24/11/2021 Μάθημα 16

4.2.6. Πρόβλημα της ανάθεσης

Υπάρχουν n αντικείμενα και n θέσεις.
Πρέπει κάθε αντικείμενο να μπει σε μία θέση και κάθε θέση να δεχθεί ακριβώς ένα αντικείμενο.
Αν το i μπει στην j → κόστος c_{ij}.
Ψάχνουμε την ανάθεση που ελαχιστοποιεί το κόστος.
Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση: Μεταβλητές απόφασης

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{το } i \text{ στην } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (το i σε μία θέση), $i=1,\dots,n$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ (το j μόνο ένα), $j=1,\dots,n$

$x_{ij} \in \{0,1\}$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$

Άσκηση: Μια εταιρεία πρέπει να κάνει παράδοση παραγγελιών σε 10 πελάτες. Η ποσότητα που έχει παραγγείλει ο πελάτης j είναι d_j, $j=1,\dots,10$. Η εταιρεία έχει 4 φορτηγά.
- Το φορτηγό k έχει χωρητικότητα L_k και ημερήσιο κόστος c_k (αν χρησιμοποιηθεί), $k=1,\dots,4$.
- Ολόκληρη η παραγγελία πρέπει να παραδοθεί από ένα φορτηγό.
- Κάθε φορτηγό πρέπει να παραδόσει ως 5 παραγγελίες.
- Τα ζεύγη των πελατών $\{1,7\}$, $\{2,6\}$, $\{2,9\}$ δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν από το ίδιο φορτηγό.

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος.

Λύση:

$$x_k = \begin{cases} 1, \text{ αν λειτ. το } k \text{ φορτηγό} \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_{kj} = \begin{cases} 1, \text{ το } k \text{ εξυπηρετεί τον πελάτη } j \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

$$\min \sum_{k=1}^{4} c_k x_k$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{10} y_{kj} d_j \leq L_k, \quad k=1,\dots,4$$

$$\sum_{k=1}^{4} y_{kj} = 1, \; j=1,\dots,10$$

$$y_{k1} + y_{k7} \leq 1$$

$$y_{k2} + y_{k6} \leq 1$$

$$y_{k2} + y_{k9} \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{10} y_{kj} \leq 5x_k, \quad k=1,\dots,4$$

αν το φορτηγό λειτουργήσει μπορεί να κάνει μέχρι 5 παραδόσεις

$$x_k \in \{0,1\}, \; k=1,\dots,4$$

$$y_{kj} \in \{0,1\}, \quad k=1,\dots,4, \; j=1,\dots,10.$$

4.3. Μέθοδος Κλάδου - Φράγματος

4.3.1. Χαλαρώσεις και φράγματα

Θεωρούμε το πρόβλημα (καθαρού) α.π. (π.α.π.)

$$z = \max \underline{c}' \cdot \underline{x}$$

$$\text{υπό} \quad A\underline{x} = \underline{b} \qquad (IP)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{x} \in \mathbb{Z}^n$$

Ορισμός: Ονομάζουμε χαλάρωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ένα πρόβλημα που προκύπτει απαλοίφοντας ή χαλαρώνοντας κάποιους περιορισμούς του αρχικού.

- Η εφικτή περιοχή της χαλάρωσης θα περιέχει την εφικτή περιοχή του αρχικού.
- Η βέλτιστη τιμή της α.σ. της χαλάρωσης θα είναι εξίσου καλή ή καλύτερη από τη βέλτιστη τιμή της α.σ. του αρχικού.

π.χ. Αν έχω πρόβλημα μεγιστοποίησης $z_{αρχ} \leq z_{χαλ}$.

Στα προβλ. α.π. χρήσιμη είναι η χαλάρωση γραμμικού προγραμματισμού η οποία προκύπτει αν απαλείψουμε τους περιορισμούς των ακέραιων τιμών.
Άρα, η χαλάρωση γ.π. του (IP) θα είναι:

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{c}'\cdot\underline{x} = z_{LP} \\ \text{υπό}\ & A\underline{x} = \underline{b} \qquad (LP)\ \ (\text{Linear Program}) \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

Ισχύει $F_{IP} \subseteq F_{LP}$ και $z \leq z_{LP}$ (για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει το (LP) να έχει τουλάχιστον μία βέλτιστη λύση με ακέραιες τιμές).
Εφόσον $z \leq z_{LP}$, η τιμή z_{LP} είναι ένα άνω φράγμα για τα z.

