να γράψω $v = u + w$, για κάποια $u \in U$ και $w \in W$. Μπορώ τώρα να γράψω:

$$u = \sum_{i=1}^k x_i a_i + \sum_{j=1}^{\lambda} y_j b_j \text{ και } w = \sum_{i=1}^k z_i a_i + \sum_{p=1}^{\mu} t_p \gamma_p \text{ για κατάλληλα } x_i, y_j, z_i, t_p \in \mathbb{R}. \text{ Συνεπώς, είναι}$$

$$v = u + w = \sum_{i=1}^k (x_i + z_i) a_i + \sum_{j=1}^{\lambda} y_j b_j + \sum_{p=1}^{\mu} t_p \gamma_p. \text{ Άρα τα διανύσματα } a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu$$

παράγουν τον $U + W$.

Έστω ότι $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\lambda, z_1, \dots, z_\mu \in \mathbb{R}$ με $\sum_i x_i a_i + \sum_j y_j b_j + \sum_p z_p \gamma_p = 0 \in U + W$. Τότε

είναι:

$$\sum_i x_i a_i + \sum_j y_j b_j = - \sum_p z_p \gamma_p \in U \cap W.$$

Συνεπώς είναι $-\sum_p z_p \gamma_p = \sum_i x'_i a_i$, για κάποια $x'_i \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\sum_i x'_i a_i + \sum_p z_p \gamma_p = 0$. Τα

$a_1, \dots, a_k, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ είναι (ως μια βάση του W) γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, είναι $z_p = 0$ για κάθε $p = 1, \dots, \mu$. Είναι τώρα $\sum_i x_i a_i + \sum_j y_j b_j = 0$ και (καθώς τα $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\lambda$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητα) έπεται ότι $x_i = 0$ για $i = 1, \dots, k$ και $y_j = 0$ για $j = 1, \dots, \lambda$.

Μάθημα 15

Παράδειγμα

Θεωρώ τους υποχώρους $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

$A = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1), (1, 0, -2, 1) \rangle$ και $B = \langle (0, 1, 0, -1), (0, -1, 2, -1) \rangle$.

Να βρεθούν οι βάσεις και οι διαστάσεις των $A, B, A + B, A \cap B$.

Λύση

Ο υπόχωρος A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς μια βάση του A αποτελούν τα $(1, 0, -1, 0)$ και $(0, 0, 1, -1)$ και άρα $\dim A = 2$

Ο υπόχωρος B

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς μια βάση του B αποτελούν τα $(0, 1, 0, -1)$ και $(0, 0, 1, -1)$ και άρα $\dim B = 2$.

Ο υπόχωρος $A + B$

$A + B = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, -2, 1), (0, 1, 0, -1), (0, -1, 2, -1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, μια βάση του $A + B$ αποτελούν τα διανύσματα $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$ και $(0, 0, 1, -1)$. Άρα, $\dim(A + B) = 3$.

Ο υπόχωρος $A \cap B$: Γνωρίζουμε ότι:

$$\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B) \Rightarrow 2 + 2 = 3 + \dim(A \cap B) \Rightarrow \dim(A \cap B) = 1$$

$$\begin{aligned} \Psi\acute{\alpha}\chi\nu\omega \text{ να βρω } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ με } a(1, 0, -1, 0) + b(1, 0, 0, -1) + c(1, 0, -2, 1) &= d(0, 1, 0, -1) + \\ e(0, -1, 2, -1) &\Rightarrow (a, 0, -a, 0) + (b, 0, 0, -b) + (c, 0, -2c, c) = (0, d, 0, -d) + (0, -e, 2e, -e) \Rightarrow \\ (a + b + c, 0, -a - 2c, -b + c) &= (0, d - e, 2e, -d - e) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ d - e = 0 \\ -a - 2c = 2e \\ -b + c = -d - e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ d - e = 0 \\ a + 2c + 2e = 0 \\ -b + c + d + e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & - & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c + 2e = 0 \\ b - c - 2e = 0 \\ d - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c - 2e \\ b = c + 2e \\ d = e \end{cases} \quad (c, e \in \mathbb{R} \text{ ελεύθερες παράμετροι})$$

Για $c = e = 1$, παίρνω $a = -4, b = 3, d = 1$.

Έχω το στοιχείο $a(1, 0, -1, 0) + b(1, 0, 0, -1) + c(1, 0, -2, 1) = -4(1, 0, -1, 0) + 3(1, 0, 0, -1) + (1, 0, -2, 1) = (-4, 0, 4, 0) + (3, 0, 0, -3) + (1, 0, -2, 1) = (0, 0, 2, -2)$
 Συνεπώς μια βάση του 1-διάστατου διανυσματικού χώρου $A \cap B$ αποτελεί το διάνυσμα $(0, 0, 2, -2)$.

Παράδειγμα

Έστω $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ και $V = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
 Να βρεθεί η $\dim V$ και υπόχωρος $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ με $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$.

Λύση

Παρατηρώ ότι $\langle v_2 \rangle = \{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ και άρα $v_1 \notin \langle v_2 \rangle$. Συνεπώς, τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\dim V = 2$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε υπόχωρο $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ με $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$ είναι $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V + \dim V' \Rightarrow 3 = 2 + \dim V' \Rightarrow \dim V' = 1$.

Γνωρίζω ότι αν συμπληρώσω τα v_1, v_2 (που είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς αποτελούν βάση του V) σε μια βάση v_1, v_2, v_3 του \mathbb{R}^3 , τότε είναι $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$, όπου $V' = \langle v_3 \rangle$. Σύμφωνα με τη θεωρία, αν $v \in \mathbb{R}^3$ και $v \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ τότε τα $v_1, v_3, v \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όμως είναι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ και άρα τα v_1, v_2, v αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Υπάρχει τέτοιο v , μιας και $V \neq \mathbb{R}^3$. Ψάχνω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για το οποίο δεν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με

$$(x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(1, 0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ 2a = y \\ 3a + b = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & : & x \\ 2 & 0 & : & y \\ 3 & 1 & : & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & : & x \\ 0 & -2 & : & y - 2x \\ 0 & -2 & : & z - 3x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & : & y \\ 0 & -2 & : & y - 2y \\ 0 & 0 & : & z - x - y \end{pmatrix}$$

Για να λυθεί το σύστημα πρέπει να είναι $z - x - y = 0 \Rightarrow z = x + y$.

Έτσι, το $v = (11, 402, 1000) \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ και μπορώ να επιλέξω $V' = \langle v \rangle$.

Πρόταση

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρός του. Τότε, ο διανυσματικός χώρος πηλίκο V/U είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα είναι $\dim V/U = \dim V - \dim U \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

$(V/U = \{v + U : v \in V\})$ και αν $v, v' \in V$ τότε $v + U = v' + U \in V/U \Leftrightarrow v' - v \in U$.

Έστω ότι $\dim V = n$ και $\dim U = k$. Γνωρίζουμε ότι $k \leq n$. Θεωρώ μια βάση u_1, \dots, u_k του U και την επεκτείνω σε μια βάση $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}$ του V . Θεωρώ τα στοιχεία $x_1, \dots, x_{n-k} \in V/U$ όπου $x_i = v_i + U$ για $i = 1, \dots, n - k$. Θα δείξω ότι τα x_1, \dots, x_{n-k} αποτελούν μια βάση του V/U (οπότε θα είναι $\dim V/U = n - k = \dim V - \dim U$).

Έστω $x \in V/U$. Τότε υπάρχει $v \in V$ με $x = v + U$. Γνωρίζω ότι μπορώ να γράψω $V = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-k} v_{n-k}$ για κατάλληλα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Καθώς $v = (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-k} v_{n-k}) \in U$, έπεται ότι $x = v + U = (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-k} v_{n-k}) + U = \mu_1(v_1 + U) + \dots + \mu_{n-k}(v_{n-k} + U) = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n-k} x_{n-k}$.

Έστω $a_1, \dots, a_{n-k} \in \mathbb{R}$ με $a_1 x_1 + \dots + a_{n-k} x_{n-k} = 0 + U \in V/U$. Τότε, αν $(a_1 v_1 + \dots + a_{n-k} v_{n-k}) + U = a_1(v_1 + U) + \dots + a_{n-k}(v_{n-k} + U) = a_1 x_1 + \dots + a_{n-k} x_{n-k} = 0 + U$ και άρα είναι $a_1 v_1 + \dots + a_{n-k} v_{n-k} \in U$. Συνεπώς είναι $a_1 v_1 + \dots + a_{n-k} v_{n-k} = b_1 v_1 + \dots + b_{n-k} v_{n-k}$ για κάποια $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$. Καθώς τα $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι $b_i = 0$ και $a_1 = \dots = a_{n-k} = 0 \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Έστω $V = \langle (1, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του \mathbb{R}^3/V .

Λύση

Καθώς $V = \langle (1, 1, 1) \rangle$ και $(1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, μια βάση του V αποτελείται από το $(1, 1, 1)$ και άρα $\dim V = 1$. (Γνωρίζω ότι είναι $\dim \mathbb{R}^3/V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V = 3 - 1 = 2$). Θέλω να επεκτείνω το v σε μια βάση v, v', v'' του \mathbb{R}^3 . (Γνωρίζω ότι τότε μια βάση του \mathbb{R}^3/V αποτελούν τα στοιχεία $v' + V, v'' + V \in \mathbb{R}^3/V$). Θεωρώ την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του \mathbb{R}^3 .

Γνωρίζω ότι $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ και άρα $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3, v \rangle$. Παρατηρώ ότι $v = e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow e_3 = v - e_1 - e_2 \in \langle e_1, e_2, v \rangle$. Συνεπώς, είναι $\langle e_1, e_2, v \rangle = \langle e_1, e_2, e_3, v \rangle = \mathbb{R}^3$ και άρα τα e_1, e_2, v παράγουν τον \mathbb{R}^3 . Καθώς $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, έπεται ότι τα e_1, e_2, v αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Συνεπώς μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3/V αποτελείται από τα $e_1 + V, e_2 + V$.

Μάθημα 16

Ορισμός

Μια απεικόνιση $f : U \rightarrow V$, όπου U, V είναι διανυσματικοί χώροι λέγεται γραμμική (R -γραμμική) αν:

- (i) $f(u + u') = f(u) + f(u')$ αν $u, u' \in U$ και
- (ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in U$.

