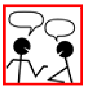
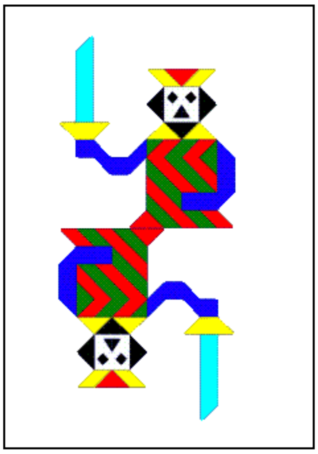
1 Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

1.1 Τι είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί;

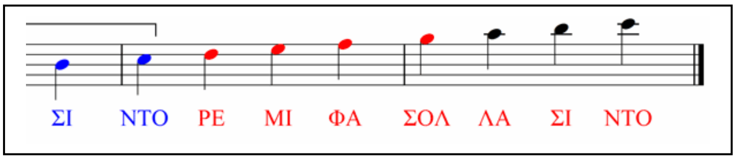
Στο Δημοτικό έχουμε συναντήσει μετασχηματισμούς σχημάτων, όπως η συμμετρία ως προς άξονα, η συμμετρία ως προς κέντρο και η στροφή. Επίσης, τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι πολύ συνηθισμένοι στη φύση και στην τέχνη.



Μπορείτε να ονομάσετε και να περιγράψετε τους μετασχηματισμούς που φαίνονται στις εικόνες;*



Μπορείτε να βρείτε* κι άλλα παραδείγματα παρόμοιων μετασχηματισμών από τη φύση, την τέχνη ή την καθημερινή ζωή;



Όταν έχουμε ένα σχήμα, μπορούμε να το αντιγράψουμε στο διαφανές χαρτί και να το μεταφέρουμε σε άλλη θέση, μπορούμε να το μεγαλώσουμε ή να το μικρύνουμε. Σε κάθε περίπτωση, από ένα αρχικό σχήμα παίρνουμε ένα τελικό σχήμα. Γενικά, το τελικό σχήμα μπορεί να είναι ίδιο με το αρχικό, μεγαλύτερο ή μικρότερο από το αρχικό, ακόμα και να έχει διαφορετική μορφή από το αρχικό.

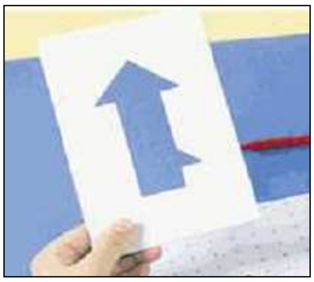
Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **γεωμετρικός μετασχηματισμός**. Η διαδικασία αυτή "μετασχηματίζει" κάθε σημείο του αρχικού σχήματος σε ένα σημείο του τελικού σχήματος. Δηλαδή, γεωμετρικός μετασχηματισμός λέγεται μια διαδικασία κατά την

---

* η εικόνα  σημαίνει: συζητήστε μεταξύ σας, πρώτα στην ομάδα σας και μετά σε όλη την τάξη.
η εικόνα  σημαίνει: γράψτε ή σχεδιάστε ή υπολογίστε ή … (κάντε κάτι εσείς οι ίδιοι)

οποία από ένα **αρχικό** σχήμα, ακολουθώντας ένα **κανόνα**, παίρνουμε ένα **τελικό** σχήμα. Το τελικό σχήμα λέγεται και **εικόνα** του αρχικού.

