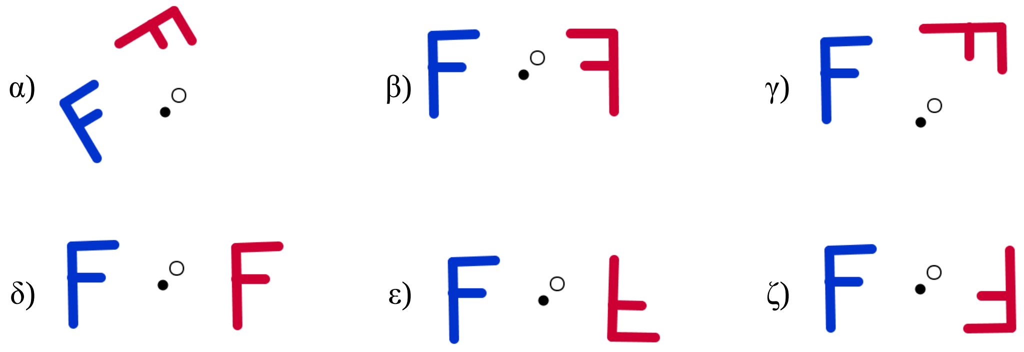
4 στροφή γύρω από σημείο

στροφή γύρω από σημείο

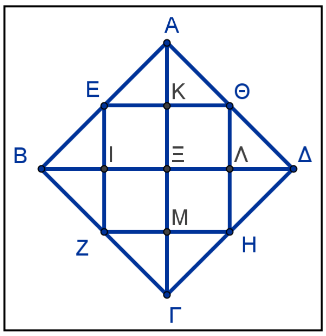
4.1 Ποιο είναι το σωστό;

Σε ποια από τις εικόνες το κόκκινο σχήμα είναι προέρχεται από στροφή του μπλε σχήματος γύρω από το σημείο Ο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στις άλλες περιπτώσεις, πως μπορούν να προκύψουν τα κόκκινα σχήματα από τα μπλε;



4.2 Ποια είναι η εικόνα;

Συνήθως, λέμε ότι κινείται "αριστερόστροφα" κάτι που περιστρέφεται με φορά αντίθετη της φοράς του ρολογιού (↺). Αλλιώς, λέμε ότι κινείται "δεξιόστροφα" (↻). Ειδικότερα στη στροφή γύρω από σημείο, συμφωνούμε ως φορά την αριστερόστροφη, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.



Στο διπλανό σχήμα βρείτε ποια είναι η εικόνα

α) του ΞΔ μετά από στροφή 90° γύρω από το Ξ

β) του ΑΚ μετά από στροφή 90° γύρω από το Ξ

γ) του ΒΕ μετά από στροφή 270° δεξιόστροφα γύρω από το Ξ

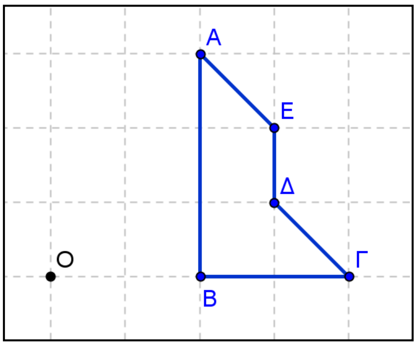
δ) του ΜΓΗ μετά από στροφή 180° γύρω από το Ξ

ε) του ΒΕ μετά από στροφή 90°

Σε μια παρόμοια ερώτηση ο Γιάννης απάντησε ότι η εικόνα του ΘΔ μετά από κάποια στροφή είναι το ΛΔ. Αμέσως η Ελένη διαφώνησε: "δεν μπορεί να είναι το ΛΔ!" Εσείς με ποιον συμφωνείτε; Γιατί;

