15/12/2021 Μάθημα 22

Παράδειγμα

$f(x_1,x_2)=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2 \quad , \; x_1,x_2\in\mathbb{R}$

$\nabla f(x_1,x_2)=(4-4x_1-2x_2,\; 6-2x_1-4x_2)$

$\varepsilon=0.3$

Επανάληψη 2

1. Υπολογίζουμε $g_1(t)$

$g_1(t)=f(\underline{x}_1+\nabla f(\underline{x}_1))=f((\frac{1}{2},1)+t\cdot(0,1))=f(\frac{1}{2},1+t)=$

$=-2t^2+t+\frac{9}{2} \quad , \; t\geq 0$

2. Βρίσκουμε το t^*: $\; g_1(t^*)=\max\limits_{t\geq 0} g_1(t)$

$g_1'(t)=-4t+1$

$g_1'(t^*)=0 \Rightarrow -4t^*+1=0 \Rightarrow t^*=\frac{1}{4}$

3. Βρίσκουμε $\underline{x}_2$

$\underline{x}_2=\underline{x}_1+t^*\nabla f(\underline{x}_1)=(\frac{1}{2},1)+\frac{1}{4}(0,1)=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$

4. Συνεχίζουμε;

$\nabla f(\underline{x}_2)=\nabla f(\frac{1}{2},\frac{5}{4})=(-\frac{1}{2},0)$

$\|\nabla f(\underline{x}_2)\|=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}>\varepsilon$

Επανάληψη 3

1. Υπολογίζουμε το $g_2(t)$

$$g_2(t) = f(\underline{x}_2 + t \nabla f(\underline{x}_2)) =$$
$$= f\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) + t\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)\right) =$$
$$= f\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{t}{2}, \tfrac{5}{4}\right) = f\left(\tfrac{1-t}{2}, \tfrac{5}{4}\right) =$$
$$= 2 - 2t + \frac{30}{4} - 2 \cdot \frac{1-2t+t^2}{4} - 2 \cdot \frac{5-5t}{8} - \frac{25}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{37}{8}, \quad t \geq 0$$

2) Υπολογισμός t^*

$$g_2'(t) = -t + \frac{1}{4}$$
$$g_2'(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

3) Υπολογισμός $\underline{x}_3$

$$\underline{x}_3 = \underline{x}_2 + t^* \nabla f(\underline{x}_2) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{4}\right)$$

4) Συνεχίζουμε;

$$\nabla f(\underline{x}_3) = \nabla f\left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{4}\right) = \left(0, \tfrac{1}{4}\right)$$
$$\|\nabla f(\underline{x}_3)\| = \sqrt{\tfrac{1}{16} + 0} = \tfrac{1}{4} < \varepsilon \quad \text{σταματάμε}$$

5.4. Προβλήματα κυρτού προγραμματισμού

Επίλυση με Karush-Kuhn-Tucker.

$\boxed{\text{ΠΚΠ-1}}$ Έστω το π.κ.π.

$$\begin{aligned} \max\ & f(\underline{x}) \\ \text{υπό}\ & g_1(\underline{x}) \leq 0 \\ & g_2(\underline{x}) \leq 0 \qquad (\text{Π.Κ.Π.-1}) \\ & \vdots \\ & g_p(\underline{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

όπου f κοίλη και $g_i(\underline{x})$ κυρτές, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Αν υπάρχουν $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ τέτοια ώστε

$\mu_i \geq 0 \ , i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*) = 0 \ , j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$

$\mu_i \cdot g_i(\underline{x}^*) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, p \quad (3)$

$g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \quad , i = 1, 2, \dots, p \quad (4)$

τότε το $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του Π.Κ.Π.-1.

Σημείωση:

Για κάθε περιορισμό $(g_i(\underline{x}) \leq 0)$ θεωρούμε έναν πολλαπλασιαστή μ_i.

Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot g_i(\underline{x})$.