1.2 Εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς σε σχήμα



Μπορείτε κι εσείς να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να το μετασχηματίσετε όπως τα τρία προηγούμενα. Κατασκευάστε ένα καλούπι, κόβοντας ένα χαρτόνι ή χοντρό χαρτί σε όποιο σχήμα θέλετε (για παράδειγμα, δείτε την εικόνα δίπλα). Χρησιμοποιήστε το καλούπι για να φτιάξετε το αρχικό σας σχήμα. Μετά χρησιμοποιήστε το για να κάνετε:

α) παράλληλη μεταφορά του αρχικού σχήματός σας,

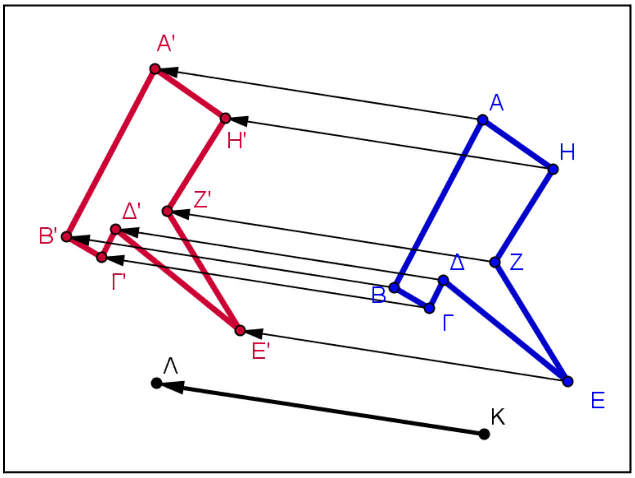
β) ανάκλαση του αρχικού σχήματός σας ως προς κάποια ευθεία,

γ) στροφή του αρχικού σχήματός σας ως προς κάποιο σημείο.

Περιγράψτε κάθε μετασχηματισμό που κάνατε. Από τι εξαρτάται η θέση του τελικού σχήματος σε κάθε περίπτωση; Τι σχέση νομίζετε ότι έχει το αρχικό σχήμα συγκρινόμενο με την εικόνα του;

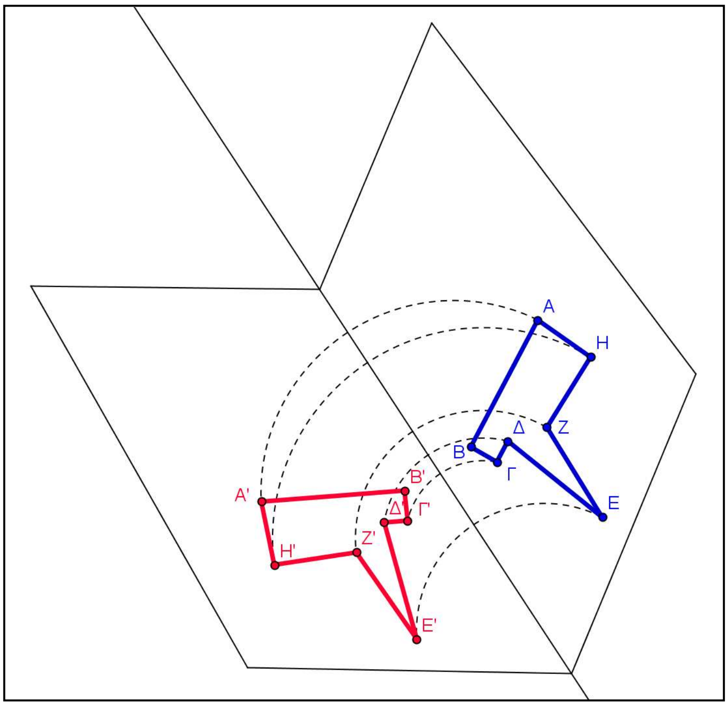
Προσπαθήστε να διατυπώσετε τι θα λέμε παράλληλη μετατόπιση ή μεταφορά, τι ανάκλαση και τι στροφή ενός σχήματος.