4.3 Στροφή σχήματος σε τετραγωνισμένο χαρτί

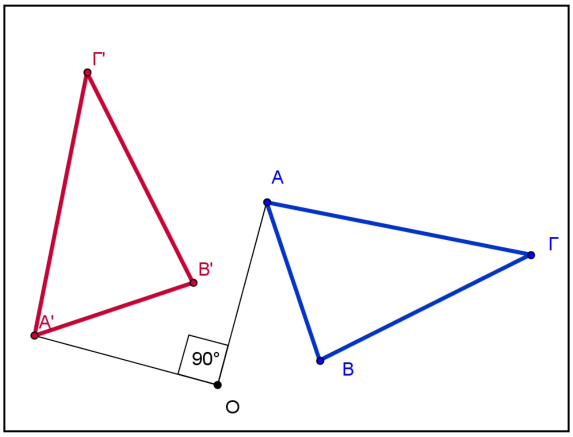
Να μεταφέρετε το διπλανό σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να σχεδιάσετε το σχήμα που προκύπτει από τη στροφή του (αντίθετα από το ρολόι) κατά α) 90°, β) 180° γ) 270°. Συγκρίνετε τις πλευρές του αρχικού σχήματος με τις αντίστοιχές τους της εικόνας. Κάντε την ίδια σύγκριση για τις γωνίες. Τι συμπεραίνετε;



Αφού κάνετε την κατασκευή με το χέρι, κάντε την και με λογισμικό: ανοίξτε το αρχείο strofi17.ggb του Geogebra.

4.4 Στροφή και ισότητα σχημάτων

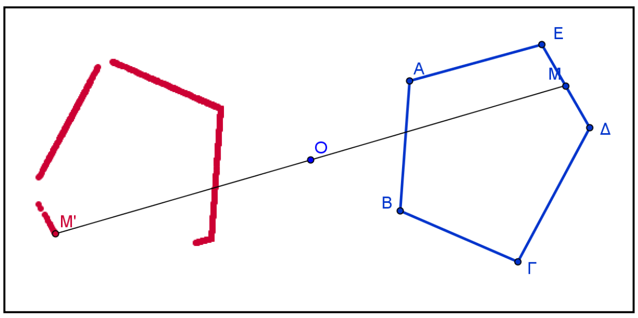
Έχουμε ένα αρχικό σχήμα και εκείνο που προκύπτει από τη στροφή του κατά μία γωνία. Ποια σχέση νομίζετε ότι υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό σχήμα; Είναι ίσα ή όχι; Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με τις εικόνες τους; Οι γωνίες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Κατά τη στροφή ενός σχήματος, το τελικό σχήμα είναι ίσο με το αρχικό. Ειδικότερα, τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και οι αντίστοιχες γωνίες έχουν ίσα μέτρα.

4.5 Συμμετρία ως προς κέντρο (κεντρική συμμετρία)

Αν έχουμε δύο σημεία Ο και Μ και βρούμε ένα σημείο Μ΄ ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΜΜ΄, λέμε ότι το Μ΄ είναι το συμμετρικό του Μ με κέντρο συμμετρίας το Ο. Έτσι, το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς

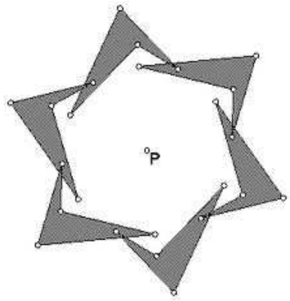


σημείο Ο είναι εκείνο το σχήμα που προκύπτει αν βρούμε τα συμμετρικά, ως προς το Ο, όλων των σημείων του αρχικού σχήματος (δείτε το αρχείο strofi19a.ggb).

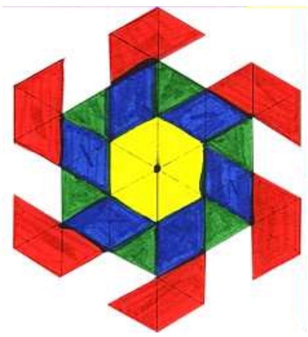
Μπορείτε να βρείτε τα συμμετρικά ενός ευθύγραμμου τμήματος, ενός κύκλου και μιας γωνίας ως προς κάποιο σημείο Ο; Μπορείτε να το κάνετε χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη;

Τι σχέση νομίζετε ότι έχει η κεντρική συμμετρία με τη στροφή γύρω από σημείο; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο strofi19b.ggb του Geogebra.