Τι λένε οι συνθήκες (1)-(4):

Σχέση (1): $\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, p$

Οι πολλαπλασιαστές ≥ 0

Σχέσεις (2): $\frac{\partial L}{\partial x_j}(\underline{x}^*) = 0 \ , j = 1, \dots, n$

Η μερική παράγωγος της συνάρτησης Lagrange ως προς x_j $=0$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Σχέσεις (3): $\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0 \iff$

$\mu_i = 0$ ή $g_i(\underline{x}^*) = 0$

Σχέσεις (4): $g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \ , i = 1, \dots, p$

πρέπει να επαληθεύονται οι περιορισμοί του Π.Κ.Π.-1.

Άσκηση: Να λυθεί το π.μ-γ.π.

$\max \ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 + 3x_2$

υπό $\quad 5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$

Λύση: Έστω $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 + 3x_2$

και $g(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$ κυρτή ως γραμμική

$\nabla f(x_1,x_2) = (-6x_1+2x_2-2, -4x_2+2x_1+3)$

$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$-Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} |6| = 6 > 0 \\ \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24-4 = 20 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -Hf(x_1,x_2)$ θετικά ορισμ.

$\Rightarrow Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά ορισμ.

$\Rightarrow f$ κοίλη.

Έχουμε πρόβλημα ΠΚΠ-1:

Έχουμε έναν περιορισμό $(g_1(\underline{x}) \leq 0)$ δηλ $p=1$, οπότε θέλουμε έναν πολλαπλασιαστή μ_1.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$L(x_1,x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - \mu_1(5x_1+2x_2-10)$

Συνθήκες ΚΚΤ

$\mu_1 \geq 0$	KKT1
$-6x_1+2x_2-2-5\mu_1 = 0$	KKT2
$-4x_2+2x_1+3-2\mu_1 = 0$	KKT3
$\mu_1(5x_1+2x_2-10) = 0$	KKT4
$5x_1+2x_2-10 \leq 0$	KKT5

Παίρνουμε περιπτώσεις: $\mu_1 > 0$ ή $\mu_1 = 0$.

Αν $\mu_1 > 0$: KKT4 $\xRightarrow{\mu_1>0} 5x_1+2x_2-10=0 \Rightarrow x_2 = 5-\frac{5}{2}x_1$ (1)

KKT 2 $\xRightarrow{(1)} -6x_1+10-5x_1-2-5\mu_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11x_1+5\mu_1 = 8 \Rightarrow \mu_1 = \frac{8}{5}-\frac{11}{5}x_1$ (2)

KKT3 $\xRightarrow{(1),(2)} -20+10x_1+2x_1+3-2(\frac{8}{5}-\frac{11}{5}x_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{82}{5}x_1 = 17+\frac{16}{5} \Rightarrow \frac{82}{5}x_1 = \frac{101}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{101}{82}$ (3)

(1) $\xRightarrow{(3)} x_2 = 5-\frac{5}{2}\cdot\frac{101}{82} = \frac{315}{82}$ (4)

(2) $\xRightarrow{(3)} \mu_1 = \frac{8}{5}-\frac{11}{5}\cdot\frac{101}{82} < 0$ KKT1 X

KKT5 X

Αν $\mu_1 = 0$:

KKT 2 $\xRightarrow{\mu_1=0} -6x_1+2x_2-2=0 \Rightarrow x_2 = 1+3x_1 \quad (1)$

KKT 3 $\xRightarrow[(1)]{\mu_1=0} -4-12x_1+2x_1+3=0 \Rightarrow -10x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{10} \quad (2)$

$(1) \xRightarrow{(2)} x_2 = 1+3(-\frac{1}{10}) = \frac{7}{10} \quad (3)$

KKT1 ✓

KKT2,3 ✓

KKT4 ✓

KKT5: $5(-\frac{1}{10})+2\cdot\frac{7}{10}-10 \le 0 \Leftrightarrow \frac{9}{10} \le 10$ ✓

Άρα, $\underline{x}^* = \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

$\boxed{\text{ΠΚΠ-2}}$ Έστω το π.κ.π. $\max f(x)$ υπό $\underline{x} \ge \underline{0}$

(ΠΚΠ-2) $x_j \ge 0 \quad \forall j = 1,\dots,n$

$\underbrace{-x_j}_{g_j(x)} \le 0 \quad \forall j=1,\dots,n$

όπου f κοίλη.