Παραδείγματα

(i) Για κάθε διανυσματικό χώρο V και $\lambda \in \mathbb{R}$ απεικόνιση $r : V \rightarrow V$ με $r(u) = \lambda u$ για κάθε $u \in V$ είναι γραμμική.

Πράγματι, αν $u, u' \in V$ και $a \in \mathbb{R}$ τότε:

$$r(u + u') = \lambda(u + u') = \lambda u + \lambda u' = r(u) + r(u') \text{ και}$$

$$r(au) = \lambda(au) = (\lambda a)u = (a\lambda)u = a(\lambda u) = ar(u)$$

(ii) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z) = (2x - y, x + z, y + 3z, y)$ είναι γραμμική. Θεωρώ $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και υπολογίζω: $f[(x, y, z) + (x' + y' + z')] = f(x + x', y + y', z + z') = (2(x + x') - (y + y'), (x + x') + (z + z'), (y + y') + 3(z + z'), y + y') = (2x - y, x + z, y + 3z, y) + (2x' - y', x' + z', y' + 3z', y') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ και $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z, \lambda y + 3\lambda z, \lambda y) = \lambda(2x - y, x + z, y + 3z, y) = \lambda f(x, y, z)$

(iii) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Θεωρώ τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{m \times k}$ και $\mathbb{R}^{n \times k}$ και την απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^{m \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ με $L_A(B) = AB \in \mathbb{R}^{n \times k}$ για κάθε $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$.

Η L_A είναι γραμμική.

Θεωρώ $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times k}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε είναι $L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$ και $L_A(\lambda B_1) = A(\lambda B_1) = \lambda AB_1 = \lambda L_A(B_1)$

(iv) Θεωρώ $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{k \times n}$ και $\mathbb{R}^{k \times m}$. Τότε η απεικόνιση $R_A : \mathbb{R}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times m}$ με $R_A(\Gamma) = \Gamma A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ για κάθε $\Gamma \in \mathbb{R}^{k \times n}$ είναι γραμμική.

Αν Γ_1, Γ_2 και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

$$R_A(\Gamma_1 + \Gamma_2) = (\Gamma_1 + \Gamma_2)A = \Gamma_1 A + \Gamma_2 A = R_A(\Gamma_1) + R_A(\Gamma_2) \text{ και}$$

$$R_A(\lambda \Gamma_1) = (\lambda \Gamma_1)A = \lambda \Gamma_1 A = \lambda R_A(\Gamma_1)$$

(v) Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ με $\phi(A) = A^t$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι γραμμική.

Πράγματι, αν $A, A' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε είναι:

$$\phi(A + A') = (A + A')^t = A^t + A'^t = \phi(A) + \phi(A') \text{ και}$$

$$\phi(\lambda A) = (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda \phi(A)$$

(vi) Η απεικόνιση $D : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ με $D(A) = \det(A) \in \mathbb{R}$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ δεν είναι γραμμική (αν $n > 1$).

Παρατηρώ ότι $D(I_n + I_n) = D(2I_n) = 2^n$, ενώ $D(I_n) + D(I_n) = 1 + 1 = 2$
 $2^n \neq 2$

(vii) Η απεικόνιση $\sigma : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ με $\sigma[f(x)] = 2f'(x) - 31f''(x)$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ είναι γραμμική.

(Εδώ αν $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ είναι $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ και $f''(x) = \sum_{i=2}^n i(i-1) a_i x^{i-2}$)

Αν $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $\sigma[f(x) + g(x)] = 2(f(x) + g(x))' - 31(f(x) + g(x))'' = 2(f'(x) + g'(x)) - 31(f''(x) + g''(x)) = [2f'(x) - 31f''(x)] + [2g'(x) - 31g''(x)] = \sigma[f(x)] + \sigma[g(x)]$ και $\sigma[\lambda f(x)] = 2(\lambda f(x))' - 31(\lambda f(x))'' = 2\lambda f'(x) - 31\lambda f''(x) = \lambda[2f'(x) - 31f''(x)] = \lambda\sigma[f(x)]$.

Ιδιότητες

Έστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) $f(0_U) = 0_V \in V$

Πράγματι, $f(0_U) = f(0_{\mathbb{R}} 0_U) = 0_{\mathbb{R}} f(0_U) = 0_V$

(ii) $f(-u) = -f(u)$

Είναι $f(-u) = f[(-1)u] = (-1)f(u) = -f(u)$

(iii) Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $u_1, \dots, u_n \in U$, τότε $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$, δηλαδή $f(\lambda_1 u_1 + \dots +$

$\lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$. Υπολογίζω:

$f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = f(\lambda_1 u_1) + \dots + f(\lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$

Παρατήρηση

Αν η $f : U \rightarrow V$ είναι τέτοια ώστε $f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$ για κάθε $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ και $u, u' \in U$, τότε η f είναι γραμμική:

Θέτοντας $\lambda = \lambda' = 1$, παίρνω ότι $f(u + u') = f(u) + f(u')$ για $u, u' \in U$.

Για $\lambda' = 0$ παίρνω $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Παραδείγματα

(i) Για κάθε διανυσματικό χώρο V η $I_V : (v) = v$ για κάθε $v \in V$ είναι γραμμική.

Πράγματι, αν $v, v' \in V$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ τότε είναι:

$I_V(\lambda v + \lambda' v') = \lambda I_V(v) + \lambda' I_V(v')$

(ii) Πιο γενικά, αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος, τότε ο εγκλεισμός (ενθετική απεικόνιση) $i : U \rightarrow V$ με $i(u) = u \in V$ για κάθε $u \in U$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. (Αν $u, u' \in U$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ τότε $i(\lambda u + \lambda' u') = \lambda u + \lambda' u' = \lambda i(u) + \lambda' i(u')$)

(iii) Αν V ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρος, τότε η απεικόνιση πηλίκο $\pi : V \rightarrow V/U$ με $\pi(v) = v + U$ για κάθε $v \in V$ είναι γραμμική. Πράγματι, αν $v, v' \in V$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, τότε είναι:

$\pi(\lambda v + \lambda' v') = (\lambda v + \lambda' v') + U = (\lambda v + U) + (\lambda' v' + U)$ (:ορισμός αθροίσματος στον $V/U = \lambda(v + U) + \lambda'(v' + U)$ (:ορισμός εξωτερικού γινομένου στον $V/U) = \lambda\pi(v) + \lambda'\pi(v')$

(iv) Έστω $f : U \rightarrow V$ και $g : V \rightarrow W$ δυο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε η απεικόνιση $g \circ f : U \rightarrow W$ είναι επίσης γραμμική. Αν $u_1, u_2 \in U$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τότε $(g \circ f)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = g[f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)] = g[\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2)] = \lambda_1 g[f(u_1)] + \lambda_2 g[f(u_2)] = \lambda_1 (g \circ f)(u_1) + \lambda_2 (g \circ f)(u_2)$

Υπενθύμιση

X, Y σύνολο, $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση, $X' \subseteq X$ υποσύνολο.

$f(X') = \{y \in Y : y = f(x') \text{ για κάποιο } x' \in X'\}$

$Y' \subseteq Y$

$$f^{-1}(y') = \{x \in X : f(x) \in Y'\}$$

Πρόταση

Έστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Αν $U' \subseteq U$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος τότε το $f(U') \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος του V .

(ii) Αν $V' \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος του V , τότε το $f^{-1}(V') \subseteq U$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U .

Απόδειξη

(i) Είναι $0 \in U'$ και άρα $0 = f(0) \in f(U')$

Έστω $v_1, v_2 \in f(U')$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν $u_1, u_2 \in U'$ με $v_1 = f(u_1)$ και $v_2 = f(u_2)$. Συνεπώς, $v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in f(U')$ και $\lambda v_1 = \lambda f(u_1) = f(\lambda u_1) \in f(U')$.

(ii) Είναι $f(0_U) = 0_V \in V'$ και άρα $0_U \in f^{-1}(V')$.

Θεωρώ $u_1, u_2 \in f^{-1}(V')$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θέλω να δείξω ότι $u_1 + u_2, \lambda u_1 \in f^{-1}(V')$. Όμως είναι $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \in V' \Rightarrow u_1 + u_2 \in f^{-1}(V')$ και $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) \in V' \Rightarrow \lambda u_1 \in f^{-1}(V')$.

Ειδικές περιπτώσεις ($f : U \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση)

Η εικόνα $f(U) \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος ονομάζεται εικόνα της f και συμβολίζεται με $Im f$.

Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(0 \subseteq U)$ είναι ένας υπόχωρος του U , ο οποίος ονομάζεται πυρήνας της f και συμβολίζεται με $Ker f$. Με άλλα λόγια είναι:

$$Im f = \{v \in V : \text{υπάρχει } u \in U \text{ με } v = f(u)\}$$

$$ker f = \{u \in U : f(u) = 0\}$$

Παρατηρήσεις

(i) Η γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ είναι επί αν και μόνο αν $Im f = V$.

(ii) Η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1 αν και μόνο αν $ker f = 0$

[\Rightarrow] Υποθέτω ότι η f είναι 1-1 και θεωρώ $u \in ker f$. Τότε είναι $f(u) = 0 = f(0) \Rightarrow u = 0$ ($f : 1 - 1$). Άρα $ker f = 0$

[\Leftarrow] Υποθέτω ότι $ker f = 0$ και θεωρώ $u, u' \in U$ με $f(u) = f(u')$. Καθώς είναι $f(u - u') = f(u) - f(u') = 0 \in V$ έπεται ότι $u - u' \in ker f = 0$, δηλαδή $u - u' = 0 \in U \Rightarrow u = u'$

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$:

(i) Η f είναι 1-1 και επί.

(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \rightarrow U$ με $f \circ g = I_V$, και $g \circ f = I_U$.

Απόδειξη

(ii) \rightarrow (i) OK

(i) \rightarrow (ii) Γνωρίζουμε ότι υπάρχει η συνάρτηση $f^{-1} : V \rightarrow U$ (η οποία είναι τέτοια ώστε $f \circ f^{-1} = I_V$ και $f^{-1} \circ f = I_U$)

Θα δείξω ότι η f^{-1} είναι γραμμική.