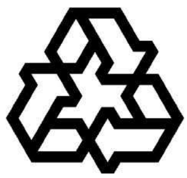
4.6 Σχήματα συμμετρικά ως προς σημείο



Υπάρχουν σχήματα που όταν περιστραφούν γύρω από κάποιο σημείο (κέντρο) κατά γωνία 180°, τότε συμπίπτουν με τον εαυτό τους. Σε αυτά τα σχήματα, το συμμετρικό κάθε σημείου τους ως προς το κέντρο είναι πάλι σημείο του σχήματος. Τέτοια σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο. Τα σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς κέντρο μπορεί να έχουν και άξονες συμμετρίας, αλλά μπορεί και όχι.



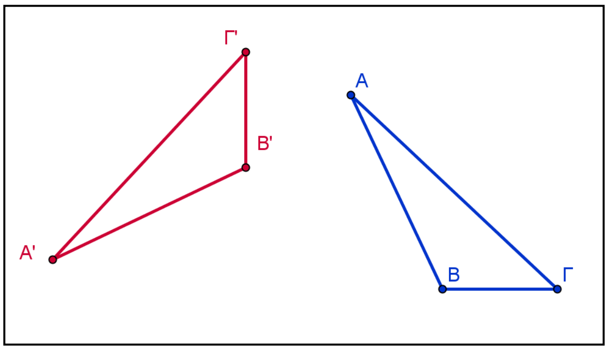
Μπορείτε να βρείτε τέτοια σχήματα (συμμετρικά ως προς κέντρο) από τη φύση, την τέχνη ή άλλα ανθρώπινα δημιουργήματα;



Υπάρχουν όμως και κάποια σχήματα που έχουν ένα κάπως περίεργο είδος συμμετρίας! Πρόκειται για σχήματα που θα συμπέσουν με τον εαυτό τους μόνο αν περιστραφούν κατά κάποια γωνία διαφορετική από 180° και 360°. Για παράδειγμα, εξετάστε αν το σύμβολο της ανακύκλωσης έχει άξονα ή κέντρο συμμετρίας. Μπορεί να συμπέσει με τον εαυτό του με περιστροφή;

Μπορείτε να βρείτε κι άλλα τέτοια σχήματα που συμπίπτουν με τον εαυτό τους μετά από στροφή διαφορετική των 180°;

4.7 Χάθηκε το κέντρο!

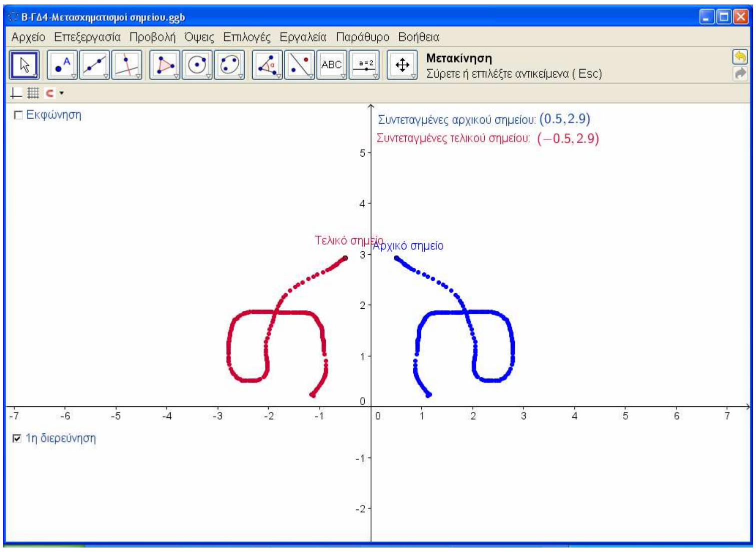


Ένα σχήμα περιστράφηκε κατά 90° αλλά ο σχεδιαστής του ξέχασε να σημαδέψει το σημείο γύρω από το οποίο έκανε τη στροφή. Μπορούμε να τον βοηθήσουμε να βρει το κέντρο περιστροφής;