Έστω $\underline{x}^0$ μια εφικτή λύση του (LP) και $z^0 = \underline{c}'\cdot\underline{x}_0$ τότε, εφόσον δεν γνωρίζουμε αν είναι βέλτιστη, θα ισχύει $z^0 \leq z$.
Έτσι μπορούμε να πάρουμε ένα κάτω φράγμα για τη z.
Άρα

$$\boxed{\underbrace{z^0}_{\text{κάτω φράγμα}} \leq z \leq \underbrace{z_{LP}}_{\text{άνω φράγμα}}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq \underbrace{z - z^0}_{\substack{\text{χάσμα βελτιστότητας} \\ \text{της εφικτής λύσης } \underline{x}^0}} \leq z_{LP} - z^0 \longrightarrow \text{άνω φράγμα για το χάσμα βελτιστότητας της } \underline{x}^0$$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{z - z^{o}}{z}} \leq \dfrac{z_{LP} - z^{o}}{z} \leq \dfrac{z_{LP} - z^{o}}{z^{o}} \longrightarrow$ άνω φράγμα για ποσοστό υποβελτιστότητας της $\underline{x}^{o}$

ποσοστό υποβελτιστότητας της $\underline{x}^{o}$ δείχνει πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το χάσμα βελτιστότητας από τη βέλτιστη τιμή της α.σ.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε το π.α.π.

$$
\begin{aligned}
z = \max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{υπό} \quad & -17x_1 + 30x_2 \leq 24 \\
& 25x_1 - 18x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

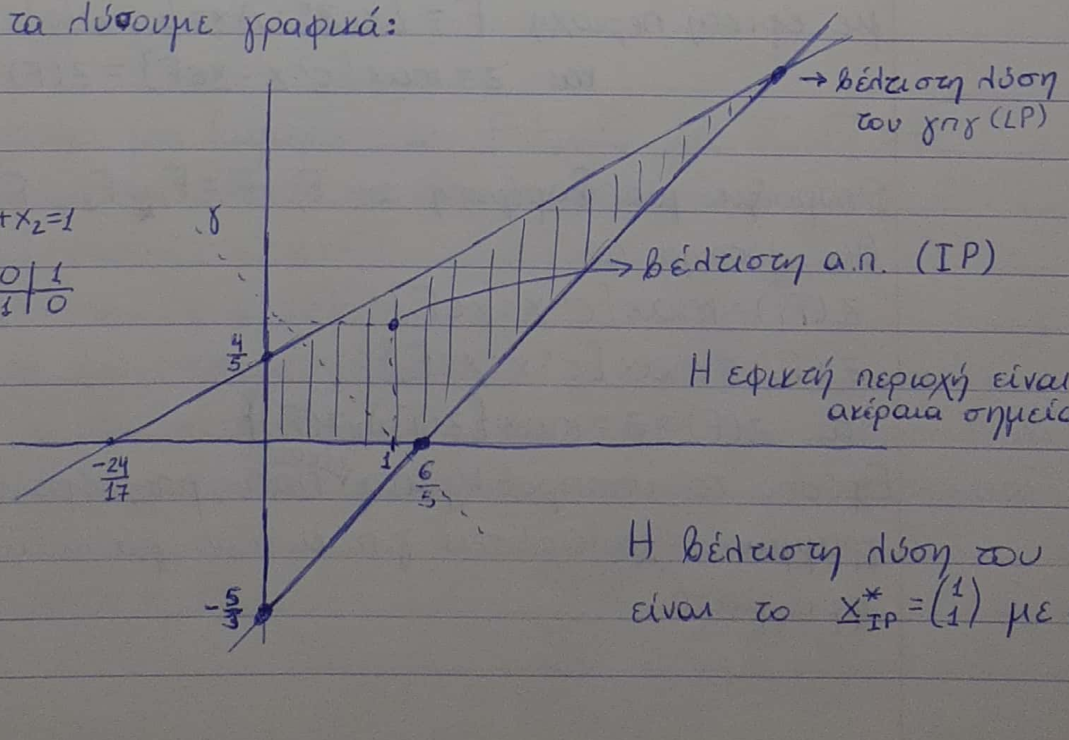
Η χαλάρωση γ.π. είναι

$$
\begin{aligned}
z_{LP} = \max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{υπό} \quad & -17x_1 + 30x_2 \leq 24 \\
& 25x_1 - 18x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Θα τα λύσουμε γραφικά:

$\gamma: x_1 + x_2 = 1$

x_1	0	1
x_2	1	0



Η εφικτή περιοχή είναι τα ακέραια σημεία.