Έστω $v_1, v_2 \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Καθώς η f είναι επί, υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ με $v_1 = f(u_1)$ και $v_2 = f(u_2)$. Συνεπώς $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \Rightarrow f^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 f^{-1}(v_1) + \lambda_2 f^{-1}(v_2)$

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ καλείται ισομορφισμός αν η f είναι 1-1 και επί.

Ορισμός

Δυο διανυσματικοί χωροι U, V καλούνται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $f : U \rightarrow V$.

Παραδείγματα

(i) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$ είναι γραμμική 1-1 αλλά όχι επί.

Η f είναι γραμμική:

Θεωρώ $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ και υπολογίζω:

$$f[\lambda(x, y) + \lambda'(x', y')] = f(\lambda x + \lambda'x', \lambda y + \lambda'y') = ((\lambda x + \lambda'x') + (\lambda y + \lambda'y'), 2(\lambda x + \lambda'x'), (\lambda x + \lambda'x') - (\lambda y + \lambda'y')) = (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda 2x + \lambda'2x', \lambda(x - y) + \lambda'(x' - y')) = \lambda(x + y, 2x, x - y) + \lambda'(x' + y', 2x', x' - y') = \lambda f(x, y) + \lambda' f(x', y')$$

$\ker f = 0$: Έστω $(x, y) \in \ker f$. Τότε είναι $f(x, y) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ και άρα $(x + y, 2x, x - y) = (0, 0, 0)$, δηλαδή

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3$: Έστω $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Τότε, είναι $(a, b, c) \in \text{Im} f$ αν και μόνο αν υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{με } (a, b, c) = f(x, y), \text{ δηλαδή } (a, b, c) = (x + y, 2x, x - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x = b \\ x - y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+c}{2} \text{ και } x = \frac{b}{2} \\ y = \frac{a-c}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς είναι $\text{Im} f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0\}$ και άρα $\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ (πχ. $(1, 1, 1) \notin \text{Im} f$).

Μάθημα 17

Παραδείγματα

(i) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική, επί αλλά όχι 1-1.

επί:

Θέλω να δείξω ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $(a, b) = f(x, y, z)$, δηλαδή είναι

$$(a, b) = (x + 2z, 2x + y) \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκω τις λύσεις $x = \lambda, y = b - 2\lambda, z = \frac{a-\lambda}{2}$

Πχ: (για $\lambda = 10$) τος τοιχείο $(10, b - 20), \frac{a-10}{2} \in \mathbb{R}^3$ είναι τέτοιο ώστε $f(10, b - 20, \frac{a-10}{2}) = (a, b)$.

1-1:

Υπολογισμός του $\ker f$.

Αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε $(x, y, z) \in \text{Ker} f$ αν και μόνο αν $f(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + 2z, 2x + y) =$

$$(0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς είναι $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2x, z = -\frac{x}{2}\} = \{(x, -2x, -\frac{x}{2}) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -2, -\frac{1}{2}) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, -\frac{1}{2}) \rangle$.

Είναι $\text{Ker} f \neq 0$ (μιας και $(1, -2, -\frac{1}{2}) \in \text{Ker} f$) και άρα η f δεν είναι 1-1.

(ii) Η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 5y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμική, 1-1 και επί (δηλαδή ένας ισομορφισμός). Για να δείξω ότι η f είναι 1-1 και επί, πρέπει να δείξω ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδικό $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (a, b)$. Είναι όμως $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (x + 2y, 2x + 5y) = (a, b)$

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 5y = b \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & 5 \end{vmatrix} = 5a - 2b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 2a$$

Από τον τύπο του Cramer είναι $x = \frac{D_x}{D} = 5a - 2b$ και $y = \frac{D_y}{D} = b - 2a$. Καθώς η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι 1-1 και επί, γνωρίζουμε ότι υπάρχει η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (η οποία είναι επίσης γραμμική). Είναι $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow f^{-1}(a, b) = (x, y)$ έδειξα πριν ότι $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = 5a - 2b$ και $y = b - 2a$. Άρα, $f^{-1}(a, b) = (5a - 2b, b - 2a)$.

(iii) Θεωρώ έναν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και τις γραμμικές απεικονίσεις $L_A : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ και $R_A : \mathbb{R}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ με $L_A(B) = AB$ και $R_A(\Gamma) = \Gamma A$, για κάθε $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\Gamma \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι γραμμικές απεικονίσεις L_A, R_A είναι ισομορφισμοί. Θεωρώ τον $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και τις γραμμικές απεικονίσεις $L_{A^{-1}} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ και $R_{A^{-1}} : \mathbb{R}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$. Θα δείξω ότι η L_A είναι αντιστρέψιμη και μάλιστα είναι $L_{A^{-1}}^{-1} = L_{A^{-1}}$ και $L_{A^{-1}} \cdot L_A = I$. Θεωρώ $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και υπολογίζω $(L_{A^{-1}} \circ L_A)B = L_{A^{-1}}(L_A(B)) = L_{A^{-1}}(AB) = A^{-1}AB = B$, $(L_{A^{-1}} \circ L_A)(B) = L_{A^{-1}}(L_A(B)) = L_{A^{-1}}(AB) = A^{-1}AB = B$. Ανάλογα, θα δείξω ότι η R_A είναι ισομορφισμός δείχνοντας ότι $R_{A^{-1}} \circ R_A = R_{A^{-1}} \circ R_A = I$. Θεωρώ $\Gamma \in \mathbb{R}^{k \times n}$ και υπολογίζω $(R_{A^{-1}} \circ R_A)(\Gamma) = R_{A^{-1}}(R_A(\Gamma)) = R_{A^{-1}}(\Gamma A) = \Gamma A^{-1}A = \Gamma$
 $(R_{A^{-1}} \circ R_A)(\Gamma) = (R_{A^{-1}} \circ R_A)(\Gamma) = R_{A^{-1}}(R_A(\Gamma)) = R_{A^{-1}}(\Gamma A) = \Gamma A^{-1}A = \Gamma$.

Ορισμός

Οι διανυσματικοί χώροι U, V καλούνται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $f : U \rightarrow V$.

Παρατήρηση

Η ισομορφία διανυσματικών χώρων είναι μια σχέση ισοδυναμίας:

ανακλαστική ιδιότητα: Κάθε διανυσματικός χώρος U είναι ισόμορφος με τον εαυτό του U (η ταυτοτική απεικόνιση $I_U : U \rightarrow U$ είναι ισομορφισμός).

συμμετρική ιδιότητα: Αν U, V είναι δυο διανυσματικοί χώροι έτσι ώστε ο U να είναι ισόμορφος με τον V (μέσω ενός ισομορφισμού $f : U \rightarrow V$), τότε ο V είναι ισόμορφος με τον U (μέσω του ισομορφισμού $f^{-1} : V \rightarrow U$).

μεταβατική ιδιότητα: Έστω U, V, W διανυσματικοί χώροι ώστε ο U να είναι ισόμορφος με τον V και ο V να είναι ισόμορφος με τον W . Θεωρώ ισομορφισμούς $f : U \rightarrow V$ και $g : V \rightarrow W$. Η σύνθεση του $g \circ f : U \rightarrow W$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός και άρα ο U είναι ισόμορφος με τον W .

Στόχος

Οι διανυσματικοί χώροι U, V είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν $\dim U = \dim V$.

Ορισμός

Η διατεταγμένη n -άδα $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ καλείται διατεταγμένη βάση του V αν τα v_1, \dots, v_n αποτελούν μια βάση του V .

Πρόταση

Αν $v = (v_1, \dots, v_n)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V , τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ με $f(r_1, \dots, r_n) = r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$ για κάθε $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων (δηλαδή γραμμική, 1-1 και επί).

Απόδειξη

Η f είναι γραμμική:

Θεωρώ $(r_1, \dots, r_n), (r'_1, \dots, r'_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε:

$$f[(r_1, \dots, r_n) + (r'_1, \dots, r'_n)] = f(r_1 + r'_1, r_2 + r'_2, \dots, r_n + r'_n) = \sum_{i=1}^n (r_i + r'_i)v_i = \sum_{i=1}^n (r_iv_i + r'_iv_i) =$$

$$\sum_{i=1}^n r_iv_i + \sum_{i=1}^n r'_iv_i = f(r_1, \dots, r_n) + f(r'_1, \dots, r'_n) \text{ και}$$

$$f[\lambda(r_1, \dots, r_n)] = f(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n) = \lambda r_1 v_1 + \dots + \lambda r_n v_n = \lambda(r_1 v_1 + \dots + r_n v_n) = \lambda f(r_1, \dots, r_n).$$

Η f είναι επί:

Καθώς τα v_1, \dots, v_n παράγουν το διανυσματικό χώρο V , για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Τότε όμως είναι $v = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Im}f$. Άρα δείξαμε ότι $\text{Im}f = V$.

Η f είναι 1-1:

Θα δείξω ότι $\ker f = 0$. Επιλέγω $(r_1, \dots, r_n) \in \ker f$ και έχω ότι $f(r_1, \dots, r_n) = 0 \in V \Rightarrow r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0 \in V$. Καθώς τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι $r_1 = \dots = r_n = 0$ και άρα $(r_1, \dots, r_n) = (0, \dots, 0)$, $\ker f = 0 (\Rightarrow f : 1 - 1)$.

Πρόταση

Έστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Αν η f είναι 1-1 και τα $v_1, \dots, v_n \in U$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n) \in V$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) Αν η f είναι επί και τα $v_1, \dots, v_n \in V$ είναι γεννήτορες, τότε τα $f(u_1), \dots, f(u_n)$ είναι γεννήτορες του V .

(iii) Αν η f είναι ισομορφισμός και τα u_1, \dots, u_n αποτελούν βάση του U , τότε τα $f(u_1), \dots, f(u_n)$ αποτελούν βάση του V .

Απόδειξη

Το (iii) έπεται άμεσα από τα (i), (ii).

(ii) : Θεωρώ $v \in V$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχει $u \in U$ με $v = f(u)$. Είναι $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ και άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Συνεπώς, $v = f(u) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$ και άρα $v \in \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle$. Άρα δείξαμε ότι $V = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle$.