Για να μπορέσετε να βρείτε το κέντρο περιστροφής σκεφτείτε τι ιδιότητες έχει το σημείο αυτό. Ξεκινήστε από ένα σημείο A, περιστρέψτε το γύρω από ένα σημείο O και φτιάξτε έτσι το τελικό σημείο A΄. Τι ιδιότητες έχει το O σε σχέση με τα A και A΄; Αυτές οι ιδιότητες θα σας βοηθήσουν να βρείτε το O αν ξέρετε τα A και A΄.

5 και τώρα, όλοι οι μετασχηματισμοί μαζί!

5.1 Παίζοντας με τους μετασχηματισμούς (α)



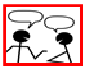
Στο αρχείο Β-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου.ggb του Geogebra σύροντας ένα σημείο (αρχικό) μετακινείται ένα δεύτερο σημείο (τελικό) σύμφωνα με κάποιον άγνωστο μετασχηματισμό. Πρέπει να αναγνωρίσετε το μετασχηματισμό και να βρείτε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των δύο σημείων. Ανοίξτε το αρχείο και ακολουθήστε τις οδηγίες.

5.2 Αναλλοίωτα σημεία

Σε κάποιες περιπτώσεις μετασχηματισμών ίσως υπάρχουν κάποια σημεία που παραμένουν αμετάβλητα, δηλαδή μετασχηματίζονται στον εαυτό τους. Έτσι, τα σημεία του άξονα συμμετρίας έχουν για συμμετρικό τον εαυτό τους. Τέτοια σημεία λέγονται **αναλλοίωτα**.

α) Εκτός από τα σημεία του άξονα συμμετρίας, υπάρχουν άλλα αναλλοίωτα σημεία σε μια ανάκλαση;

β) Υπάρχουν αναλλοίωτα σημεία σε μια στροφή 90°; Σε μια οποιαδήποτε στροφή; Αν ξέρουμε ότι ένα σημείο (εκτός από το κέντρο της στροφής) είναι αναλλοίωτο, τι συμπέρασμα βγάζουμε;

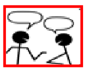


γ) Υπάρχουν αναλλοίωτα σημεία σε μια μετατόπιση;

5.3 Ιδιότητες των μετασχηματισμών

Σε τι διαφέρουν και τι κοινό έχουν η μετατόπιση, η ανάκλαση και η στροφή του ίδιου σχήματος; Τι σχέση έχουν οι εικόνες με το αρχικό σχήμα; Σε τι διαφέρουν οι διαδικασίες των τριών μετασχηματισμών;

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στη μετατόπιση, την ανάκλαση και τη στροφή, το αρχικό και το τελικό σχήμα είναι ίσα. Δηλαδή, τα ευθύγραμμα τμήματα του αρχικού σχήματος έχουν ίσα μήκη με τα αντίστοιχά τους στο τελικό σχήμα και οι αντίστοιχες γωνίες έχουν ίσα μέτρα. Για το λόγο αυτό, αυτοί οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί λέγονται **ισομετρίες**. Οι ισομετρίες περιγράφουν αυτό που μπορούμε να πούμε με απλούστερα λόγια: δυο σχήματα μπορεί να είναι ίσα, ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο.

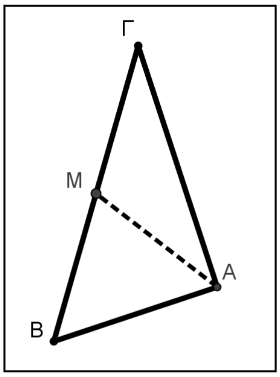


Βέβαια, υπάρχει και μια διαφορά: η ανάκλαση αντιστρέφει τη φορά των γωνιών. Για παράδειγμα, αν ένα τρίγωνο το διαβάζουμε δεξιόστροφα (↻) ως ΑΒΓ, το συμμετρικό του θα διαβάζεται Α'Β'Γ' αριστερόστροφα (↺).