1.3 Διατυπώνουμε ορισμούς και τους συζητάμε

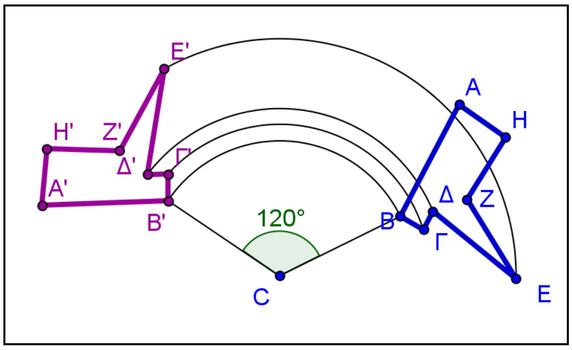


Η **παράλληλη μετατόπιση** (ή παράλληλη μεταφορά, ή απλώς μεταφορά) μεταφέρει το αρχικό σχήμα (μπλε) σε μια άλλη θέση, σε ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση από την αρχική του θέση. Έτσι, η παράλληλη μετατόπιση καθορίζεται από ένα διάνυσμα. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕΖΗ μετατοπίστηκε κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{K}\Lambda}$ και δημιουργήθηκε η εικόνα του, το σχήμα Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄Η΄ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο metafora1.ggb).

Η **ανάκλαση ως προς ευθεία** (ή συμμετρία ως προς άξονα) ανακλά το αρχικό σχήμα (μπλε) με καθρέφτη την ευθεία. Δηλαδή, μπορούμε να φανταστούμε την ευθεία σαν καθρέφτη, και το αρχικό και το τελικό σχήμα σαν το αντικείμενο και το είδωλό του. Αν διπλώναμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας, το αρχικό και το τελικό σχήμα θα συνέπιπταν. Έτσι, η ανάκλαση καθορίζεται από την ευθεία ως προς την οποία ανακλάται το σχήμα μας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο anaklasi1.ggb).



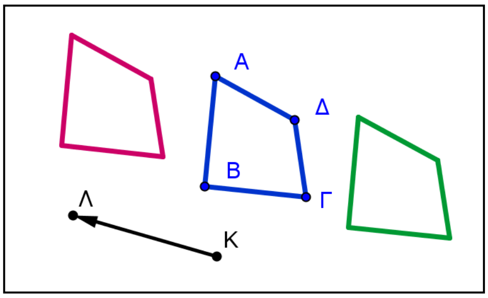
Η **στροφή ως προς σημείο**, περιστρέφει το αρχικό σχήμα (μπλε) γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (το κέντρο) κατά μια συγκεκριμένη γωνία. Συνήθως, μετράμε τις γωνίες με φορά αντίθετη από εκείνη των δεικτών του ρολογιού. Στη στροφή, το αρχικό και το τελικό σημείο ισαπέχουν από το κέντρο. Έτσι, η στροφή ως προς σημείο καθορίζεται από το σημείο και το μέτρο της γωνίας (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο strofi1.ggb).

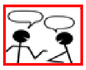


Η συμμετρία ως προς σημείο είναι μια ειδική περίπτωση στροφής. Πιο συγκεκριμένα, είναι η στροφή γύρω από σημείο κατά γωνία 180°.

2 Η παράλληλη μετατόπιση → Η παράλληλη μετατόπιση

2.1 Ποιο είναι το σωστό;