Αν υπάρχει $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$x_j^* \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) \le 0, \; j=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

$$x_j^* \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) = 0, \; j=1,2,\dots,n \qquad (3)$$

τότε το $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-2.

<u>Απόδειξη</u>: Το ΠΚΠ-2 είναι ειδική περίπτωση του ΠΚΠ-1 με n περιορισμούς $(p=n)$ και $g_i(\underline{x}) = -x_i$, $i=1,2,\dots,n$.

Έχουμε n περιορισμούς άρα θεωρούμε n πολλαπλασιαστές μ_i, $i=1,2,\dots,n$.

Η συνάρτηση Lagrange είναι $L(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$.

Συνθήκες KKT:

$$\mu_i \ge 0, \; i=1,2,\dots,n \quad (1')$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) + \mu_j = 0 \Rightarrow \mu_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*), \; j=1,2,\dots,n \quad (2')$$

$$\mu_j(-x_j) = 0 \Rightarrow \mu_j x_j = 0 \xRightarrow{(2')} + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\cdot x_j = 0, \; j=1,\dots,n \quad (3')$$

$$-x_j \le 0 \Rightarrow x_j \ge 0, \; j=1,\dots,n \quad (4')$$

$(4') \Rightarrow (1)$

$(1') \Rightarrow \mu_j \geq 0 \xrightarrow{(2')} -\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \leq 0, \; j=1,\dots,n \Rightarrow (2)$

$(3') \Rightarrow (3)$ ∎

<u>Άσκηση</u> Να λυθεί το π.μ-γ.π.

$$\max \; \ln(1+x_1) - x_1 - x_2$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

<u>Λύση</u>: Έστω $f(x_1,x_2) = \ln(1+x_1) - x_1 - x_2$ κοίλη ως άθροισμα κοίλης και γραμμικής.

Το πρόβλημα είναι της μορφής ΠΚΠ-2.

$x_1 \geq 0$	ΚΚΤ1
$x_2 \geq 0$	ΚΚΤ2
$\frac{1}{1+x_1} - 1 \leq 0$	ΚΚΤ3
$-1 \leq 0$	ΚΚΤ4
$x_1 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1} - 1\right) = 0$	ΚΚΤ5
$x_2 \cdot (-1) = 0$	ΚΚΤ6

Θα πάρουμε περιπτώσεις $x_1 = 0$ ή $x_1 > 0$
$x_2 = 0$ ή $x_2 > 0$.

<u>Αν $x_1 > 0, x_2 = 0$:</u>

ΚΚΤ5 $\xrightarrow{x_1>0} \frac{1}{1+x_1} - 1 = 0 \Rightarrow 1 + x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ ✗

<u>Αν $x_1 = 0, x_2 = 0$:</u>

Επαληθεύονται όλες οι συνθήκες ΚΚΤ.

Άρα $\underline{x}^* = (0,0)$.

20/12/2021 Μάθημα 23

$\boxed{ΠΚΠ-3}$ Έστω το πμγπ $\max f(\underline{x})$

$$\text{υπό } g_1(\underline{x}) \le 0$$
$$g_2(\underline{x}) \le 0 \qquad (ΠΚΠ-3)$$
$$\vdots$$
$$g_p(\underline{x}) \le 0$$
$$x_j \ge 0,\ j=1,\dots,n$$

όπου f κοίλη και $g_i(\underline{x})$ κυρτές $i=1,\dots,p$.

Αν υπάρχουν $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ και $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ με $\overset{(1)}{}\ \mu_i \ge 0,\ i=1,\dots,p$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*) \le 0,\ j=1,\dots,n$

(3) $x_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\right) = 0,\ j=1,\dots,n$

(4) $g_i(\underline{x}^*) \le 0,\ i=1,\dots,p$

(5) $\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0,\ i=1,\dots,p$

(6) $x_j^* \ge 0,\ j=1,\dots,n$

τότε $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-3

<u>Απόδειξη</u> Το ΠΚΠ-3 είναι της μορφής ΠΚΠ-1 με $p+n$ περιορισμούς της μορφής $g_i(\underline{x}) \le 0,\ i=1,\dots,p+n$.