5.4 Χρήση των μετασχηματισμών στη δικαιολόγηση ισχυρισμών

Την ιδιότητα των μετασχηματισμών να διατηρούν σταθερά τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και τα μέτρα των γωνιών, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να δικαιολογήσουμε ισχυρισμούς σχετικά με την ισότητα σχημάτων.

Α. Ας επιχειρήσουμε να δικαιολογήσουμε μια ιδιότητα που έχει το ορθογώνιο τρίγωνο: Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



Στην αρχή, χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας για να δικαιολογήσετε γιατί οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Βρείτε το συμμετρικό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ως προς το μέσο Μ της υποτείνουσάς του. Τι σχήμα είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται και γιατί; Τι σχέση έχουν οι διαγώνιοί του; Τώρα μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η διάμεσος ΑΜ είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ;

Β. Δοκιμάστε να επιχειρηματολογήσετε υπέρ των παρακάτω ισχυρισμών, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς.

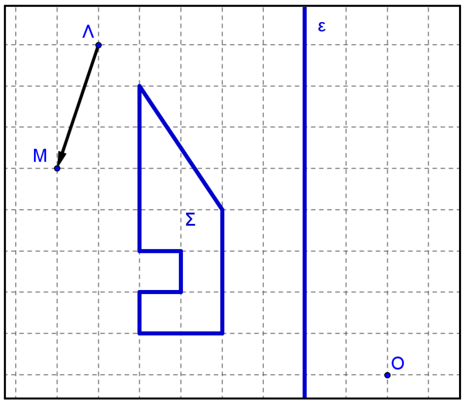
α) Αν σε ένα τρίγωνο μια διάμεσος είναι και ύψος του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

γ) Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

δ) Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

5.5 Διαδοχικοί μετασχηματισμοί



Ας δοκιμάσουμε τι αποτελέσματα μπορεί να έχουν σε ένα σχήμα κάποιοι μετασχηματισμοί που γίνονται διαδοχικά (ο δεύτερος στο τελικό σχήμα του πρώτου, ο τρίτος στο τελικό σχήμα του δεύτερου κλπ). Μεταφέρετε το διπλανό σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Βρείτε το συμμετρικό του σχήματος Σ με άξονα την ευθεία ε και ονομάστε το νέο σχήμα $Σ_1$. Περιστρέψτε το $Σ_1$ γύρω από το Ο κατά γωνία 90° με τη φορά του ρολογιού και ονομάστε $Σ_2$ το τελικό σχήμα. Ξεκινώντας πάλι από το σχήμα Σ, κάντε τους ίδιους μετασχηματισμούς με την αντίστροφη σειρά, δηλαδή πρώτα τη στροφή του Σ (για να προκύψει το $Σ_3$) και μετά την ανάκλαση του $Σ_3$ για να προκύψει το $Σ_4$. Το $Σ_2$ και το $Σ_4$ είναι το ίδιο σχήμα;

Μπορείτε να ξανακάνετε το ίδιο "πείραμα", α) με την ανάκλαση ως προς την ε και τη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{ΛΜ}$ και β) με τη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{ΛΜ}$ και τη στροφή γύρω από το Ο.

Τι συμπέρασμα βγάζετε; Όταν εφαρμόζουμε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς, έχει σημασία η σειρά τους ή όχι;

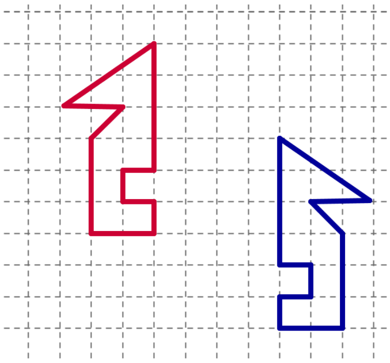
5.6 Μια ειδική περίπτωση δύο διαδοχικών μετασχηματισμών