Η βέλτιστη λύση του IP είναι το $\underline{x}^{*}_{IP} = \binom{1}{1}$ με $z = 2$.

Η βέλτιστη λύση του LP: $\begin{array}{l} -17x_1+30x_2=24 \\ 25x_1-17x_2=30 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\frac{5}{2} \\ x_1=3 \end{cases}$

Άρα, $\underline{x}^*_{LP}=\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ με $z_{LP}=\frac{11}{2}$ (Άρα, $z\leq \frac{11}{2}$)

Αν βρίσκαμε μια εφικτή λύση του IP την $\underline{x}^o=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ με $z^o=1$ θα είχαμε:

- το πραγματικό χάσμα βελτιστότητας της $\underline{x}^o$ είναι $z-z^o=2-1=1$
- το άνω φράγμα του χάσματος βελτιστότητας είναι $z_{LP}-z^o=\frac{11}{2}-1=\frac{9}{2}$.
- το ποσοστό υποβελτιστότητας της $\underline{x}^o$ είναι $\frac{z-z^o}{z}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ (το χάσμα βελτιστότητας είναι μία φορά μεγαλύτερο από τη βέλτιστη τιμή της α.σ.)
- Το άνω φράγμα για το ποσοστό βελτιστότητας είναι $\frac{z_{LP}-z^o}{z^o}=\frac{11}{2}-1=\frac{9}{2}$.

4.3.2. Η μέθοδος κλάδου-φράγματος

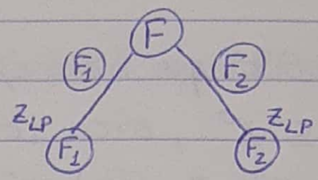
Έστω
$$z=\max \underline{c}'\cdot\underline{x}$$
$$\text{υπό } A\underline{x}=\underline{b} \qquad (IP)$$
$$\underline{x}\geq\underline{0},\ \underline{x}\in\mathbb{Z}^n$$
με εφικτή περιοχή $F=\{\underline{x}\in\mathbb{Z}^n : A\underline{x}=\underline{b},\ \underline{x}\geq\underline{0}\}$
και $z=\max\{\underline{c}'\cdot\underline{x} : \underline{x}\in F\}=z(F)$.

Θεωρούμε μια διαμέριση του F, $F=F_1\cup F_2$, $F_1\cap F_2=\emptyset$ και θα λύσουμε το
$$z(F_1)=\max\{\underline{c}'\cdot\underline{x} : \underline{x}\in F_1\}$$
$$z(F_2)=\max\{\underline{c}'\cdot\underline{x} : \underline{x}\in F_2\}$$
και $z(F)=z=\max\{z(F_1), z(F_2)\}$.

Εφόσον τα υποπροβλήματα είναι ΠΑΠ, μπορούμε να λύσουμε τις γραμμικές χαλαρώσεις γ.π. αυτών για να πάρουμε δύο άνω φράγματα.

→

$z(F_1) \leq z_{LP}(F_1)$
$z(F_2) \leq z_{LP}(F_2)$



29/11/2021 Μάθημα 17

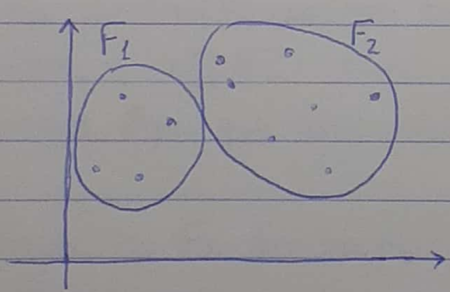
4.3.2. Η μέθοδος κλάδου-φράγματος

Γενικές Ιδέες

- Αν έχουμε ένα ~~πρόβλημα~~ π.α.π.