Ιδιαίτερα $g_i(\underline{x}) = -x_j,\ i=p+j,\ j=1,\dots,n$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x}) - \sum_{i=p+1}^{p+n} \mu_i g_i(\underline{x}) =$$

$$= f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{p+j} x_j$$

Συνθήκες ΚΚΤ:

$\mu_i \geq 0 \ , \ i=1,2,\dots,p \qquad (1')$

$\mu_i \geq 0 \ , \ i=p+1,\dots,p+n \qquad (2')$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*) + \mu_{p+j} = 0 \ , \ j=1,\dots,n \qquad (3')$$

$\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0 \ , \ i=1,\dots,p \quad (4')$

$\mu_{p+j} \, x_j^* = 0 \ , \ j=1,\dots,n \quad (5')$

Θέλουμε $g_i(\underline{x}^*) \leq 0, \ i=1,\dots,p \quad (6')$

$x_j^* \geq 0 \ , \ j=1,\dots,n \quad (7')$

$(2') \Longrightarrow \mu_{p+j} \geq 0 \ , \ j=1,\dots,n \quad (8')$

$$(3') \Rightarrow \mu_{p+j} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\right] , \ j=1,\dots,n \qquad (9')$$

$(8'), (9') \Rightarrow (2)$

$(1') \Rightarrow (1)$

$$(5'),(9') \Rightarrow x_j^*\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\right] = 0 \ , \ j=1,\dots,n \Rightarrow (3)$$

$(6') \Rightarrow (4)$

$(4') \Rightarrow (5)$

$(7') \Rightarrow (6)$

$\blacksquare$

Άσκηση: $\max\ -x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+x_2+5$

υπό $3x_1+2x_2\le 12$

$x_1, x_2 \ge 0$

Να λυθεί.

Λύση: Έστω $f(x_1,x_2)=-x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+x_2+5$

και $g_1(x_1,x_2)=3x_1+2x_2-12$.

$\nabla f(x_1,x_2)=(-2x_1-2x_2,\ -4x_2-2x_1+1)$

$$Hf(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$|2|>0$

$\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4>0$

$-Hf$ θετικά ορισ.

Hf αρνητ. ορισμ.

Η $g_1(x_1,x_2)$ κυρτή ως γραμμική.

Έχουμε ΠΚΠ-3 με $p=1$, άρα θέλουμε έναν πολ/στή μ_1.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$L(\underline{x})=f(\underline{x})-\mu_1 g_1(\underline{x})=$$

$$=-x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+x_2+5-\mu_1(3x_1+2x_2-12).$$

Συνθήκες KKT:

$\mu_1\ge 0$ KKT1

$-2x_1-2x_2-3\mu_1\le 0$ KKT2

$-4x_2-2x_1+1-2\mu_1\le 0$ KKT3

$x_1(-2x_1-2x_2-3\mu_1)=0$ KKT4

$x_2(-4x_2-2x_1+1-2\mu_1)=0$ KKT5

$3x_1+2x_2-12\le 0$ KKT6

$\mu_1(3x_1+2x_2-12)=0$ KKT7

$x_1\ge 0$ KKT8

$x_2\ge 0$ KKT9

Παίρνω περιπτώσεις $\mu_1 > 0$ ή $\mu_1 = 0$

$x_1 > 0$ ή $x_1 = 0$

$x_2 > 0$ ή $x_2 = 0$

Περ. 1 : $x_1 = 0,\ \mu_1 > 0,\ x_2 > 0$

$$\mu_1 > 0 \xRightarrow{KKT7} 3x_1 + 2x_2 - 12 = 0 \xRightarrow{x_1 = 0} x_2 = 6$$

$$x_2 > 0 \xRightarrow{KKT5} -4x_2 - 2x_1 + 1 - 2\mu_1 = 0 \xRightarrow[x_2 = 6]{x_1 = 0} -24 + 1 - 2\mu_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_1 = -\frac{23}{2}}$$

KKT1 ✗

Περ. 2 : $x_1 = 0,\ \mu_1 = 0,\ x_2 > 0$

$$x_2 > 0 \xRightarrow{KKT5} -4x_2 - 2x_1 + 1 - 2\mu_1 = 0 \xRightarrow{x_1 = \mu_1 = 0} -4x_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

Ισχύουν όλες οι συνθήκες, οπότε $\underline{x}^* = (0, \frac{1}{4})$.