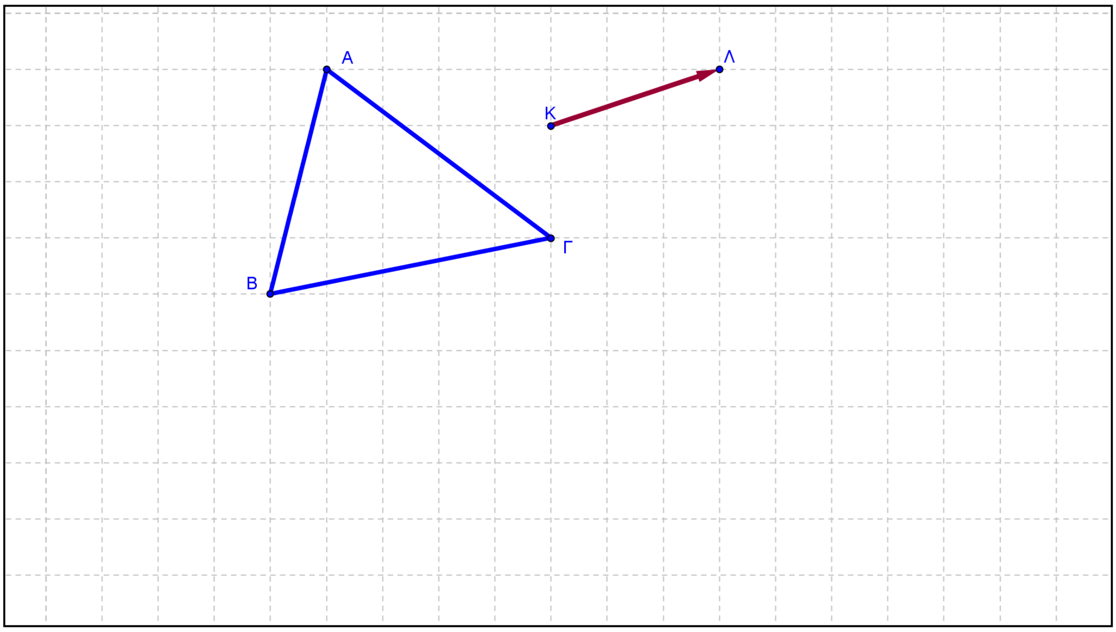
Στο διπλανό σχήμα, βρείτε ποιο από τα τετράπλευρα είναι η μετατόπιση του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατά το διάνυσμα ΚΛ. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Το άλλο τετράπλευρο πως μπορεί να προκύψει από το ΑΒΓΔ;

2.2 Σχεδίαση σε τετραγωνισμένο χαρτί

Στο παρακάτω σχήμα, να σχεδιάσετε το σχήμα που προκύπτει από τη μετατόπιση

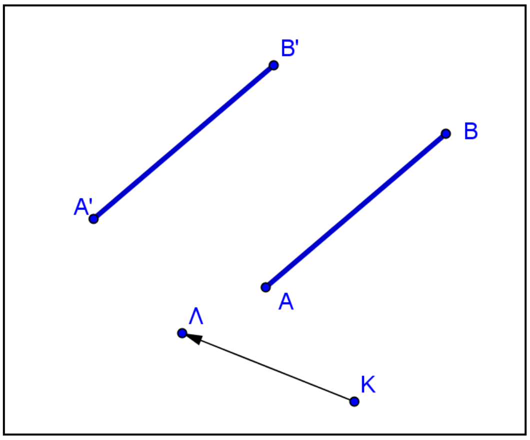
του τριγώνου ΑΒΓ, α) κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$, β) κατά το $\overrightarrow{AB}$, γ) κατά το $\overrightarrow{B\Gamma}$. Σε καθεμία περίπτωση συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του αρχικού σχήματος με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του τελικού σχήματος.

Αφού κάνετε την κατασκευή με το χέρι, κάντε την και με λογισμικό: ανοίξτε το αρχείο metafora5.ggb του Geogebra.



2.3 Μετατόπιση και ισότητα σχημάτων

Έχουμε ένα αρχικό σχήμα και εκείνο που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά του κατά ένα διάνυσμα. Ποια σχέση νομίζετε ότι υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό σχήμα; Είναι ίσα ή όχι; Μπορείτε να ξεκινήσετε τη διερεύνησή σας με ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η εικόνα του Α΄Β΄ μέσω μιας μεταφοράς κατά το διάνυσμα $\vec{\text{ΚΛ}}$ είναι ίσα; Γιατί; Επίσης, συγκρίνετε μια γωνία με την εικόνα της μέσω μιας μετατόπισης. Στη διερεύνηση αυτή, ίσως μπορέσετε να εξηγήσετε και τη λέξη "παράλληλη" που χρησιμοποιούμε στο όνομα αυτού του μετασχηματισμού.



Κατά την παράλληλη μετατόπιση ενός σχήματος, το τελικό σχήμα είναι ίσο με το αρχικό. Ειδικότερα, τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και οι αντίστοιχες γωνίες έχουν ίσα μέτρα.