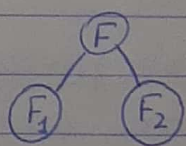
$$z = \max \underline{c}' \cdot \underline{x}$$
$$\text{υπό } A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{x} \in \mathbb{Z}^n$$

με εφικτή περιοχή $F = \{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$,
δηλαδή $z = \max\{\underline{c}' \cdot \underline{x} : \underline{x} \in F\}$.



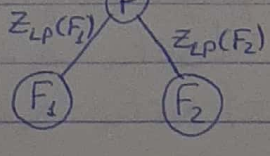
χωρίζω σε 2 υποπεριοχές

Θεωρούμε μια διαμέριση του $F = F_1 \cup F_2$ με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
Μπορούμε να λύσουμε τα δύο υποπροβλήματα:
$z(F_1) = \max\{\underline{c}' \cdot \underline{x} : \underline{x} \in F_1\}$
$z(F_2) = \max\{\underline{c}' \cdot \underline{x} : \underline{x} \in F_2\}$
και να βρω $z = \max\{z(F_1), z(F_2)\}$.



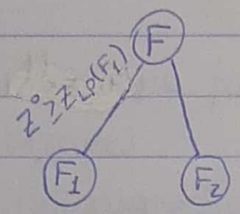
Τα 2 νέα υποπροβλήματα είναι π.α.π. άρα μπορούμε να λύσουμε τις χαλαρώσεις γ.π. και να πάρουμε άνω φράγματα

$z(F_1) \leq z_{LP}(F_1)$
$z(F_2) \leq z_{LP}(F_2)$



• Αν υποθέσουμε ότι έχουμε βρει εφικτή λύση την $\underline{x}^o \in F$ με $z^o = \underline{c}' \cdot \underline{x}^o$, τότε ισχύουν τα εξής:

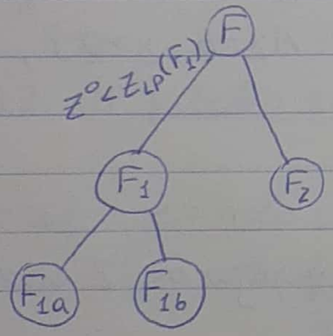
→ Αν $z^o \geq z_{LP}(F_i)$, τότε $z(F_i) \leq z_{LP}(F_i) \leq z_o \leq z$



$\underline{x}^o$ εφικτή με λύση $z^o = \underline{c}' \cdot \underline{x}^o$

Λύνοντας το F_i δεν θα βρω κάτι καλύτερο από το $\underline{x}^o$, δηλ. z^o. Δεν έχει νόημα να λύσουμε το F_i.

→ Αν $z^o < z_{LP}(F_i)$ τότε ίσως προκύψει βέλτιστη λύση από το υποπρόβλημα F_i. Οπότε συνεχίζουμε διακλαδώνοντας το F_i.



$\underline{x}^o$ εφ. λύση με $z^o = \underline{c}' \cdot \underline{x}^o$

<u>Ερωτήματα:</u>

Πώς γίνεται η διαμέριση;

Πότε γίνεται κλάδεμα;

Πότε σταματάει ο αλγόριθμος;

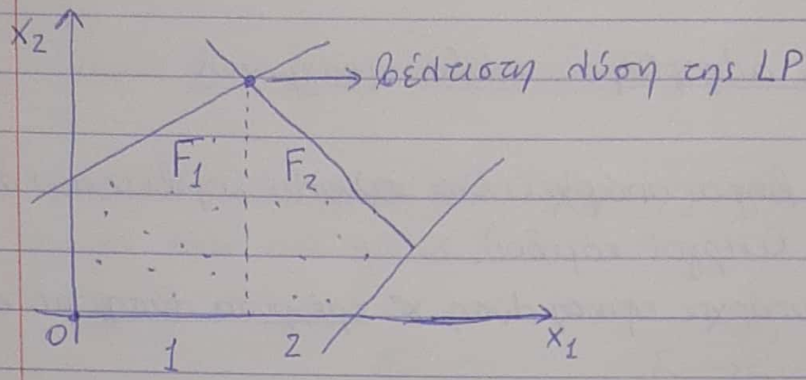
<u>Πώς γίνεται η διαμέριση;</u>

Έστω ότι ένα υποπρόβλημα (ένας κόμβος) F_a, δηλ. υποπρόβλημα με εφικτή περιοχή F_a, έχει λύση της χαλάρωσης γ.π.