Άσκηση (Παλιό θέμα)

Έστω το πμγπ

$$\max\ 10 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2$$

υπό $1 \le x_1 + x_2 \le 2 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

α) Να λυθεί γραφικά.

β) Να λυθεί με KKT.

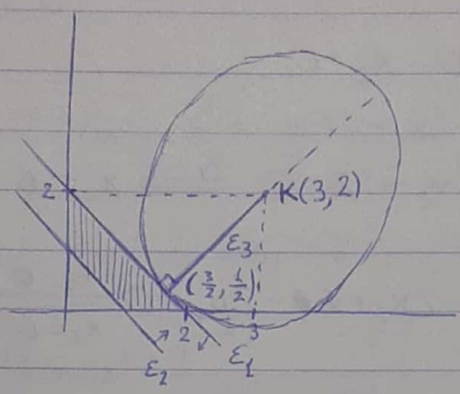
Scanned with CamScanner

α) $\varepsilon_1: x_1+x_2=2$

x_1	0	2
x_2	2	0

$\varepsilon_2: x_1+x_2=1$

x_1	0	1
x_2	1	0



$$10-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2=c$$
$$10-c=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

Για $c\leq 10$ έχουμε κύκλο με κέντρο το $(3,2)$ και ακτίνα $\sqrt{10-c}$.

Για να μεγιστοποιηθεί η τιμή της Α.Σ. πρέπει η ακτίνα να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη αλλά να υπάρχουν σημεία τομής με εφικτή περιοχή.

$$\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1 \Rightarrow d_{\varepsilon_3}\cdot d_{\varepsilon_1}=-1 \Rightarrow d_{\varepsilon_3}=1$$

$$K(3,2)\in\varepsilon_3 \Rightarrow (x_2-2)=1(x_1-3)$$
$$\Rightarrow x_2=x_1-1$$

$\varepsilon_3: x_2=x_1-1$

Το σημείο τομής $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ είναι

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_2=x_1-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_1-1=2 \\ x_2=x_1-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Άρα, $\underline{x}'=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα είναι

Scanned with CamScanner

$$\sqrt{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε $\sqrt{10-c} = \sqrt{\frac{18}{4}} \Rightarrow 10-c=\frac{9}{2} \Rightarrow c=\frac{11}{2}$

Η μέγιστη τιμή της Α.Σ. είναι $\frac{11}{2}$.

β) Έχουμε $f(x_1,x_2)=10-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2$ κοίλη ως αθρ. κοίλων

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1,x_2) &= x_1+x_2-2 \\ g_2(x_1,x_2) &= 1-x_1-x_2 \end{aligned}\right\} \text{κυρτές ως γραμμικές}$$

Έχουμε ΠΚΠ-3 με $p=2$.

Θεωρούμε τους πολ/στές μ_1,μ_2 και τη Lagrangian συνάρτηση

$L(x_1,x_2)=10-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2-\mu_1(x_1+x_2-2)-\mu_2(1-x_1-x_2)$.

Συνθήκες ΚΚΤ:

$\mu_1\geq 0$	ΚΚΤ1
$\mu_2\geq 0$	ΚΚΤ2
$-2(x_1-3)-\mu_1+\mu_2\leq 0$	ΚΚΤ3
$-2(x_2-2)-\mu_1+\mu_2\leq 0$	ΚΚΤ4
$x_1[-2(x_1-3)-\mu_1+\mu_2]=0$	ΚΚΤ5
$x_2[-2(x_2-2)-\mu_1+\mu_2]=0$	ΚΚΤ6
$x_1+x_2-2\leq 0$	ΚΚΤ7
$1-x_1-x_2\leq 0$	ΚΚΤ8
$\mu_1(x_1+x_2-2)=0$	ΚΚΤ9
$\mu_2(1-x_1-x_2)=0$	ΚΚΤ10
$x_1\geq 0$	ΚΚΤ11
$x_2\geq 0$	ΚΚΤ12