2.4 Παράλληλη μετατόπιση σε σύστημα συντεταγμένων

α) Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε τα σημεία Α(1,2), Β(2,3), Γ(4,–1) και Δ(1,–2). Βρείτε το τρίγωνο Β΄Γ΄Δ΄ που προκύπτει από τη μετατόπιση του τριγώνου ΒΓΔ κατά το διάνυσμα $\vec{\text{ΟΑ}}$. Συγκρίνετε τις πλευρές ΒΓ και Β'Γ' και τις γωνίες $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\text{Β}}'$.

β) Το διάνυσμα $\vec{\text{ΟΑ}}$ δηλώνει μετατόπιση κατά 1 μονάδα δεξιά και 2 μονάδες πάνω. Πώς φαίνεται αυτό στις συντεταγμένες των σημείων Β΄, Γ΄, Δ΄. Αν έχουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ, ποια θα είναι η μετατόπισή του κατά το διάνυσμα $\vec{\text{ΟΑ}}$ και πως θα εκφραστεί στις συντεταγμένες του;

γ) Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε την προηγούμενη μετατόπιση με το συμβολισμό: $(x, y) \to (x+1, y+2)$, δηλαδή το σημείο με συντεταγμένες (x,y) μετατοπίστηκε στο σημείο με συντεταγμένες (x+1,y+2). Σε τετραγωνισμένο χαρτί σχεδιάστε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ που έχει κορυφές τα σημεία Κ(1,–2), Λ(0,2), Μ(3,2), Ν(5,0). Βρείτε την εικόνα του μετά τον μετασχηματισμό $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 1)$. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι παράλληλη μετατόπιση; Αν είναι, ως προς ποιο διάνυσμα;

δ) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουμε το τρίγωνο ΡΣΤ που έχει κορυφές τα σημεία Ρ(1,1), Σ(0,2), Μ(–2,0). Σε μια παράλληλη μετατόπιση η εικόνα του σημείου Ρ είναι το σημείο Ο(0,0). Ποιες είναι οι εικόνες των άλλων κορυφών του ΡΣΤ;

ε) Αντιγράψτε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το διπλανό τετράπλευρο και βρείτε την εικόνα του μετά από τη μετατόπιση:

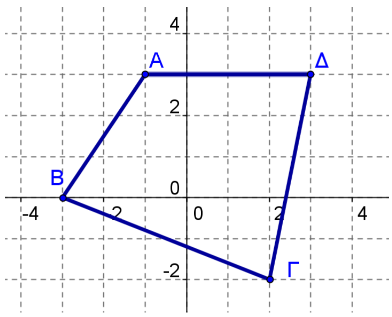
i) 4 μονάδες δεξιά και 1 κάτω

ii) 3 μονάδες αριστερά και 2 πάνω

iii) $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 2)$

iv) $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$

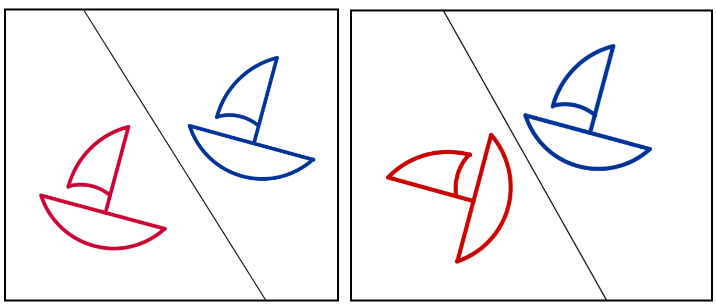
v) $(x, y) \rightarrow (x, y + 3)$



3 Ανάκλαση

3.1 Ποιο είναι το σωστό;

Σε ποια από τις δύο εικόνες το κόκκινο σχήμα είναι η ανάκλαση του μπλε σχήματος ως προς την ευθεία; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στην άλλη εικόνα, πως μπορεί να προκύψει το κόκκινο σχήμα από το μπλε;

