19/11/2021 Μάθημα 14

Ενότητα 4: Ακέραιος Προγραμματισμός

4.1. Εισαγωγή

Ένα πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming) (μ.α.π.) σε κανονική μορφή είναι

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \underline{c}'\underline{x} + \underline{h}'\underline{y} \\
\text{υπό}\ & A\underline{x} + G\underline{y} = \underline{b} \\
& x \in \mathbb{Z}_+^n \\
& \underline{y} \in \mathbb{R}_+^p
\end{aligned}
$$

όπου A πίνακας $m \times n$, G πίνακας $m \times p$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^p$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

όπως π.γ.π

- Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης με $n+p$ μεταβλητές απόφασης.
- Έχει m γραμμικές εξισώσεις.
- Έχει περιορισμούς μη αρνητικότητας
- n από τις $n+p$ μεταβλητές απόφασης παίρνουν ακέραιες τιμές

Σημείωση

Ένα πρόβλημα μ.α.π. στη γενική του μορφή μπορεί να είναι max ή min, οι γρ. περιορισμοί μπορεί να είναι τύπου $\geq$, $\leq$ ή $=$, και οι μετ. απόφασης να είναι μη-αρνητικές, μη-θετικές ή να μην περιορίζο-νται.

Μπορούμε να μετατρέψουμε ένα γενικό πρόβλημα μ.α.π. σε πρόβλημα μ.α.π. σε κανονική μορφή

Παράδειγμα

Να μετατραπεί το παρακάτω πρόβλημα σε πρόβλημα μ.α.π. σε κανονική μορφή.

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 2x_2 + y_1 - 3y_2 \\
\text{υπό}\ & 2x_1 + x_2 + 5y_1 + y_2 \leq 3 \\
& x_2 + y_1 - y_2 \geq 5 \\
& x_1 \in \mathbb{Z}_+,\ x_2 \in \mathbb{Z}_-,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Λύση

Θέτω
$x_2' = -x_2$
$x_2' \in \mathbb{Z}_+$
και
$y_2 = y_2' - y_2''$
$y_2', y_2'' \geq 0$

$$\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 - 2x_2' + y_1 - 3y_2' + 3y_2'' \\
\text{υπό}\ & 2x_1 - x_2' + 5y_1 + y_2' - y_2'' \leq 3 \\
& -x_2' + y_1 - y_2' + y_2'' \geq 5 \\
& x_1, x_2' \in \mathbb{Z}_+,\ y_1, y_2', y_2'' \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\max\ & -3x_1 + 2x_2' - y_1 + 3y_2' - 3y_2'' \\
\text{υπό}\ & 2x_1 - x_2' + 5y_1 + y_2' - y_2'' + y_3 = 3 \\
& -x_2' + y_1 - y_2' + y_2'' - y_4 = 5 \\
& x_1, x_2' \in \mathbb{Z}_+,\ y_1, y_2', y_2'', y_3, y_4 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Ειδικές περιπτώσεις

① $n=0$

Αν $n=0$, έχουμε
$$\begin{aligned}
z = \max\ & \underline{h}'\underline{y} \\
\text{υπό}\ & G\underline{y} = \underline{b} \\
& \underline{y} \in \mathbb{R}_+^p
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε π.γ.π.

② $p=0$

Αν $p=0$, έχουμε
$$\begin{aligned}
z = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\
\text{υπό}\ & A\underline{x} = \underline{b} \\
& \underline{x} \in \mathbb{Z}_+^n
\end{aligned}$$

Έχουμε ένα πρόβλημα <u>καθαρού ακέραιου προγραμματισμού</u>.

<u>Σημείωση</u>: Ένα πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού σε γενική μορφή δεν μπορεί πάντα να μετατραπεί σε πρόβλημα

καθαρού ακέραιου προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα: Αν υπάρχει περιορισμός
$\sqrt{3}\,x_1 + 7x_2 \le 5$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$, τότε
$\sqrt{3}\,x_1 + 7x_2 + y_1 = 5$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ αλλά $y_1 \in \mathbb{R}_+$.

Σημείωση: Αν σε ένα πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού σε γενική μορφή ο πίνακας A και το διάνυσμα $\underline{b}$ έχουν για στοιχεία ρητούς αριθμούς, τότε αυτό μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \le 2 \iff$$
$$3x_1 + 8x_2 \le 12 \iff$$
$$3x_1 + 8x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z},\ x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

3) Ένα πρόβλημα της μορφής

$$z = \max\ \underline{c}'\underline{x}$$
$$\text{υπό}\quad A\underline{x} = \underline{b}$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

ονομάζεται πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού (zero-one ή binary programming).