(i) : Για να δείξω ότι τα $f(u_1), \dots, f(u_n) \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θεωρώ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n) = 0 \in V$. Τότε είναι: $f(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n) = 0 = f(0) \in V$ και άρα καθώς η f είναι 1-1, ισχύει ότι $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0 \in U$. Όμως τα u_1, \dots, u_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα πρέπει $a_1 = \dots = a_n = 0$. Δείξαμε ότι τα $f(u_1), \dots, f(u_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Έστω U, V δυο πεπερασμένοι διανυσματικοί χώροι. Τότε οι U, V είναι ισομορφικοί $U \simeq V$ αν και μόνο αν $\dim U = \dim V$.

Απόδειξη

[\Rightarrow] Έστω $f : U \rightarrow V$ ένας ισομορφισμός και u_1, \dots, u_n μια βάση του U (οπότε $\dim U = n$). Όπως είδαμε, τα $f(u_1), \dots, f(u_n)$ αποτελούν μια βάση του V και άρα $\dim V = n (= \dim U)$.

[\Leftarrow] Αν $n = \dim U = \dim V$ θεωρώ διατεταγμένες βάσεις (u_1, \dots, u_n) του U και (v_1, \dots, v_n) του V . Τότε υπάρχουν ισομορφισμοί $\mathbb{R}^n \rightarrow U$ και $\mathbb{R}^n \rightarrow V$. Καθώς η ισομορφία είναι μια σχέση ισοδυναμίας και $\mathbb{R}^n \simeq U$ και $\mathbb{R}^n \simeq V$ έπεται ότι $U \simeq V$.

Παρατηρήσεις

(i) Έστω $f, g : U \rightarrow V$ δυα γραμμικές απεικονίσεις και u_1, \dots, u_n γεννήτορες του U . Τότε είναι $f = g \Leftrightarrow f(u_i) = g(u_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Πράγματι η $[\Rightarrow]$ είναι προφανής. Για την $[\Leftarrow]$ υποθέτω ότι τα $f(u_i) = g(u_i)$ για $i = 1, \dots, n$ και θεωρώ $u \in U$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ώστε $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Συνεπώς, $f(u) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n) = \lambda_1 g(u_1) + \dots + \lambda_n g(u_n) = g(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = g(u)$. Άρα είναι $f = g$.

(ii) Έστω U, V δυο διανυσματικοί χώροι με τον U πεπερασμένα παραγόμενο και $u_1, \dots, u_n \in V$ υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ με $f(u_i) = u_i$ για $i = 1, \dots, n$.

Γνωρίζω ότι υπάρχει βάση του U της μορφής $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m$. Ορίζω $f : U \rightarrow V$ θέτοντας $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 0$, για κάθε $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in U$. Η f είναι καλά

ορισμένη, γραμμική και είναι $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n$

(iii) Έστω U, V δυο διανυσματικοί χώροι και (u_1, \dots, u_n) μια διατεταγμένη βάση του U . Τότε για κάθε n -άδα $(v_1, \dots, v_n) \in V$ υπάρχει μια και μόνο γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ με $f(u_i) = v_i$ ($i = 1, \dots, n$), $\{f : U \rightarrow V \mid f \text{ γραμμική}\} \simeq V^n$. Καθώς τα u_1, \dots, u_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα γνωρίζω από το (ii) ότι υπάρχει $f : U \rightarrow V$ με $f(u_i) = v_i$ για $i = 1, \dots, n$. Καθώς τα u_1, \dots, u_n παράγουν τον U , γνωρίζω από το (i) ότι η f είναι μοναδική.

Πχ. $\dim U = 3$ ($U = \mathbb{R}^3$) (u_1, u_2, u_3) διατεταγμένη βάση του U .

V διανυσματικός χώρος $\{f : U \rightarrow V \mid f \text{ γραμμική } 1-1 \text{ και επί}\} \rightarrow V^3$

$f \mapsto (f(u_1), f(u_2), f(u_3))$.

Υπενθύμιση

Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση (X, Y) συνολα.

(i) Αν υπάρχουν $r : Y \rightarrow X$ με $rof = I_X$, τότε η f είναι 1-1.

(ii) Αν υπάρχει $s : Y \rightarrow X$ με $fos = I_Y$, τότε η f είναι επί.

Απόδειξη

(i) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2) \in Y$. Τότε $x_1 = I_X(x_1) = (rof)(x_1) = r[f(x_1)] = r[f(x_2)] = (rof)(x_2) = I_X(x_2) = x_2$. Συνεπώς η f είναι 1-1.

Για να δείξω ότι η f είναι επί, θεωρώ $y \in Y$. Τότε για το $s(y) \in X$ είναι $y = I_Y(y) = (fos)(y) = f[s(y)] \in f(X)$. Συνεπώς, η f είναι επί.

Στόχος

Αν $f : U \rightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε:

(i) η f είναι 1-1 αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $r : V \rightarrow U$ με $rof = I_U$

(ii) η f είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $s : V \rightarrow U$ με $fos = I_V$.

Μάθημα 18

Πρόταση

Έστω U, V δυο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι και $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $r : V \rightarrow U$ με $rof = I_U$.

(ii) Η f είναι επί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $s : V \rightarrow U$ με $fos = I_V$.

Απόδειξη

(i) Γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη της $r : V \rightarrow U$ με $rof = I_U$ δίνει ότι η f είναι 1-1. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ είναι 1-1. Θεωρώ μια βάση u_1, \dots, u_n του U .

Καθώς η f είναι 1-1, τα διανύσματα $f(u_1), \dots, f(u_n)$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Γνωρίζω ότι υπάρχει μια βάση του V της μορφής $f(u_1), \dots, f(u_n), u_1, u_2, \dots, u_k$. Ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $r : V \rightarrow U$ ώστε $r[f(u_1)] = u_1, r[f(u_2)] = u_2, \dots, r[f(u_k)] = u_k, r(v_1) = 0, r(v_2) = 0, \dots, r(v_k) = 0$. Ισχυρίζομαι ότι $rof = I_U : U \rightarrow U$. Καθώς τα u_1, \dots, u_n παράγουν τον U , αρκεί να δείξω ότι $(rof)(u_i) = I_U(u_i)$ για $i = 1, 2, \dots, n$ δηλαδή ότι $r[f(u_i)] = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Αυτό όμως ισχύει από τον ορισμό της r .

(ii) Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει απεικόνιση $s : V \rightarrow U$ με $f \circ s = I_V$, τότε η f είναι επί. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ είναι επί. Θεωρώ μια βάση u_1, \dots, u_n του U . Τότε τα διανύσματα $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ παράγουν τον V . Γνωρίζω ότι κάποιο υποσύνολο του $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$ αποτελεί μια βάση του V . Μπορώ να υποθέσω ότι τα $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)$ αποτελούν βάση του V (όπου $m \leq n$). Ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $s : V \rightarrow U$. Θέτοντας $s[f(u_1)] = u_1, s[f(u_2)] = u_2, \dots, s[f(u_m)] = u_m$. Ισχυρίζομαι ότι $f \circ s = I_V : V \rightarrow V$. Για να δείξω αυτή τη σχέση αρκεί να δείξω ότι $(f \circ s)(f(u_i)) = I_V(f(u_i))$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, δηλαδή ότι $f[s(f(u_i))] = f(u_i)$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Αυτό ισχύει από τον ορισμό της s .

Παραδείγματα

(i) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x + 2y, x + y, 2x + 5y)$ είναι 1-1. Θέλω να βρω $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $rof = I_{\mathbb{R}^2}$. Ακολουθώ την προηγούμενη απόδειξη:

Θεωρώ τη βάση $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ του \mathbb{R}^2 και υπολογίζω τις εικόνες $v_1 = f(e_1) = (1, 1, 2), v_2 = f(e_2) = (2, 1, 5)$.

Γνωρίζω ότι τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{R}^3 . Παρατηρώ ότι $v_3(0, 0, 1) \notin$

$Im f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ μιας και το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ δεν έχει λύση

και τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτά αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Ορίζω $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Θέτοντας $r(v_1) = e_1 = (1, 0), r(v_2) = e_2 = (0, 1)$ και $r(v_3) = (2, 2)$. Τότε, $rof = I_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Ερώτημα: Βρες την εικόνα $r(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$

Θα πρέπει να βρω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ώστε $(a, b, c) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Άρα είναι $(a, b, c) = \lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(2, 1, 5) + \lambda_3(0, 0, 1)$, δηλαδή $(a, b, c) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3)$, δηλαδή

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a + 2b \\ \lambda_2 = a - b \\ \lambda_3 = c - 2(-a + 2b) - 5(a - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a + 2b \\ \lambda_2 = a - b \\ \lambda_3 = -3a + b + c \end{cases}$$

Συνεπώς είναι $(a, b, c) = (-a + 2b)v_1 + (a - b)v_2 + (-3a + b + c)v_3$ και άρα $r(a, b, c) = (-a + 2b)r(v_1) + (a - b)r(v_2) + (-3a + b + c)r(v_3) = (-a + 2b)(1, 0) + (a - b)(0, 1) + (-3a + b + c)(1, -1) = (-a + 2b, a - b) + (-3a + b + c, 3a - b - c) = (-4a + 3b + c, 4a - 2b - c)$

(ii) Θεωρώ τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (η οποία είναι επί). Βρες γραμμική απεικόνιση $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f \circ s = I_{\mathbb{R}^2}$. Ακολουθώ όπως πριν τα βήματα της απόδειξης:

Θεωρώ την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του \mathbb{R}^3 και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, όπου $v_1 = f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2), v_2 = f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1)$ και $v_3 = f(e_3) = f(0, 0, 1) = (2, 0)$. Γνωρίζω

ότι τα v_1, v_2, v_3 παράγουν τον \mathbb{R}^2 . Παρατηρώ ότι $v_1 = (1, 0) + 2(0, 1) = \frac{1}{2}(2, 0) + 2(0, 1) = \frac{1}{2}v_3 + 2v_2$

και άρα $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$. Άρα δείξαμε ότι τα v_2, v_3 αποτελούν βάση του \mathbb{R}^2 .

Ορίζω τη γραμμική απεικόνιση $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Θέτοντας $s(v_2) = e_2 = (0, 1)$ και $s(v_3) = e_3 = (0, 0, 1)$.

Ερώτημα: Βρες τύπο για την τιμή $s(a, b) \in \mathbb{R}^3$.