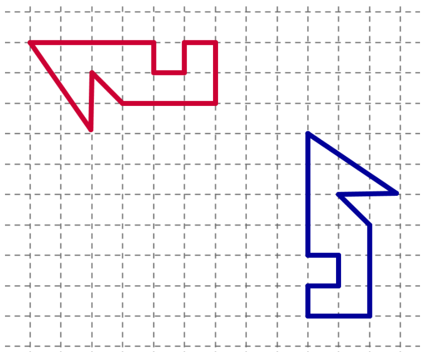
Μια ειδική περίπτωση διαδοχικών μετασχηματισμών είναι όταν έχουμε ανάκλαση ως προς μια ευθεία και μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο προς τον άξονα ανάκλασης. Αυτό το ζεύγος διαδοχικών μετασχηματισμών λέγεται "μεταφορά με ανάκλαση". Το αποτέλεσμα μοιάζει με τα ίχνη των ποδιών μας όταν περπατάμε στην άμμο, με την κατανομή των φύλλων σε κλαδιά αρκετών φυτών, κλπ.

Δοκιμάστε κι εσείς να φτιάξετε ένα σχήμα με αυτό το μετασχηματισμό: επιλέξτε το σχήμα που θέλετε να επαναλαμβάνεται και φτιάξτε το καλούπι, επιλέξτε την ευθεία και το διάνυσμα και ξεκινήστε.

5.7 Ποιοι μετασχηματισμοί έγιναν;

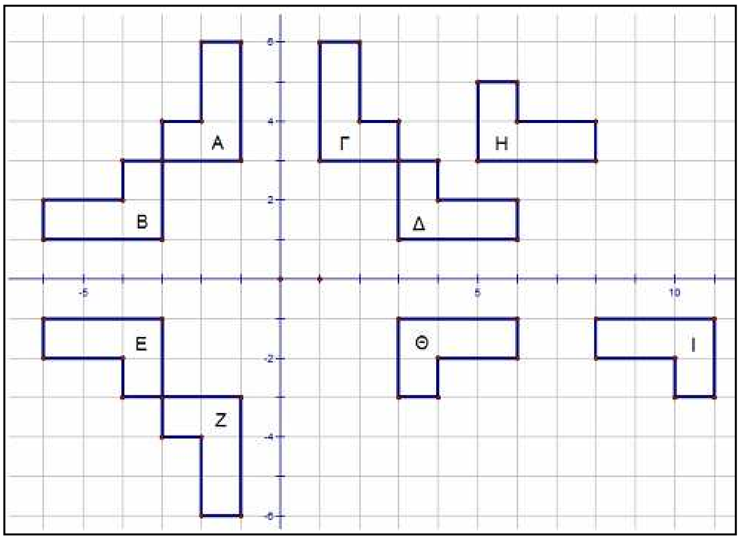
Στα παρακάτω σχήματα βρείτε τους μετασχηματισμούς (δύο κάθε φορά) που έγιναν ώστε από το αρχικό σχήμα (μπλε) να προκύψει το τελικό (κόκκινο).





5.8 Παίζοντας με τους μετασχηματισμούς (β)

Χωριστείτε σε ομάδες και κάθε ομάδα σε δύο υποομάδες. Κάθε υποομάδα προτείνει στην άλλη δύο σχήματα από αυτά της διπλανής εικόνας, ένα ως αρχικό και ένα ως τελικό. Η άλλη υποομάδα πρέπει να βρει το μετασχηματισμό (ή τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς) που συνδέει τα δύο αυτά σχήματα.



5.9 Δύο μετασχηματισμοί στην οικονομική συσκευασία του ενός!