Σημείωση: Αυτό το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση μεικτού ακέραιου προγραμματισμού διότι $x_j \in \{0,1\}$ γράφεται ως $x_j \in \mathbb{Z}_+$ και $x_j \le 1$.

4.2. Εφαρμογές Ακέραιου Προγραμματισμού

Θα εξετάσουμε προβλήματα που χρησιμοποιούν τις δυαδικές μεταβλητές απόφασης για να εκφράσουμε αποφάσεις τύπου ναι ή όχι.

Δηλαδή

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν πάρουμε την απόφαση } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\iff x_j = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{δείκτρια}}}{1}(\text{απόφαση-}j)$$

Έστω σύνολο δυνατών αποφάσεων $1, 2, \ldots, n$ κάθε μία από τις οποίες μπορεί να ληφθεί ή όχι. Ορίζουμε

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ενεργοποιηθεί η } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε προκύπτουν τα παρακάτω:

(1) $\sum_{j=1}^{n} x_j = \#$ αποφάσεων που ενεργοποιούνται

οπότε

"το πολύ k αποφάσεις μπορούν να ενεργοποιηθούν"

$$\iff \sum_{j=1}^{n} x_j \le k$$

"ακριβώς μία απόφαση μπορεί να ενεργοποιηθεί"

$$\iff \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

(2) "η απόφαση i μπορεί να ενεργοποιηθεί μόνο αφού ενεργοποιηθεί η απόφαση j"

$$\iff x_i \le x_j$$

(3) Αν θέλουμε να ορίσουμε μεταβλητή που μας δείχνει ότι οι αποφάσεις i και j επιλέγονται μαζί

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \text{ και } j \text{ λαμβάνονται ταυτόχρονα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\underbrace{x_{ij} = x_i \cdot x_j}_{\text{όχι γραμμικό}}$$

Ισοδύναμα γράφουμε

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \le x_i \\ x_{ij} \le x_j \end{array}\right\} \text{ εξασφαλίζουν ότι αν } x_i \text{ ή } x_j = 0, \text{ τότε } x_{ij} = 0$$

$$x_{ij} \ge x_i + x_j - 1 \Big\} \text{ εξασφαλίζει ότι αν } x_i = x_j = 1, \text{ τότε } x_{ij} = 1$$

$$x_i, x_j, x_{ij} \in \{0, 1\}$$

4.2.1. Πρόβλημα τοποθέτησης σταθμών παραγωγής ή εξυπηρέτησης

- Υπάρχουν n δυνατές τοποθεσίες στις οποίες μπορούν να αναπτυχθούν σταθμοί εξυπηρέτησης μίας εταιρείας.
- Υπάρχουν m πελάτες που πρέπει να εξυπηρετηθούν.
- Υπάρχει κόστος c_j αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία j, $j=1,\dots,n$.
- Υπάρχει κόστος h_{ij} αν ο πελάτης i σταλεί στο σταθμό της τοποθεσίας j για να εξυπηρετηθεί.
- Κάθε πελάτης πρέπει να εξυπηρετηθεί από έναν σταθμό.

Η εταιρεία θέλει να βρει σε ποιες τοποθεσίες θα ανοίξει σταθμούς και πώς θα γίνει η κατανομή πελατών στους σταθμούς ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιηθεί.

Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση

Μεταβλητές απόφασης:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία } j, \ j=1,\dots,n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πελάτης } i \text{ εξυπηρετηθεί από τον σταθμό } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n.$$

$\longrightarrow$

$$z = \min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{\text{κόστος ενεργοποίησης}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} y_{ij}}_{\text{κόστος εξυπηρέτησης}}$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, m$ ← ο πελάτης i θα εξυπηρετηθεί από ακριβώς έναν σταθμό

$y_{ij} \leq x_j$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$ ← για να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης από έναν σταθμό θα πρέπει **αυτός** να έχει ανοίξει

$x_j, y_{ij} \in \{0,1\}$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$

4.2.2. Πρόβλημα τοποθέτησης-παραγωγής

- Υπάρχουν n τοποθεσίες στις οποίες μπορούν να αναπτυχθούν σταθμοί παραγωγής μιας εταιρείας.
- Η εταιρεία παράγει ένα προϊόν από το οποίο χρειάζεται ποσότητα d σε ετήσια βάση.
- Αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία j, υπάρχει ετήσιο κόστος συντήρησης K_j, $j=1,\dots,n$.
- Η δυναμικότητα του σταθμού j είναι M_j μονάδες και το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι h_j, $j=1,\dots,n$.