Εκφράζω το $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης v_2, v_3 του \mathbb{R}^2 . Έτσι, ψάχνω να βρω $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ με $(a, b) = \lambda v_2 + \lambda' v_3 \Rightarrow (a, b) = \lambda(0, 1) + \lambda'(2, 0) \Rightarrow (a, b) = (0, \lambda) + (2\lambda', 0) \Rightarrow (a, b) = (2\lambda', \lambda) \Rightarrow \begin{cases} a = 2\lambda' \\ b = \lambda \end{cases}$

Πρέπει λοιπόν να είναι $\lambda = b$ και $\lambda' = \frac{a}{2}$. Έτσι είναι $(a, b) = b v_2 + \frac{a}{2} v_3$ και άρα $s(a, b) = bs(v_2) + \frac{a}{2}s(v_3) = b(0, 1, 0) + \frac{a}{2}(0, 0, 1) = (0, b, \frac{a}{2})$.

Έλεγχος της ισότητας $f \circ s - I_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Θεωρώ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ και υπολογίζω $(f \circ s)(a, b) = f[s(a, b)] = f(0, b, \frac{a}{2}) = (0 + 2 \cdot \frac{a}{2}, 2 \cdot 0 + b) = (a, b)$
 $f(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y)$.

Μάθημα 19

Πρόταση

Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $U/Ker f \simeq Im f$ ("πρώτο θεώρημα ισομορφισμών")

Απόδειξη

Παρατηρώ ότι ο $U_0 = ker f$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U και άρα ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο U/U_0 . Επίσης η εικόνα $V_0 = Im f$ της f είναι διανυσματικός υπόχωρος του V (και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος). Ορίζω μια απεικόνιση $\phi : U/U_0 \rightarrow V_0$ ως εξής: Για κάθε $u + U_0 \in U/U_0$ (με $u \in U$), ορίζω $\phi(u + U_0) = f(u) \in Im f = V_0$.

Η ϕ είναι καλά ορισμένη: Θεωρώ $u_1, u_2 \in U$ με $u_1 + U_0 = u_2 + U_0 \in U/U_0$. Τότε είναι $u_2 - u_1 \in U_0 = ker f$ και άρα $f(u_2 - u_1) = 0 \in V \Rightarrow f(u_2) - f(u_1) = 0 \in V \Rightarrow f(u_1) = f(u_2)$.

Η ϕ είναι γραμμική: Θεωρώ $u + U_0, u' + U_0 \in U/U_0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε είναι $\phi[(u + U_0) + (u' + U_0)] = \phi[(u + u') + U_0] = f(u + u') = f(u) + f(u') = \phi(u + U_0) + \phi(u' + U_0)$ και $\phi[\lambda(u + U_0)] = \phi(\lambda u + U_0) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \phi(u + U_0)$.

Η ϕ είναι 1-1: Θα δείξω ότι $ker \phi = \{0 + U_0\} \subseteq U/U_0$. Θεωρώ ένα στοιχείο $u + U_0 \in Ker \phi$. Τότε είναι $f(u) = \phi(u + U_0) = 0 \in V_0 \subseteq V$ και άρα $u \in Ker f = U_0$. Έτσι, είναι $u + U_0 = 0 + U_0$.

Η ϕ είναι επί: $(\phi : U/U_0 \rightarrow V_0)$. Θεωρώ $v \in V_0 = Im f$ και έχω ότι υπάρχει $u \in U$ με $v = f(u)$. Για το στοιχείο $u + U_0 \in U/U_0$ είναι $v = f(u) = \phi(u + U_0) \in Im \phi$. Άρα δείξαμε ότι $Im \phi = V_0$.

Πόρισμα

Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : U \rightarrow V$ και υποθέτω ότι ο U είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Τότε οι διανυσματικοί χώροι $ker f, Im f$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενοι και μάλιστα είναι $dim ker f + dim Im f = dim U$.

Απόδειξη

Γνωρίζω ότι ο διανυσματικός χώρος $U/Ker f$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα $dim U/Ker f = dim U - dim Ker f$. Καθώς οι διανυσματικοί χώροι $U/Ker f, Im f$ είναι ισομορφικοί, είναι $dim Im f = dim U/Ker f$. Συνεπώς, $dim Im f = dim U - dim Ker f \Rightarrow dim Ker f + dim Im f = dim U$.

Παράδειγμα

Θεωρώ τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z) = (x + y, x - y, 2x + 2y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$Ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\} =$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, x-y, 2x+2y, z) = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left. \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x+2y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} =$$

$$= \{(0, 0, 0, 0)\}$$

Άρα είναι $\dim \text{Ker} f = 0$.

Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker} f = 3 - 0 = 3$.

Μπορώ να υπολογίσω την $\dim \text{Im} f$, ως εξής:

$$\text{Im} f = \{(x+y, x-y, 2x+2y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 2, 0) + y(1, -1, 2, 0) + z(0, 0, 0, 1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 2, 0), (1, -1, 2, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Δειχνώ ότι τα διανύσματα $(1, 1, 2, 0), (1, -1, 2, 0), (0, 0, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, αυτά αποτελούν μια βάση της $\text{Im} f$ ($\dim \text{Im} f = 3$).

Πόρισμα

Έστω U, V δυο διανυσματικοί χώροι με πεπερασμένη διάσταση και $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Αν η f είναι 1-1, τότε $\dim U = \dim V$

(ii) Αν η f είναι επί, τότε $\dim V \leq \dim U$

Απόδειξη

Θεωρώ τη σχέση $\dim U = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$.

(i) Αν η f είναι 1-1, τότε $\text{Ker} f = 0$ και άρα $\dim \text{Ker} f = 0$. Συνεπώς, είναι $\dim U = 0 + \dim \text{Im} f = \dim \text{Im} f \leq \dim V$ (καθώς η εικόνα $\text{Im} f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V)

(ii) Αν η f είναι επί, τότε $\text{Im} f = V$ και άρα $\dim V = \dim \text{Im} f \leq \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim U$.

Παρατήρηση

Έχουμε δει παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που είναι 1-1 αλλά όχι επί και γραμμικών απεικονίσεων $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που είναι επί αλλά όχι 1-1.

Πρόταση

Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ και υποθέτω ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) η f είναι 1-1.

(ii) η f είναι επί.

(iii) η f είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι (iii) \rightarrow (i) και (iii) \rightarrow (ii).

Θα δείξω ότι (i) \rightarrow (iii) και ότι (ii) \rightarrow (iii).

(i) \rightarrow (iii): Υποθέτω ότι η f είναι 1-1 και θα δείξω ότι η f είναι επί. Από τη σχέση $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$, έπεται ότι $\dim \text{Im} f = \dim V$, όμως η εικόνα $\text{Im} f \subseteq V$ είναι υπόχωρος του V και $\dim V < \infty$. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι $\text{Im} f = V$ (\rightarrow η f είναι επί).

(ii) \rightarrow (iii): Υποθέτω ότι η f είναι επί και θα δείξω ότι η f είναι 1-1.

Θεωρώ τη σχέση $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$. Καθώς είναι $\text{Im} f = V$ έπεται ότι $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim V \Rightarrow \dim \text{Ker} f = 0 \Rightarrow \text{Ker} f = 0 \rightarrow f : 1-1$.

Εφαρμογή

Θεωρώ $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και τις γραμμικές απεικονίσεις $L_A : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ και $R_A : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (με $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $R_A(\Gamma) = \Gamma A$ για κάθε $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Έχουμε δει

ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι γραμμικές απεικονίσεις R_A, L_A είναι ισομορφισμοί. Αν αυτές είναι ισομορφισμοί (αρκεί το 1-1), τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, αν οι L_A, R_A είναι επί, τότε υπάρχουν $B, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $AB = L_A(B) = I_n$ και $\Gamma A = R_A(\Gamma) = I_n$. Συνεπώς, $B = I_n B = \Gamma AB = \Gamma I_n = \Gamma$ και έτσι $AB = I_n = BA \Rightarrow$ ο A είναι αντιστρέψιμος.

Ορισμός

Αν $f, g \in L(U, V)$ ορίζω το άθροισμα $f + g : U \rightarrow V$. Θέτοντας $(f + g)(u) = f(u) + g(u) \in V$ για κάθε $u \in U$. Επίσης, αν $f \in L(U, V)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζω την απεικόνιση $\lambda f : U \rightarrow V$. Θέτοντας $(\lambda f)(u) = \lambda f(u) \in V$ για κάθε $u \in U$.

Παρατήρηση

Αν $f, g \in L(U, V)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. τότε οι απεικονίσεις $f + g, \lambda f : U \rightarrow V$ είναι γραμμικές (δηλαδή $f + g, \lambda f \in L(U, V)$).

Απόδειξη

Έστω $u, u' \in U$ και $a, a' \in \mathbb{R}$. Υπολογίζω:

$$(f + g)(au + a'u') = f(au + a'u') + g(au + a'u') = af(u) + a'f(u') + ag(u) + a'g(u') = a(f(u) + g(u)) + a'(f(u') + g(u')) = a(f + g)(u) + a'(f + g)(u')$$

και ανάλογα,

$$(\lambda f)(au + a'u') = \lambda f(au + a'u') = \lambda[af(u) + a'f(u')] = \lambda af(u) + \lambda a'f(u') = a\lambda f(u) + a'\lambda f(u') = a(\lambda f)(u) + a'(\lambda f)(u').$$

Μάθημα 20

Άσκηση

U, V διανυσματικοί χώροι, $f : U \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Θεωρώ μια διατεταγμένη βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ του U και μια διατεταγμένη βάση $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ του V (οπότε είναι $\dim U = n$ και $\dim V = m$). Θεωρώ τις εικόνες $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n) \in V$. Γνωρίζω ότι κάθε $v \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, \dots, v_m . Άρα μπορώ να γράψω:

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m$$

$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m$$

⋮

$$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m, \text{ για κατάλληλα } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Θεωρώ τον πίνακα } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Ορισμός

Ο πίνακας A καλείται πίνακας της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{V} και γράφουμε $A = [f : \hat{U}, \hat{v}]$.