$$\underline{x}^*_{LP}(F_a) \notin \mathbb{Z}. \text{ Έστω } \chi.\beta.\gamma. \ x_1^* \notin \mathbb{Z},$$

τότε μπορεί να γίνει η διαμέριση ως εξής

$$F_{a1} = \{ \underline{x} \in F_a : \underline{x}_1 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \}$$
$$F_{a2} = \{ \underline{x}_1 \in F_a : \underline{x}_1 \geq \lfloor x_1^* \rfloor + 1 \}$$



Στα F_{a1}, F_{a2} έχει προστεθεί ένας γραμμικός περιορισμός σε σχέση με το F_a. Άρα, είναι π.α.π..
Έτσι μπορώ να συνεχίσω τη διαδικασία.

<u>Πότε γίνεται κλάδεμα;</u>

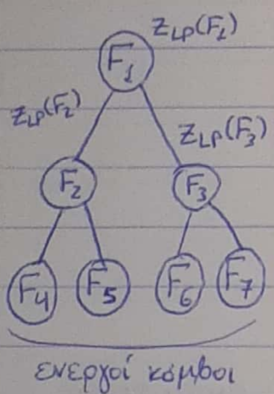
Έστω υποπρόβλημα F_a με βέλτιστη λύση της χαλάρωσης γ.π. την $x^*_{LP}(F_a) \in \mathbb{Z}^n$. Τότε $x^*_{LP}(F_a) = x^*(F_a)$, δηλ. είναι βέλτιστη για το υποπρόβλημα F_a και δεν προχωράμε σε άλλη διαμέριση του F_a (κλαδεύουμε το F_a).
Επιπλέον, η $x^*_{LP}(F_a)$ είναι αρχική λύση του αρχικού προβλήματος. Άρα, για κάθε κόμβο F_b, ελέγχουμε αν $z_{LP}(F_b) \le \underbrace{z_{LP}(F_a)}_{\text{τιμή της α.σ. στην } x^*_{LP}(F_a)}$

Αν είναι, το F_b δεν θα μας δώσει βέλτιστη λύση και το κλαδεύουμε.

<u>Πότε σταματάει ο αλγόριθμος;</u>

Ο αλγόριθμος σταματάει όταν όλοι οι κόμβοι κλαδευτούν.
Η καλύτερη από τις ακέραιες λύσεις που έχουν προκύψει μέχρι εκείνη τη στιγμή θα είναι και η βέλτιστη.

Περιγραφή αλγορίθμου κλάδου-φράγματος



Σε κάθε βήμα υπάρχει ένα σύνολο κόμβων που δεν έχουν ερευνηθεί (ενεργοί κόμβοι).
Μπορεί να υπάρχει εφικτή λύση $\underline{x}^0$ τρέχουσα λύση με $z^0 = \underline{c}' \cdot \underline{x}^0$.

Βήματα:

1) Επιλέγουμε έναν ενεργό κόμβο F_i (π.χ. F_4)
2) Για το υποπρόβλημα F_i λύνουμε τη χαλάρωση γ.π. (π.χ. $z_{LP}(F_4)$)
3a) Αν $z_{LP}(F_i) \leq z^0$, τότε κλαδεύεται και παύει να είναι ενεργός (π.χ. $z_{LP}(F_4) \leq z^0$, άρα το κλαδεύουμε F_4)
3b) Αν $z_{LP}(F_i) > z^0$, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:
 (i) Αν η $\underline{x}^*_{LP}(F_i) \in \mathbb{Z}^n$, τότε ο κόμβος έχει εξιχνιαστεί άρα τον κλαδεύουμε και αφού $z_{LP}(F_i) = \underline{c}' \cdot \underline{x}^*_{LP}(F_i) > z^0$, έχουμε μια εφικτή λύση του αρχικού που δίνει καλύτερη τιμή στην α.σ. από την $\underline{x}^0$. Άρα, η $\underline{x}^*_{LP}(F_i) \longrightarrow \underline{x}^0$ και $\underline{c}' \cdot \underline{x}^*_{LP}(F_i) \longrightarrow z^0$.
 (ii) Αν $\underline{x}^*_{LP}(F_i) \notin \mathbb{Z}^n$, επιλέγουμε μια μη ακέραια συνιστώσα, έστω x_1^* και δημιουργούμε δύο νέους ενεργούς κόμβους F_{ia} και F_{ib} με την προσθήκη περιορισμών: $x_1 \leq \lfloor x_1^* \rfloor$ για τον F_{ia}, $x_1 \geq \lfloor x_1^* \rfloor + 1$ για τον F_{ib} και ο F_i παύει να είναι ενεργός.