Α1. Σχεδιάστε σε ένα χαρτί ένα σχήμα Σ και μια ευθεία $ε_1$. Βρείτε το συμμετρικό Σ' του Σ ως προς την $ε_1$. Σχεδιάστε μια ευθεία $ε_2$ παράλληλη στην $ε_1$ και βρείτε το συμμετρικό Σ'' του Σ' ως προς την $ε_2$ (θα ήταν πιο εύκολο αν η σειρά των σχημάτων όπως τα βλέπουμε στο χαρτί ήταν: Σ, $ε_1$, Σ', $ε_2$, Σ'' και οι ευθείες δεν τέμνουν κανένα σχήμα). Συγκρίνετε τα σχήματα Σ και Σ''. Τι παρατηρείτε;

Α2. Μετρήστε την απόσταση του Σ από το Σ'' και συγκρίνετέ την με την απόσταση των αξόνων συμμετρίας $ε_1$ και $ε_2$. Τι παρατηρείτε;

Α3. Μπορείτε να βρείτε έναν μετασχηματισμό ο οποίος να "κάνει τη δουλειά" και των δύο ανακλάσεων μαζί; Καταγράψτε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά σας.

Α4. Τι θα συνέβαινε αν το Σ βρισκόταν ανάμεσα στις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$;

Β1. Επαναλάβετε τις οδηγίες του Α1, με τη μόνη διαφορά, η $ε_2$ να μην είναι παράλληλη με την $ε_1$ (για ευκολία, ας σχηματίζουν μια μικρή γωνία, πχ 30°). Τι παρατηρείτε τώρα;

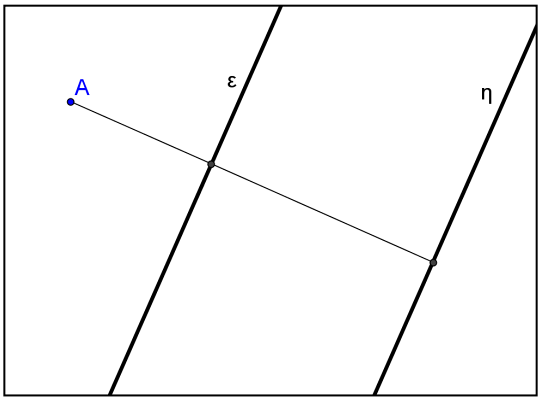
Β2. Αν Α και Α'' δύο αντίστοιχα σημεία του αρχικού και του τελικού σχήματος και Ο το σημείο τομής των $ε_1$ και $ε_2$, μετρήστε τη γωνία $A\hat{O}A''$ και συγκρίνετέ την με τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Τι παρατηρείτε;

Β3. Μπορείτε να βρείτε ένα μετασχηματισμό ο οποίος να κάνει αυτό που κάνουν και οι δύο ανακλάσεις μαζί; Καταγράψτε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά σας.

Γ. Χρησιμοποιήστε τα συμπεράσματα από τα Α1–Α4 για να βρείτε δύο ανακλάσεις που αντικαθιστούν μία μετατόπιση (εργαστείτε με συγκεκριμένα παραδείγματα μετασχηματισμών). Ομοίως, χρησιμοποιήστε τα Β1–Β3 για να βρείτε δύο ανακλάσεις που αντικαθιστούν μία στροφή.

Δ. Κάποιος ισχυρίστηκε ότι αν ένα σχήμα έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε θα έχει και κέντρο συμμετρίας. Ο ισχυρισμός αυτό νομίζετε ότι είναι σωστός ή λάθος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ε. Στο διπλανό σχήμα η απόσταση του Α από την ευθεία ε είναι 6 cm και η απόσταση των παράλληλων ευθειών ε και η είναι 10 cm.