Περιπτώσεις: $\mu_1=0$ ή $\mu_1>0$

$\mu_2=0$ ή $\mu_2>0$

$x_1=0$ ή $x_1>0$

$x_2=0$ ή $x_2>0$

Περίπτωση 1: $x_1>0,\ x_2>0,\ \mu_1>0,\ \mu_2=0$

$$x_1>0 \xRightarrow{KKT5} -2(x_1-3)-\mu_1+\cancel{\mu_2}^{0}=0 \Rightarrow \boxed{\mu_1=-2x_1+6} \quad (1)$$

$$x_2>0 \xRightarrow{KKT6} -2(x_2-2)-\mu_1+\cancel{\mu_2}^{0}=0 \Rightarrow \boxed{\mu_1=-2x_2+4} \quad (2)$$

$$\mu_1>0 \xRightarrow{KKT9} x_1+x_2-2=0 \Rightarrow \boxed{x_1=2-x_2} \quad (3)$$

$$(1),(2) \Rightarrow -2x_1+6=-2x_2+4 \Rightarrow x_1=x_2+1$$

$$\xRightarrow{(3)} 2-x_2=x_2+1 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$(3) \xRightarrow{(4)} \boxed{x_1=\frac{3}{2}} \quad (5)$$

$$(1) \xRightarrow{(5)} \boxed{\mu_1=3} \quad (6)$$

Επαληθεύονται όλες οι συνθήκες KKT.

<u>Πρόβλημα</u>

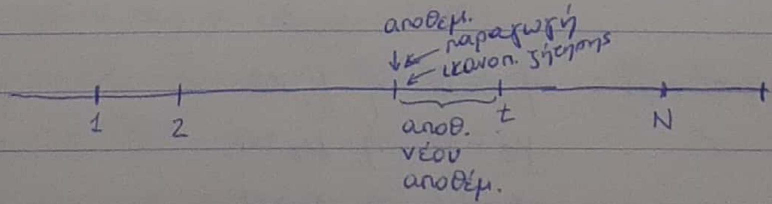
Εταιρεία παράγει ένα προϊόν στις επόμενες N περιόδους.

d_t: ζήτηση την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$

K_t: σταθερό κόστος έναρξης παραγωγής την περίοδο t, $t=1,\dots,N$

c_t: κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την t, $t=1,\dots,N$.

Αν γίνει η παραγωγή της περιόδου t, η ελάχ. ποσότητα που μπορεί να παραχθεί είναι m_t και η μέγιστη M_t.



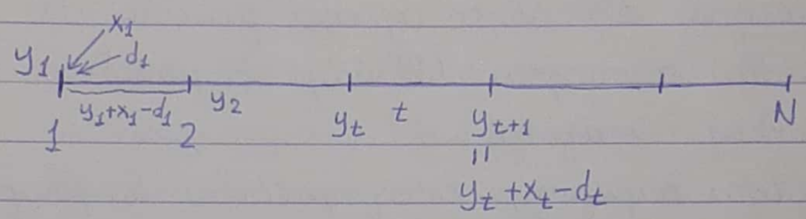
H_t: σταθερό κόστος αν γίνει αποθηκ. την περίοδο t, $t=1,\dots,N$

h_t: κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες παραγωγής ανά περίοδο, ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση και να υπάρχει το ελάχιστο δυνατό κόστος.
Να μοντελοποιηθεί σαν πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγρ..