Παρατηρήσεις:

① Αν σε ένα υποπρόβλημα η χαλάρωση γ.π. έχει κενή εφικτή περιοχή τότε ο κόμβος κλαδεύεται.

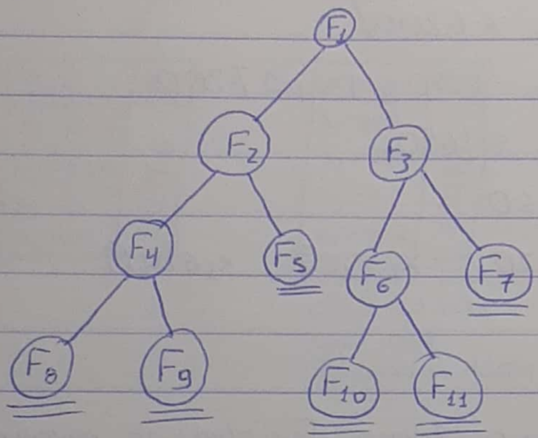
όλα τα υποπροβλ. μη εφικτά
⇓
το πρόβλημα μη εφικτό

② Ο αλγόριθμος σταματά όταν εξαντληθεί η λίστα των ενεργών κόμβων. Αν μέχρι τότε δεν έχει βρεθεί τρέχουσα λύση τότε το πρόβλημα είναι μη εφικτό. Αλλιώς, η τρέχουσα λύση θα είναι η βέλτιστη.

③ Αν σε ένα βήμα υπάρχουν πολλοί ενεργοί κόμβοι τότε μπορώ να επιλέξω τον επόμενο που θα ασχοληθώ με διάφορους τρόπους. Οι πιο συνηθισμένοι είναι:

• <u>Κατά-βάθος-πρώτα</u>: Όταν δημιουργούνται νέοι κόμβοι, εξετάζουμε πρώτα έναν από αυτούς.

π.χ.



$$F_1 \to \overset{\text{ή } F_3}{F_2} \to \overset{\text{ή } F_5}{F_4} \to \overset{\text{ή } F_9}{F_8} \to F_9 \to F_5 \to F_3 \to \overset{\text{ή } F_7}{F_6} \to \overset{\text{ή } F_{11}}{F_{10}} \to F_{11} \to F_7$$

• <u>Κατά-εύρος-πρώτα</u>: Όταν τελειώνει η εξέταση κάποιου κόμβου, συνεχίζουμε με κόμβους ίδιου επιπέδου.

π.χ. $F_1 \to \overset{\text{ή } F_3}{F_2} \to F_3 \to \overset{\text{ή } F_5, F_6, F_7}{F_4} \to F_5 \to F_6 \to F_7 \to F_8 \to F_9 \to F_{10} \to F_{11}$

④ Αν έχουμε πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού, τότε ο αλγόριθμος είναι ίδιος με τη μόνη διαφορά ότι όταν κάνουμε διακλάδωση, οι περιορισμοί που θα προσθέτουμε θα είναι $x_i \leq 0$ και $x_i \geq 1$ (καλύτερα $x_i = 0$ και $x_i = 1$).

⑤ Αν έχουμε πρόβλημα μ.α.π. τότε ο αλγόριθμος είναι πάλι ίδιος με τη διαφορά ότι οι διακλαδώσεις γίνονται για μεταβλητές που παίρνουν ακέραιες τιμές.