α) Αν βρούμε το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε και μετά βρούμε το συμμετρικό Α'' του Α' ως προς την η, ποια θα είναι η απόσταση του Α από το Α'';

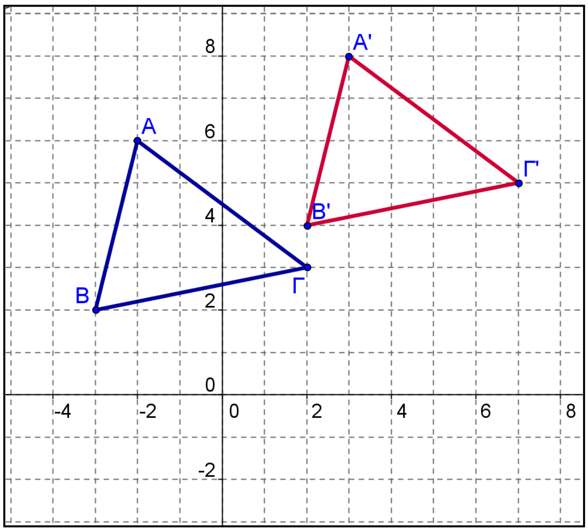
β) Αν η πρώτη συμμετρία είναι ως προς την η και η δεύτερη ως προς την ε, ποια θα είναι η απόσταση του Α από το Α'';

5.10 Σχήματα με πολλές μορφές συμμετρίας

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι συμμετρικό με τον εαυτό του ως προς 3 άξονες συμμετρίας. Επιπλέον, συμπίπτει με τον εαυτό του αν περιστραφεί γύρω από το κέντρο του (το σημείο τομής των διαμέσων του) κατά 120° και κατά 240° (εκτός από τις 0° και 360°). Συνολικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι έχει 5 διαφορετικούς τρόπους συμμετρίας.

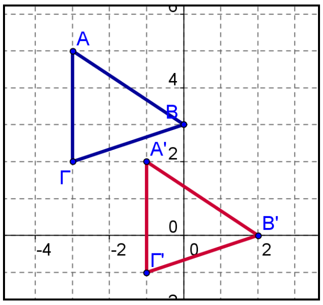
Μπορείτε να βρείτε τις ανακλάσεις και τις στροφές που κάνουν το τελικό σχήμα να συμπίπτει με το αρχικό, για ένα: α) τετράγωνο, β) κανονικό πεντάγωνο γ) ορθογώνιο που δεν είναι τετράγωνο δ) ρόμβο που δεν είναι τετράγωνο,
ε) παραλληλόγραμμο που δεν είναι ορθογώνιο ούτε ρόμβος

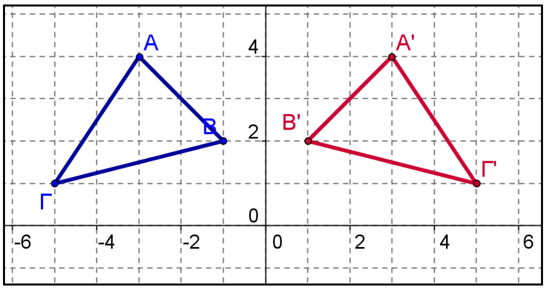
5.11 Μετασχηματισμοί στο καρτεσιανό επίπεδο



Κάθε μετασχηματισμό μπορούμε να τον περιγράψουμε λεκτικά, συμβολικά ή με σχήμα. Για παράδειγμα, το διπλανό σχήμα δείχνει ένα μετασχηματισμό ο οποίος για το τρίγωνο ΑΒΓ δημιουργεί ως εικόνα του το Α΄Β΄Γ΄. Εκτός από το σχήμα, τον ίδιο μετασχηματισμό μπορούμε να τον εκφράσουμε λεκτικά με τη φράση "το νέο σχήμα είναι μετατοπισμένο 5 μονάδες δεξιά και 2 πάνω" και συμβολικά με το "$(x, y) \to (x + 5, y + 2)$".

Στις παρακάτω περιπτώσεις δίνεται η μία από τις τρεις περιγραφές και ζητείται να γράψετε τις άλλες δύο.

α) 

β) 

γ) μετατόπιση κατά 6 δεξιά και 3 κάτω

δ) ανάκλαση ως προς τον άξονα των x

ε) ανάκλαση ως προς τον άξονα των y

στ) $(x, y) \to (x + 2, y - 2)$

ζ) $(x, y) \to (-x, -y)$

η) $(x, y) \to (4 - x, y)$