Παραδείγματα

(i) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρώ επίσης τις κανονικές βάσεις $\hat{e} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ και $\hat{e}' = ((1, 0), (0, 1))$ των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα. Θέλω να βρω τον πίνακα $(f : \hat{e}, \hat{e}') \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$. Υπολογίζω:

$$f(1, 0, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (3, -1) = 3(1, 0) + (-1)(0, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (-1, 1) = (-1)(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$\text{Άρα } (f : (\hat{e}, \hat{e}')) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

(ii) Θεωρώ το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq 2\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ και τη γραμμική απεικόνιση $\Delta[f(x)] = f''(x) - 2f'(x) + 3f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Η απεικόνιση Δ είναι πράγματι απεικόνιση:

Θεωρώ $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε είναι:

$$\begin{aligned} \Delta[\lambda f(x) + \mu g(x)] &= (\lambda f(x) + \mu g(x))'' - 2(\lambda f(x) + \mu g(x))' + 3(\lambda f(x) + \mu g(x)) = [\lambda f''(x) + \mu g''(x)] - \\ & 2[\lambda f'(x) + \mu g'(x)] + 3[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda[f''(x) - 2f'(x) + 3f(x)] + \mu[g''(x) - 2g'(x) + 3g(x)] = \\ & \lambda\Delta[f(x)] + \mu\Delta[g(x)]. \end{aligned}$$

Θεωρώ τη διατεταγμένη βάση $\hat{e} = (x^2, x, 1)$ του $\mathbb{R}_2[x]$ και υπολογίζω τον πίνακα $(\Delta : \hat{e}, \hat{e}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Υπολογίζω τις τιμές $\Delta(x^2), \Delta(x), \Delta(1) \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$\Delta(x^2) = 2 - 2 \times 2x + 3x^2 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$\Delta(x) = 0 - 2 + 3x = 0x^2 + 3x - 2$$

$$\Delta(1) = 3 = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x + 3$$

$$\text{Άρα, } (\Delta : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Θεωρώ τα στοιχεία $u_1 = x + 1, u_2 = x^2 + 1, u_3 = x^2 + x$ του $\mathbb{R}_2[x]$. Θα δείξω ότι αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και θα υπολογίσω τον $(\Delta : \hat{u}, \hat{u}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, όπου $\hat{U} = (u_1, u_2, u_3)$. Καθώς $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, τα u_1, u_2, u_3 αποτελούν βάση αν αυτά παράγουν τον $\mathbb{R}_2[x]$. Θεωρώ ένα $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ και ψάχνω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3$. Θα πρέπει να είναι $a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda(x + 1) + \mu(x^2 + 1) + \nu(x^2 + x) \in \mathbb{R}_3[x]$, δηλαδή $a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda x + \lambda + \mu x^2 + \mu + \nu x^2 + \nu x \in \mathbb{R}_2[x]$, δηλαδή $a_0 + a_1x + a_2x^2 = (\lambda + \mu) + (\lambda + \nu)x + (\mu + \nu)x^2$.

Θα πρέπει να είναι $\begin{cases} \lambda + \mu = a_0 \\ \lambda + \nu = a_1 \\ \mu + \nu = a_2 \end{cases}$. Λύνω το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & a_0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & a_2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & a_0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & a_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & a_0 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & a_2 + a_1 - a_0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & (a_1 + a_0 - a_2)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & (a_0 + a_2 - a_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & (a_2 + a_1 - a_0)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι η εξής:

$$\lambda = \frac{1}{2}(a_1 + a_0 - a_2), \quad \mu = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 + a_2), \quad \nu = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_0).$$

Καθώς το σύστημα έχει λύση, τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 παράγουν τον $\mathbb{R}_2[x]$ και άρα αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}_2[x]$. Θα υπολογίσω τον πίνακα $(\Delta : \hat{u}, \hat{u})$. Υπολογίζω:

$$\Delta(u_1) = \Delta(x + 1) = (x + 1)'' - 2(x + 1)' + 3(x + 1) = -2 + 3x + 3 = 3x + 1 = 2u_1 - u_2 + u_3$$

$$\Delta(u_2) = \Delta(x^2 + 1) = (x^2 + 1)'' - 2(x^2 + 1)' + 3(x^2 + 1) = 2 - 4x + 3x^2 + 3 = 5 - 4x + 3x^2 = -1u_1 + 6u_2 + (-3)u_3$$

$$\Delta(u_3) = \Delta(x^2 + x) = (x^2 + x)'' - 2(x^2 + x)' + 3(x^2 + x) = 2 - 2(2x + 1) + 3x^2 + 3x - 2 - 4x - 2 + 3x^2 + 3x = -x + 3x^2 = (-2)u_1 + 2u_2 + 1u_3.$$

$$\text{Τελικά είναι: } (\Delta : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Θεωρώ έναν 3×4 πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \end{pmatrix}$ και τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow$

$$\mathbb{R}^{3 \times 1} \text{ με } f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c + 4d \\ 5a + 6b + 7c + 8d \\ 9a + 10b - 11c + 12d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

για κάθε $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Θέλω να υπολογίσω τον πίνακα της f ως προς τις *standard* βάσεις

$$\hat{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ και } \hat{e}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ των } \mathbb{R}^{4 \times 1} \text{ και } \mathbb{R}^{3 \times 1} \text{ αντίστοιχα.}$$

$$\text{Υπολογίζω } f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς είναι } (f : \hat{e}, \hat{e}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \end{pmatrix} = A$$

Παρατήρηση

Αν u, v είναι διανυσματικοί χώροι με διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{v} και $f : U \rightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε για κάθε $u \in U$ με $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ είναι

$$f(u) = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_m v_m, \text{ όπου } \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = (f : \hat{u}, \hat{v}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Πράγματι, αν $(f : \hat{u}, \hat{v}) = (a_{ij})$, τότε είναι

$$f(u_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{mj} v_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \text{ για κάθε } j = 1, \dots, n. \text{ Συνεπώς, μιας και } u = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$$

θα είναι:

$$f(u) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(u_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i = \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij} v_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \lambda_j \right) v_i$$

Καθώς υπέθεσα ότι $f(u) = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ είναι $\mu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j$ για κάθε i .

$$\text{Άρα, } \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Πρόταση

Αν οι διανυσματικοί χώροι U, V έχουν διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{v} αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση $L(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $f \rightarrow (f : \hat{u}, \hat{v})$ είναι γραμμική, 1-1 και επί, είναι δηλαδή ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Πόρισμα

Αν $\dim U = n$, $\dim V = m$, τότε $\dim L(U, V) = n \cdot m$.

Πρόταση

Έστω U, V, W διανυσματικοί χώροι με διατεταγμένες βάσεις $\hat{U} = (u_1, \dots, u_n)$, $\hat{V} = (v_1, \dots, v_m)$, $\hat{W} = (w_1, \dots, w_l)$ αντίστοιχα. Θεωρώ δυο γραμμικές απεικονίσεις $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ και τη σύνθεσή τους $g \circ f : U \rightarrow W$. Τότε είναι $(g \circ f : \hat{u}, \hat{w}) = (g : \hat{V}, \hat{w})(f : \hat{u}, \hat{v})$.

Παρατήρηση

Έστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση, \hat{u} μια διατεταγμένη βάση του U και \hat{v} μια διατεταγμένη βάση του V . Τότε η f είναι ισομορφισμός, αν ο πίνακας $(f : \hat{u}, \hat{v})$ είναι αντιστρέψιμος.

U, V ισόμορφοι $\Rightarrow \dim U = \dim V$

$$AB = (f : \hat{u}, \hat{v})(f^{-1} : \hat{v}, \hat{u}) = (f \circ f^{-1} : \hat{v}, \hat{v})$$

$$BA = (f^{-1} : \hat{v}, \hat{u})(f : \hat{u}, \hat{v}) = (f^{-1} \circ f : \hat{u}, \hat{u})$$

Παράδειγμα

Θεωρώ τον \mathbb{R}^2 και την ταυτοτική απεικόνιση $I_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Θεωρώ επίσης την κανονική βάση $\hat{e} = ((1, 0), (0, 1))$ και τη διατεταγμένη βάση $\hat{v} = ((2, 5), (1, 3))$. Ασφαλώς είναι $(I_d : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

και $(I_d : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Θέλω να υπολογίσω τους πίνακες $(I_d : \hat{v}, \hat{e})$ και $(I_d : \hat{e}, \hat{v})$. Από τον ορισμό είναι:

$$(I_d : \hat{v}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} [(1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1)]. \text{ Επίσης } (I_d : \hat{e}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} [(2, 5) = 2(1, 0) + 5(0, 1)].$$

Ψάχνω να βρω μ, ν τέτοια ώστε:

$$(0, 1) = \mu(2, 5) + \nu(1, 3)$$

$$(0, 1) = (2\mu + \nu, 5\mu + 3\nu) \Rightarrow \begin{cases} 2\mu + \nu = 0 \\ 5\mu + 3\nu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \nu = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ και } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ορισμός

Έστω U ένας διανυσματικός χώρος και \hat{u}, \hat{u}' δυο διατεταγμένες βάσεις του. Ο πίνακας $P : (I_{d_V} = \hat{u}, \hat{u}')$ ο οποίος είναι ασφαλώς αντιστρέψιμος, μιας και η I_{d_V} είναι ισομορφισμός, ονομάζεται πίνακας αλλαγής βάσης από την \hat{u} στην \hat{u}' .

Ιδιότητες

(i) Ο πίνακας αλλαγής βάσης $P = (I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')$ και $Q = (I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u})$ είναι αντίστροφοι (ο ένας του άλλου).

Μάθημα 21

Παρατήρηση

Εστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση, \hat{u} μια διατεταγμένη βάση του U και \hat{v} μια διατεταγμένη βάση του V . Τότε η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας $(f : \hat{u}, \hat{v})$ είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη

Αν η f είναι ισομορφισμός, θεωρώ τη γραμμική απεικόνιση $f^{-1} : V \rightarrow U$ και τον πίνακά της $B = (f^{-1} : \hat{v}, \hat{u})$. Τότε για τον $A = (f : \hat{u}, \hat{v})$ ισχύουν τα εξής:

$$AB = (f : \hat{u}, \hat{v})(f^{-1} : \hat{v}, \hat{u}) = (f \circ f^{-1} : \hat{v}, \hat{v}) = (1_V : \hat{v}, \hat{v}) = I_m \quad (m = \dim V) \text{ και}$$

$$BA = (f^{-1} : \hat{v}, \hat{u})(f : \hat{u}, \hat{v}) = (f^{-1} \circ f : \hat{u}, \hat{u}) = (1_U : \hat{u}, \hat{u}) = I_n \quad (n = \dim U).$$

Είναι $m = n$ (U, V ισόμορφοι $\Rightarrow \dim U = \dim V$). Έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος (και $B = A^{-1}$). Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος (και άρα $n = \dim U = \dim V = m$). Καθώς η απεικόνιση $L(V, U) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ $\sigma \rightarrow (\sigma : \hat{v}, \hat{u})$ είναι επί, υπάρχει $g : V \rightarrow U$ γραμμική με $(g : \hat{v}, \hat{u}) = A^{-1}$. Θα δείξω ότι $g = f^{-1}$, δηλαδή ότι $f \circ g = 1_V$ και $g \circ f = 1_U$.