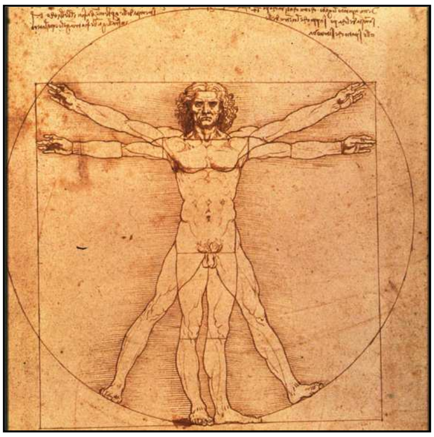


3.2 Βρίσκοντας το συμμετρικό ως προς ευθεία

Σε ένα φύλλο χαρτί σχεδιάστε ένα οποιοδήποτε σχήμα και μια ευθεία. Βρείτε την εικόνα του σχήματός σας μέσω της ανάκλασής του ως προς την ευθεία (ή απλούστερα, το συμμετρικό του σχήματός σας ως προς την ευθεία).

Κάντε το ίδιο με λογισμικό: στο αρχείο anaklasi10.ggb του Geogebra βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΔΕ. Πειραματιστείτε μετακινώντας το σημείο Δ ή Ε για να δείτε πως μεταβάλλεται το συμμετρικό του ΑΒΓ. Κάνετε το ίδιο μετακινώντας τις κορυφές Α ή Β ή Γ. Υπάρχει περίπτωση το συμμετρικό του Α να ταυτίζεται με το Α;

3.3 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

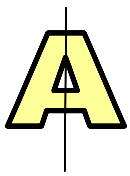


Η λέξη "συμμετρία" στην καθημερινή χρήση της, δηλώνει κάτι που "έχει αρμονία", κάτι που είναι "σωστά ζυγισμένο" ή "έχει ισορροπία γύρω από μια ευθεία". Έτσι, το ανθρώπινο σώμα ή πρόσωπο είναι συμμετρικά ως προς μια κατακόρυφη ευθεία. Πολλές εικόνες της φύσης (από ζώα και φυτά) αλλά και ανθρώπινες κατασκευές (έργα τέχνης, οικήματα, καθημερινά αντικείμενα) έχουν το χαρακτηριστικό της συμμετρίας ως προς άξονα. Μπορείτε να βρείτε κι άλλα αντικείμενα συμμετρικά ως προς μια ευθεία;

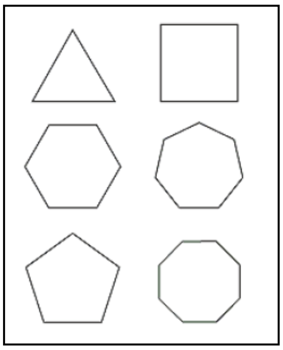
Ένα σχήμα λέμε ότι είναι συμμετρικό ως προς άξονα, όταν το συμμετρικό του ως προς αυτόν τον άξονα είναι το ίδιο το σχήμα.

Πόσους άξονες συμμετρίας μπορεί να έχει ένα σχήμα; Δώστε παραδείγματα σχημάτων με ένα, δύο, τρεις ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.

Ταξινομήστε τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφάβητου με κριτήριο τον αριθμό των αξόνων συμμετρίας τους. Για παράδειγμα, το Α έχει έναν άξονα συμμετρίας, το Χ έχει δύο, κλπ