22/12/2021 Μάθημα 24

<u>Λύση προβλήματος</u>



x_t : η ποσότητα που θα παραχθεί την περίοδο t, $t=1,\dots,N$

$w_t = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν γίνει παραγωγή την } t, \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad t=1,\dots,N$

y_t = ποσότητα αποθέματος στην αρχή της περιόδου t, $t=2,3,\dots,N+1$

$z_t = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν υπάρχει θετικό απόθεμα στην αρχή της περιόδου } t \text{ (δηλαδή αν } y_t=0) \\ & \text{δηλ. αν δεν υπάρχει αποθήκευση την περίοδο } t-1 \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\quad t=2,\dots,N+1$

$$\min \sum_{t=1}^{N} (c_t x_t + K_t w_t) + \sum_{t=1}^{N} (h_t y_{t+1} + H_t z_{t+1})$$

υπό

$y_t + x_t - d_t = y_{t+1}$, $t=1,\dots,N$

$y_t \geq 0$, $t=2,\dots,N+1$

(Απόθεμα 1 θεωρούμε ότι είναι γνωστό)

$m_t w_t \leq x_t \leq M_t w_t$, $t=1,\dots,N$

για πληρότητα → $(z_t) \leq y_t \leq M z_t$, $t=2,\dots,N+1$

σταθερά αυθαίρετα μεγάλη →

$x_t \geq 0 \quad , t=1,\dots,N$
$z_t \in \{0,1\} \quad , t=2,\dots,N+1$
$w_t \in \{0,1\} \quad , t=1,\dots,N$

- Πρόβλημα παραγωγής μίας περιόδου

- n προϊόντα $(j=1,\dots,n)$
- προϊόν j έχει κόστος παραγωγής c_j και απαιτείται ποσότητα 1ης ύλης a_j ανά μονάδα
- συνολική ποσότητα 1ης ύλης b μονάδες
- Συνολική παραγωγή : d
- ποσότητα παραγωγής ενός προϊόντος δεν μπορεί να υπερβαίνει το διπλάσιο της μέσης ~~παραγωγής~~ ποσότητας παραγωγής όλων των προϊόντων
- Να βρεθεί πολιτική παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος
- Να μοντελοποιηθεί σαν π.γ.π..

Λύση: x_j = μονάδες που θα παραχθούν από το προϊόν j, $j=1,\dots,n$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \geq d$$

$$x_j \leq \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , j=1,\dots,n$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

Ένας επενδυτής πρέπει να αποφασίσει την πολιτική επενδύσεων που θα ακολουθήσει για τα επόμενα 2 χρόνια

- $1^{\text{ος}}$ χρόνος: n_1 επενδυτικά προγρ. $(i=1,\dots,n_1)$
  Το πρόγραμμα i έχει απόδοση r_i.
  Μπορούν να επιλεγούν K_1 από τα n_1 προγράμματα.

- $2^{\text{ος}}$ χρόνος: n_2 επενδυτικά προγράμματα $(j=1,\dots,n_2)$
  Αν στο $1^{\text{ο}}$ χρόνο επιλέχθηκε το πρόγραμμα i, τον $2^{\text{ο}}$ χρόνο είναι διαθέσιμα τα $F_i \subseteq \{1,\dots,n_2\}$.
  Το πρόγραμμα j έχει απόδοση w_j, $j=1,\dots,n_2$.
  Μπορούν να επιλεγούν το πολύ K_2 προγράμματα.

Να βρεθεί πολιτική επενδύσεων που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.
Να μοντελοποιηθεί σαν π.α.π.

<u>Λύση</u>: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν επενδ. στο προγ. } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad , i=1,\dots,n_1$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν επενδ. στο προγ. } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad , j=1,\dots,n_2$$

$$\max \sum_{i=1}^{n_1} x_i r_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j w_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^{n_1} x_i \le K_1$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} y_j \le K_2$$

$$y_j \le \sum_{\substack{i=1 \\ i: j \in F_i}}^{n_1} x_i \quad , j=1,\dots,n_2$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad , i=1,\dots,n_1$$
$$y_j \in \{0,1\} \quad , j=1,\dots,n_2$$