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξω ότι $(f \circ g : \hat{v}, \hat{v}) = I_n$ και ότι $(g \circ f : \hat{u}, \hat{u}) = I_n$. Όμως, $f \circ g : \hat{v}, \hat{v} = (f : \hat{u}, \hat{v})(g : \hat{v}, \hat{u}) = A \cdot A^{-1} = I_n$ και

$$g \circ f : \hat{u}, \hat{u} = (g : \hat{v}, \hat{u})(f : \hat{u}, \hat{v}) = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Παράδειγμα

Θεωρώ τον \mathbb{R}^2 και την ταυτοτική απεικόνιση $I_d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Θεωρώ επίσης την κανονική βάση $\hat{e} = ((1, 0), (0, 1))$ και τη διατεταγμένη βάση $\hat{v} = ((2, 5), (1, 3))$. Ασφαλώς, είναι $(I_d : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{και } (I_d : \hat{u}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θέλω να υπολογίσω τους πίνακες $(I_d : \hat{v}, \hat{e})$ και $(I_d : \hat{e}, \hat{v})$. Από τον ορισμό, είναι:

$$(I_d : \hat{v}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2, 5) = 2(1, 0) + 5(0, 1)$$

$$(1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1).$$

$$\text{Επίσης, } (I_d : \hat{e}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0) = k(2, 5) + \lambda(1, 3) \Rightarrow (1, 0) = (2k, 5k) + (\lambda, 3\lambda) \Rightarrow$$

$$(1, 0) = (2k + \lambda, 5k + 3\lambda) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2k + \lambda \\ 0 = 5k + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - 2k \\ 5k + 3(1 - 2k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - 2k \\ -k + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -5 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$(0, 1) = \mu(2, 5) + \nu(1, 3) \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \nu = 2 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Έστω U ένας διανυσματικός χώρος και \hat{u}, \hat{u}' δυο διατεταγμένες βάσεις του.

Ο πίνακας $P = (I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')$ ο οποίος είναι ασφαλώς αντιστρέψιμος, μιας και η I_{d_U} είναι ισομορφισμός, ονομάζονται πίνακας αλλαγής βάσης από την \hat{u} στην \hat{u}' .

Ιδιότητες

(i) Οι πίνακες αλλαγής βάσης $P = (I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')$ και $Q = (I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u})$ είναι αντίστροφος (ο ένας του άλλου). Πράγματι, υπολογίζω ότι:

$$PQ = (I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')(I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')$$

$$PQ = (I_{d_U} \cdot I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u}')$$

$$PQ = (I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u}') = I_n \text{ (όπου } n = \dim U) \text{ και}$$

$$PQ = (I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u})(I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}') = (I_{d_U} \cdot I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}') = I_n$$

(ii) Έστω $P = (I_{d_U} : \hat{u}, \hat{u}')$ και $u \in U$. Μπορώ να γράψω $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ και $u = \mu_1 u'_1 + \mu_2 u'_2 + \dots + \mu_n u'_n$. Τότε είναι:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (ειδική περίπτωση γνωστού αποτελέσματος για την περίπτωση όπου } f = I_{d_u}).$$

Παράδειγμα

Θεωρώ τη διατεταγμένη βάση $\hat{v} = ((2, 5), (1, 3))$ του \mathbb{R}^2 και το $(-1, 4) \in \mathbb{R}^2$. Θεωρώ επίσης την κανονική βάση $\hat{e} = ((1, 0), (0, 1))$ του \mathbb{R}^2 και έχω $(-1, 4) = (-1)(1, 0) + 4(0, 1)$. Σύμφωνα με το (ii) παραπάνω, μπορώ να γράψω:

$$(-1, 4) = k(2, 5) + \lambda(1, 3), \text{ όπου } \begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix} = (I_d : \hat{e}, \hat{v}) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει ότι $(I_d : \hat{e}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ προκύπτει ότι

$$\begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k = -7 \\ \lambda = 13 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς είναι $(-1, 4) = (-7)(2, 5) + 13(1, 3)$.

(iii) Έστω \hat{u} μια διατεταγμένη βάση του διανυσματικού χώρου U και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας (όπου $n = \dim U$). Τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση \hat{u}' του U έτσι ώστε $P = (I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u})$. Πράγματι, καθώς η απεικόνιση $L(u, u) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι επί, έπεται ότι $\sigma \rightarrow (\sigma : \hat{u}, \hat{u})$ υπάρχει $f : U \rightarrow U$ γραμμική απεικόνιση ώστε $(f : \hat{u}, \hat{u}) = P$. Καθώς ο P είναι αντιστρέψιμος, η f είναι ισομορφισμός. Γνωρίζουμε συνεπώς ότι τα $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ αποτελούν βάση του U . Γράφω $f(u_i)$ και θεωρώ τη διατεταγμένη βάση $\hat{u}' = (u'_1, \dots, u'_n)$. Αν είναι $P = (P_{ij})$ τότε είναι

$$u'_j = f(u_j) = \sum_{i=1}^n P_{ij} u_i \text{ για } j = 1, 2, \dots, n.$$

Άρα από τον ορισμό, έπεται ότι $(I_{d_U} : \hat{u}', \hat{u}) = P$.

$$u'_1 = P_{11}u_1 + P_{21}u_2 + \dots + P_{n1}u_n$$

$$u'_2 = P_{12}u_1 + P_{22}u_2 + \dots + P_{n2}u_n$$

Πρόταση

Οι επόμενες είναι ισοδύναμες για δυο πίνακες $A, b \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

(i) Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $B = PAQ$.

(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{u}' του \mathbb{R}^n και \hat{v}, \hat{v}' του \mathbb{R}^m , ώστε $A = (f : \hat{u}, \hat{u})$ και $B = (f : \hat{u}', \hat{v}')$. Στην περίπτωση αυτή, οι πίνακες A και B καλούνται ισοδύναμοι.

Απόδειξη

(i) \rightarrow (ii) : Θεωρώ τις κανονικές βάσεις \hat{e}, \hat{e} του \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m αντίστοιχα και βρίσκω, καθώς η απεικόνιση $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι επί, γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $(f : \hat{e}, \hat{e}) = A$. Για τους πίνακες P, Q μπορώ να βρω νέες διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{v} των $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ αντίστοιχα ώστε $P = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} : \hat{v}, \hat{e})$ και $Q = (I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}, \hat{e})$. Συνεπώς, είναι $P = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} : \hat{e}, \hat{v})$ και άρα $B = PAQ = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} : \hat{e}, \hat{v}) \cdot (f : \hat{e}, \hat{e})(I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}, \hat{e}) = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} \circ f \circ I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}, \hat{v}) = (f : \hat{u}, \hat{v})$

(ii) \rightarrow (i) Ορίζω $P = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} : \hat{v}, \hat{v}')$ και $Q = (I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}', \hat{u})$. Οι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμοι (ως πίνακες αλλαγής βάσης) και είναι:

$$PAQ = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} : \hat{v}, \hat{v}')(f : \hat{u}, \hat{v})(I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}', \hat{u}) = (I_{d_{\mathbb{R}^m}} \circ f \circ I_{d_{\mathbb{R}^n}} : \hat{u}', \hat{v}') = B$$

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(i) Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι ισοδύναμος με τον A, καθώς $A = I_m A I_n$.

(ii) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και ο A είναι ισοδύναμος με τον B, τότε ο B είναι ισοδύναμος με τον A (Αν $B = PAQ$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $A = P^{-1}BQ^{-1}$) [P^{-1} : αντιστρέψιμος $m \times n$ πίνακας, Q^{-1} : αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας].

(ii) Αν $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ο A είναι ισοδύναμος με τον B και ο B είναι ισοδύναμος με τον C, τότε ο A είναι ισοδύναμος με τον C. (Αν ο $B = PAQ$ και ο $B = P'BQ'$ για κατάλληλους αντιστρέψιμους πίνακες $P, P' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $Q, Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $C = P'(PAQ)Q = (P'P)A(QQ')$ [PP' : αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας, QQ' : αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας]).

Στόχος

Κάθε $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ για ένα μοναδικό $r \in \mathbb{N}$ με

$0 \leq r \leq \min\{m, n\}$. (Με άλλα λόγια θα δείξω ότι αν $k = \min\{m, n\}$, τότε υπάρχουν ακριβώς $k + 1$ κλάσεις ισοδυναμίας πινάκων $\mathbb{R}^{m \times n}$ οι οποίες έχουν ως αντιπροσώπους τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Αν $r, s \in \{0, 1, \dots, k\}$ όπου $k = \min\{m, n\}$ και οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι

ισοδύναμοι, τότε $r = s$. Υποθέτοντας ότι οι πίνακες A, B είναι ισοδύναμοι, γνωρίζω ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{u}' του \mathbb{R}^n και \hat{v}, \hat{v}' του \mathbb{R}^m ώστε $(f : \hat{u}, \hat{v}) = A$ και $(f : \hat{u}', \hat{v}') = B$. Έτσι, αν $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, τότε είναι $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_r) = v_r, f(u_{r+1}) = 0, \dots, f(u_n) = 0$. Συνεπώς είναι $Imf = f(\mathbb{R}^n) = \langle f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n) \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0 \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$.

Άρα $dim Imf = dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle = r$.

Ανάλογα, γράφω $\hat{u}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ και $\hat{v}' = (v'_1, \dots, v'_m)$, οπότε έχω ότι $f(u'_1) = v'_1, f(u'_2) = v'_2, \dots, f(u'_s) = v'_s, f(u'_{s+1}) = 0, \dots, f(u'_n) = 0$.

Έτσι, $Imf = f(\mathbb{R}^n) = \langle f(u'_1), \dots, f(u'_n) \rangle = \langle v'_1, \dots, v'_s, 0, \dots, 0 \rangle = \langle v'_1, \dots, v'_s \rangle$.