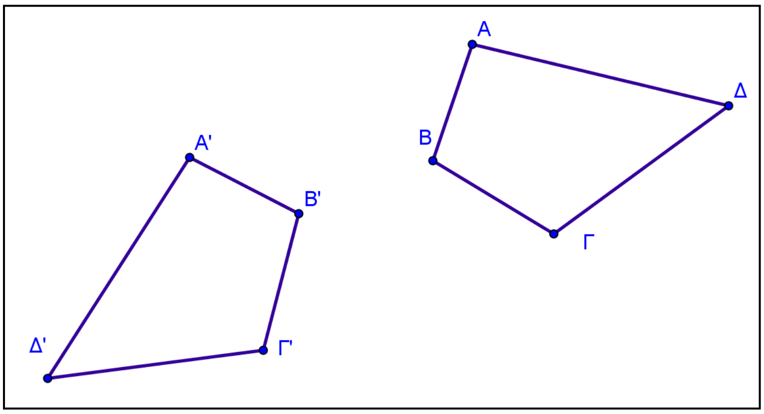


Βρείτε τους άξονες συμμετρίας που έχει ένα κανονικό πολύγωνο με 3, 4, 5, 6 πλευρές. Συμπληρώστε έναν πίνακα με δύο γραμμές: μία για τον αριθμό των πλευρών και μία για τον αριθμό των αξόνων συμμετρίας. Προσπαθήστε να γενικεύσετε για το πλήθος των αξόνων συμμετρίας που έχει ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές; Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του;



3.4 Που πήγε ο άξονας συμμετρίας;

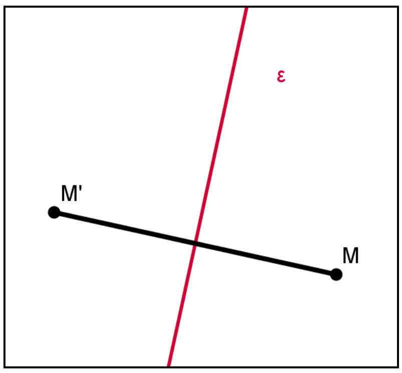
Η Μαρία κι ο Γιάννης συζητούσαν αν στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι συμμετρικά. Για να σιγουρευτούν, αποφάσισαν να βρουν τον άξονα συμμετρίας. Μπορείτε να τους βοηθήσετε; Μεταφέρετε το σχήμα σε ένα φύλλο χαρτί και προσπαθήστε να βρείτε τον άξονα συμμετρίας, αν είναι δυνατόν με περισσότερους από ένα τρόπους.



3.5 Μια ιδιότητα της ανάκλασης

Στην προηγούμενη εργασία, σχεδιάστε τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄. Τι σχέση έχει ο άξονας συμμετρίας με αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα;

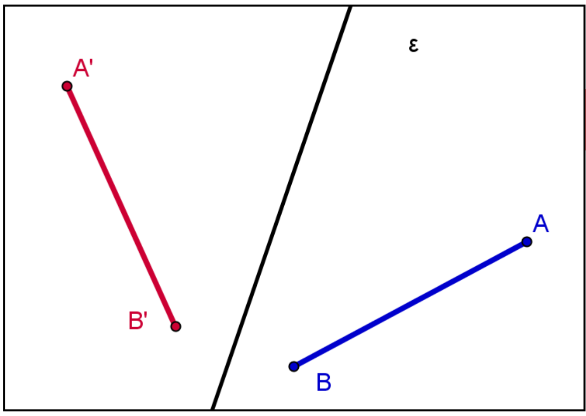
Μήπως αυτό μας δίνει άλλον ένα τρόπο κατασκευής του συμμετρικού ενός σχήματος ως προς άξονα (εκτός από τη δίπλωση του χαρτιού); Χρησιμοποιήστε αυτόν τον τρόπο για να κατασκευάσετε το συμμετρικό ως προς μια ευθεία α) ενός σημείου, β) ενός ευθύγραμμου τμήματος, γ) μιας γωνίας, δ) ενός κύκλου.



Αν το Μ΄ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ευθεία ε, τότε η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΜ΄.

3.6 Ανάκλαση και ισότητα σχημάτων

Έχουμε ένα αρχικό σχήμα και το συμμετρικό του ως προς μια ευθεία. Ποια σχέση νομίζετε ότι υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό σχήμα; Είναι ίσα ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Μπορείτε να ξεκινήσετε τη διερεύνησή σας με ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το συμμετρικό του Α΄Β΄ ως προς την ευθεία ε είναι ίσα; Γιατί; Κάντε το ίδιο με μια γωνία και τη συμμετρική της.