Μια εταιρεία μεταφορών έχει K ($k=1,\dots,K$) φορτηγά και N ($n=1,\dots,N$) πελάτες. Μια συγκεκριμένη μέρα πρέπει να μεταφέρει M πακέτα ($m=1,\dots,M$). Το πακέτο m προορίζεται για τον πελάτη f_m. Αν το m μπει στο φορτηγό k, το k θα περάσει από τον πελάτη f_m.
Κάθε πακέτο πρέπει να φορτωθεί σε ένα φορτηγό. Ο όγκος των πακέτων m είναι V_m, $m=1,\dots,M$.
Η χωρητικότητα του φορτηγού k είναι c_k, $k=1,\dots,K$.
Αν το φορτηγό k κάνει παράδοση στον πελάτη n, έχει κόστος h_{kn}, $k=1,\dots,K$, $n=1,\dots,N$.
Ο διευθυντής θέλει να βρει τον τρόπο φόρτωσης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.
Να διατυπωθεί σαν π.α.π..

Λύση: $y_{km} = \begin{cases} 1, & \text{αν το πακέτο } m \text{ μπει στο φορτηγό } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, $k=1,\dots,K$, $m=1,\dots,M$

$z_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{αν το φορτηγό } k \text{ περνάει από τον πελάτη } n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, $k=1,\dots,K$, $n=1,\dots,N$

$$\min \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} h_{kn} z_{kn}$$

υπό $\sum_{k=1}^{K} y_{km} = 1$, $m=1,\dots,M$

$$\sum_{m=1}^{M} y_{km} V_m \le C_k \ , \ k=1,\dots,K$$

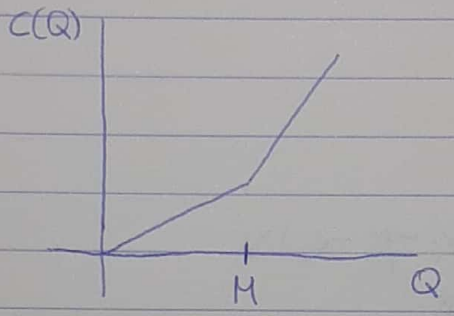
$$y_{km} \le z_{k f_m} \ , \ m=1,\dots,M$$

$$y_{km} \in \{0,1\} \ , \ k=1,\dots,K,\ m=1,\dots,M$$
$$z_{kn} \in \{0,1\} \ , \ k=1,\dots,K,\ n=1,\dots,N$$

Μια εταιρεία παράγει προϊόν σε n διαφορετικά χρώματα. Αν Q είναι η συνολική ποσότητα παραγωγής, το κόστος παραγωγής είναι

$$c(Q) = \begin{cases} c_1 \cdot Q, & \text{αν } Q \le M \\ c_1 \cdot M + c_2(Q-M), & \text{αν } Q > M \end{cases}$$

c_1, c_2 θετικές σταθερές με $c_1 < c_2$



Το κόστος βαφής σε χρώμα i είναι p_i και η τιμή πώλησης είναι r_i ανά μονάδα.
Η ποσότητα προϊόντος που μπορεί να βαφεί σε χρώμα i δεν μπορεί να υπερβεί το v_i.
Μεγιστοποίηση καθαρού κέρδους.
Να γραφτεί σαν π.γ.π.

<u>Λύση</u>: x_i = ποσότητα προϊόντος που θα βαφεί σε χρώμα i, $i=1,\dots,n$

Κόστος παραγωγής:
Παρατηρούμε ότι:

$$c(Q) = \max\{c_1 Q, (c_1-c_2)M + c_2 Q\}.$$

Άρα, το κόστος παραγωγής είναι

$$\max\{c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i, (c_1-c_2)M + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i\}$$

Καθαρό κέρδος:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \max\{c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i, (c_1-c_2)M + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i\} =$$

$$= \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_1) x_i ,\ (c_1 - c_2) M + \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_2) x_i \right\}$$

Άρα, το καθαρό κέρδος είναι η αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_1) x_i ,\ (c_1 - c_2) M + \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_2) x_i \right\}$$

υπό $0 \le x_i \le v_i \ ,\ i = 1, \ldots, n$

$$\max\ z$$

υπό $z \le \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_1) x_i$

$$z \le (c_1 - c_2) M + \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i - c_2) x_i$$

$$0 \le x_i \le v_i \ ,\ i = 1, \ldots, n$$