Άρα, $dim Imf = dim \langle v'_1, \dots, v'_s \rangle = s$. Είναι λοιπόν, $r = s$.

Μάθημα 22

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ισοδύναμοι $\Leftrightarrow B = PAQ$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Στόχος

Κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι ισοδύναμος με ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (ο οποίος έχει r το πλήθος 1 στη 'διαγώνιο' η οποία ξεκινά από το (1,1)-στοιχείο του πίνακα) για ένα μοναδικό $r \in \{0, 1, \dots, k\}$ όπου $k = \min\{n, m\}$.

Πρόταση

Έστω $f : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις \hat{u} του U και \hat{v} του V , ώστε $(f : \hat{u}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ μοναδιαίος).

Απόδειξη

Έστω $n = \dim V$ και $m = \dim U$. Θεωρώ τους υπόχωρους $\text{Ker} f \subseteq U$ και $\text{Im} f \subseteq V$ και γράφω $k = \dim \text{Ker} f$ ($k \leq m$) και $\lambda = \dim \text{Im} f$ ($\lambda \leq n$).

Γνωρίζουμε ότι $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim U \Rightarrow k + r = m$. Επιλέγω μια βάση u_1, \dots, u_k του $\text{Ker} f$ και την επεκτείνω σε μια βάση $u_1, \dots, u_k, u'_1, \dots, u'_r$ του U . Καθώς αυτά παράγουν τον U , οι εικόνες τους $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k), f(u'_1), \dots, f(u'_r)$ παράγουν την $\text{Im} f$.

Συνεπώς είναι $\text{Im} f = \langle f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_r) \rangle$.

Καθώς $\dim \text{Im} f = r$ τα $f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_r)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Μπορώ συνεπώς να βρω μια βάση του V της μορφής $f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-r}$. Θεωρώ τώρα τις διατεταγμένες βάσεις $\hat{u} = (u'_1, u'_2, \dots, u'_r, u_1, u_2, \dots, u_k)$ και $\hat{v} = (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-r})$ και έχω ότι:

$$(f : \hat{u}, \hat{v}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πόρισμα

Ένας $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ για ένα μοναδικό r .

Απόδειξη

Μοναδικότητα: OK

Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $(f : \hat{e}, \hat{\epsilon}) = A$ όπου $\hat{e} : \text{κανονική βάση του } \mathbb{R}^m$ και $\hat{\epsilon}$ κανονική βάση του \mathbb{R}^n .

Μόλις είδαμε ότι υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις \hat{u} του \mathbb{R}^m και \hat{v} του \mathbb{R}^n , τέτοιες ώστε $(f : \hat{u}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Όμως οι πίνακες $(f : \hat{e}, \hat{\epsilon}) = A$ και $(f : \hat{u}, \hat{v})$ είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός

Η τάξη $r = r(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός που είναι τέτοιος ώστε οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ισοδύναμοι.

Παρατηρήσεις

(i) ΟΙ πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $r(A) = r(B)$.

[\Rightarrow] Γράφω $r = r(A)$ και $r' = r(B)$. Ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας B είναι ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Καθώς οι A, B είναι ισοδύναμοι, οι πίνακες $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι επίσης ισοδύναμοι.

Συνεπώς είναι $r = r'$.

\Leftarrow Αν $r(A) = r(B) = r$ τότε ο A είναι ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και ο B είναι επίσης ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Συνεπώς οι A, B είναι ισοδύναμοι.

(ii) Η τάξη ενός πίνακα $A = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (όπου $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ είναι οι στήλες του A), είναι ίση με τη διάσταση του υπόχωρου $\langle c_1, \dots, c_m \rangle \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Πράγματι, μπορώ να γράψω $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$ για μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ως προς τις κανονικές βάσεις \hat{e} και \hat{e} των \mathbb{R}^m και \mathbb{R}^n αντίστοιχα.

Είναι $r = r(A) = \dim \text{Im} f = \dim \langle f(e_1), \dots, f(e_m) \rangle = \dim \langle c_1, \dots, c_m \rangle$.

Παράδειγμα

Θεωρώ τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Θα βρω την τάξη $r(A) = r \in \{\emptyset, 1, 2, 3\}$ και αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Θεωρώ τη γραμμική απεικόνιση ($f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) με $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 2, -4)$ και $f(0, 0, 1) = (2, -1, 4)$

Ker f

Είναι $f(x, y, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = (2x, x, 0) + (0, 2y, -4y) + (2z, -z, 4z) = (2x + 2z, x + 2y - z, -4y + 4z)$.

Είναι λοιπόν $(x, y, z) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$.

Έτσι, $\text{Ker} f = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή $\text{Ker} f = \langle (-1, 1, 1) \rangle$. Μια βάση του $\text{Ker} f$ είναι το $u = (-1, 1, 1)$. Επεκτείνω σε μια βάση του \mathbb{R}^3 . Έτσι, μπορώ να θεωρήσω τη βάση. Είναι $u = -e_1 + e_2 + e_3$ και άρα $e_3 = e_1 - e_2 - u \in \langle e_1, e_2, u \rangle$ καθώς $e_1, e_2 \in \langle e_1, e_2, u \rangle$ έπεται ότι $e_1, e_2, e_3 \in \langle e_1, e_2, u \rangle \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2, u \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \langle e_1, e_2, u \rangle = \mathbb{R}^3$.

Γνωρίζω ότι η $\hat{u} = (e_1, e_2, u)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του \mathbb{R}^3 .

Γνωρίζω ότι $\text{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$ και μάλιστα είναι $f(e_1) = (2, 1, 0)$ και $f(e_2) = (0, 2, -4)$. Καθώς $(0, 1, 0) \notin \langle (2, 1, 0), (0, 2, -4) \rangle$ τα τρία διανύσματα $f(e_1), f(e_2), e_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αυτά αποτελούν μια βάση του \mathbb{R}^3 . Θέτω $\hat{v} = (f(e_1), f(e_2), e_2)$. Τότε,

$$f : \hat{u}, \hat{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Είναι $f : (\hat{u}, \hat{v}) = (1_{\mathbb{R}^3} : \hat{e}, \hat{v}(:= P))(f : \hat{e}, \hat{e}(:= A)), (1_{\mathbb{R}^3} : \hat{u}, \hat{e}(:= Q))$ και άρα $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{και } P^{-1} = (1_{\mathbb{R}^3} : \hat{v}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Για να βρω τον $P = (P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ υπολογίζω:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα, } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Είναι δηλαδή, } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

(i) Έστω $f, g : V \rightarrow V$ δυο γραμμικές απεικονίσεις και $fog : V \rightarrow V$ η σύνθεση. Τότε είναι $Im(fog) \subseteq Imf$ μιας και $Im(fog) = (fog)(V) = f[g(V)] \subseteq f(V) = Imf$.

Συνεπώς, είναι $dim Imf(fog) \subseteq dim Imf$.

(ii) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Τότε είναι $r(AB) \leq r(A)$. Γνωρίζω ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f, g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$ και $B = (g : \hat{e}, \hat{e})$. Τότε είναι $AB = (fog : \hat{e}, \hat{e})$ και άρα $r(AB) = dim Im(fog) \subseteq dim Imf = r(A)$.

(iii) Ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow r(A) = n$. Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$. Τότε είναι:

ο A είναι αντιστρέψιμος \Leftrightarrow η f είναι ισομορφισμός \Leftrightarrow η f είναι επί \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow Imf = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow dim Imf = n \Leftrightarrow r(A) = n$.

Ορισμός

Οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καλούνται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $B = PAP^{-1}$.

Παρατηρήσεις

(i) Αν οι A, B είναι όμοιοι, τότε οι A, B είναι ισοδύναμοι (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα).

(ii) Η ομοιότητα πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ο A είναι όμοιος με τον A (γιατί $A = I_n A I_n^{-1}$).

Αν ο A είναι όμοιος με τον B , τότε μπορώ να γράψω $B = P^{-1} B P \Rightarrow A = P^{-1} B (P^{-1})^{-1}$. Καθώς ο P^{-1} είναι αντιστρέψιμος, ο B είναι όμοιος με τον A .

Υποθέτω ότι ο A είναι όμοιος με τον B και ο B όμοιος με τον C . Τότε μπορώ να γράψω $B = P A P^{-1}$ και $C = Q B Q^{-1}$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Καθώς $C = Q(P A P^{-1}) Q^{-1} = Q P A P^{-1} Q^{-1} = (Q P) A (Q P)^{-1}$ και ο $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμοι, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι όμοιος με τον C .

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για δυο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

(i) οι A, B είναι όμοιοι.

(ii) υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και διατεταγμένες βάσεις \hat{u}, \hat{v} του \mathbb{R}^n τέτοιες ώστε $A = (f : \hat{u}, \hat{u})$ και $B = (f : \hat{v}, \hat{v})$.

Απόδειξη

(i) \Rightarrow (ii) Γράφω $B = P A P^{-1}$ Για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και επιλέγω μια διατεταγμένη βάση \hat{u} του \mathbb{R}^n . Γνωρίζω ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $(f : \hat{u}, \hat{u}) = A$. Γνωρίζω επίσης ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση \hat{v} του \mathbb{R}^n , τέτοια ώστε $P = (1_{\mathbb{R}^n} : \hat{u}, \hat{v})$.

Έτσι είναι $B = P A P^{-1} = (1_{\mathbb{R}^n : \hat{u}, \hat{v}})(f : \hat{u}, \hat{u})(1_{\mathbb{R}^n : \hat{v}, \hat{u}}) = (1_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ 1_{\mathbb{R}^n} : \hat{v}, \hat{v}) = (f : \hat{v}, \hat{v})$.

(ii) \Rightarrow (i) Θεωρώ τον πίνακα αλλαγής βάσης $P = (1_{\mathbb{R}^n} : \hat{u}, \hat{v})$ και υπολογίζω:

$P A P^{-1} = (1_{\mathbb{R}^n : \hat{u}, \hat{v}})(f : \hat{u}, \hat{u})(1_{\mathbb{R}^n : \hat{v}, \hat{u}}) = (1_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ 1_{\mathbb{R}^n} : \hat{v}, \hat{v}) = (f : \hat{v}, \hat{v}) = B$.

Συνεπώς, οι πίνακες A και B είναι πράγματι όμοιοι.