Κατά την ανάκλαση (συμμετρία ως προς άξονα) ενός σχήματος, το τελικό σχήμα είναι ίσο με το αρχικό. Ειδικότερα, τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μήκη και οι συμμετρικές γωνίες έχουν ίσα μέτρα.

3.7 Ανάκλαση σε σύστημα συντεταγμένων

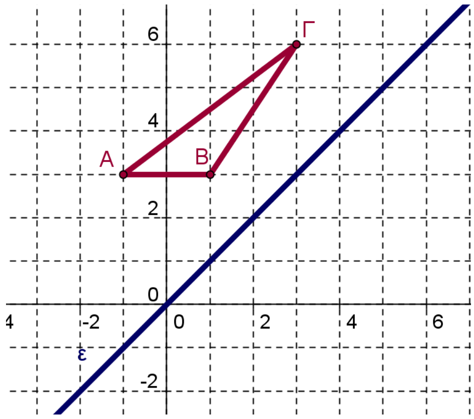
α) Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε τα σημεία Α(1,2), Β(3,0) και Γ(0,4). Σχεδιάστε και βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που είναι συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς α) τον άξονα x΄x, β) τον άξονα y΄y.

β) Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για να βρίσκουμε τις συντεταγμένες του συμμετρικού οποιουδήποτε σημείου ως προς τους δύο άξονες; Στη μεταφορά είχαμε χρησιμοποιήσει συμβολισμό όπως ο $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 2)$, για να δείξουμε τη μετατροπή των συντεταγμένων. Πως μπορούμε να κάνουμε κάτι αντίστοιχο για την ανάκλαση ως προς τον άξονα των x ή των y;

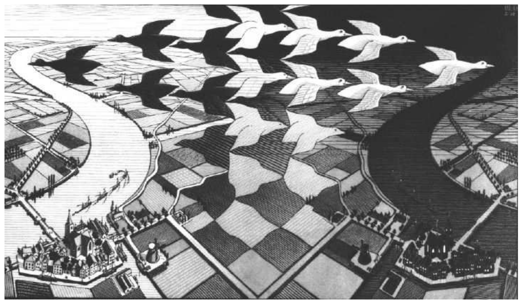
γ) Σε σύστημα συντεταγμένων σχεδιάστε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ. Βρείτε το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς τον x΄x και ονομάστε το $A_1B_1\Gamma_1$. Βρείτε το συμμετρικό του $A_1B_1\Gamma_1$ ως προς τον y΄y και ονομάστε το $A_2B_2\Gamma_2$. Βρείτε το συμμετρικό του $A_2B_2Γ_2$ ως προς τον x΄x και ονομάστε το $A_3B_3Γ_3$. Ποιο είναι το συμμετρικό του $A_3B_3Γ_3$ ως προς τον y΄y; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό;

δ) Στο διπλανό σχήμα, βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ε.

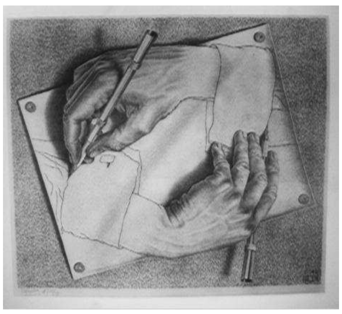
Μπορείτε να προβλέψετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Κ(–2,5), χωρίς να το σχεδιάσετε;



τέχνη και μαθηματικά



Ο Μ. Κ. Έσερ (Maurits Cornelis Escher) (1898 – 1972) ήταν Ολλανδός ζωγράφος γνωστός για τα έργα του (πίνακες ζωγραφικής, λιθογραφίες και ξυλογραφίες) στα οποία κεντρικό ρόλο έχει η γεωμετρία, οι συμμετρίες και τα παράδοξα. Ο ίδιος έλεγε: "Διασχίζω συνεχώς το σύνορο μεταξύ μαθηματικών και τέχνης".



Αναζητήστε στοιχεία για τον Έσερ και το έργο του.