Η εταιρεία θέλει να βρει σε ποιες τοποθεσίες θα ανοίξαν σταθμοί και να προσδιορίσει τις ποσότητες παραγωγής ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος.

Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα.

<u>Λύση</u> Μετ. απόφασης:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ανοίξει σταθμός στην } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

y_j = ποσότητα παραγωγής στην τοποθεσία j, $j = 1, \dots, n$.

$$Z = \min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} K_j x_j}_{\text{κόστος συντήρησης}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} h_j y_j}_{\text{κόστος παραγωγής}}$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} y_j = d$ ← η εταιρεία χρειάζεται ποσότητα d

$y_j \leq H_j x_j$, $j=1,\dots,n$ — αν $x_j=1$, $y_j \leq H_j$; αν $x_j=0$, $y_j=0$

$x_j \in \{0,1\}$, $j=1,\dots,n$

$y_j \in \mathbb{Z}_+$, $j=1,2,\dots,n$

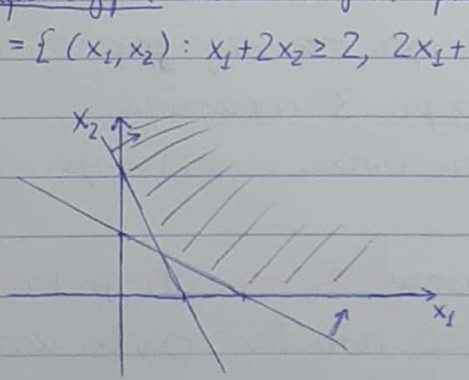
22/11/2021 Μάθημα 15

~~4.2.3. Προβληματα~~

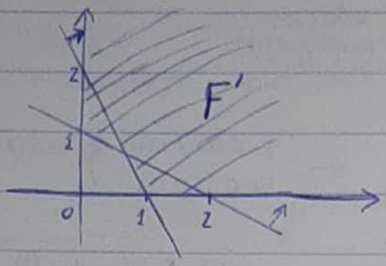
4.2.3. Προβλήματα με διαζευκτικούς περιορισμούς

Μέχρι τώρα έχουμε δει προβλήματα όπου όλοι οι περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται (συζευκτικοί περιορισμοί).
Υπάρχουν προβλήματα με διαζευκτικούς περιορισμούς όπου πρέπει να ικανοποιείται τουλάχιστον ένας (ή τουλ. κάποιοι) από τους περιορισμούς και όχι υποχρεωτικά όλοι.

Παράδειγμα Έστω π.γ.π. με εφικτή περιοχή
$F = \{(x_1,x_2): x_1+2x_2 \geq 2,\ 2x_1+x_2 \geq 2,\ x_1,x_2 \geq 0\}$



Αν $F' = \{(x_1,x_2) : x_1+2x_2 \geq 2$ ή $2x_1+x_2 \geq 2,\ x_1,x_2 \geq 0\}$



$F' \supseteq F$ και η F' δεν είναι κυρτό σύνολο.
Άρα το πρόβλημα με διαζευκτικούς περιορισμούς δεν μπορεί να εκφραστεί σαν π.γ.π.
Εισάγοντας μία δυαδική μεταβλητή μπορώ να το γράψω σαν πρόβλημα μ.α.π.
Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορώ να το γράψω ως:

$$x_1+2x_2 \geq 2y \quad (1)$$
$$2x_1+x_2 \geq 2(1-y) \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$y \in \{0,1\}$$

και να απαιτήσω να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.
Πράγματι, αν $y=1$, ο (1) γίνεται $x_1+2x_2 \geq 2$ άρα πρέπει να ικανοποιείται
ο (2) γίνεται $2x_1+x_2 \geq 0$ ικανοποιείται πάντα
ενώ, αν $y=0$, ο (1) γίνεται $x_1+2x_2 \geq 0$ ικανοποιείται πάντα
ο (2) γίνεται $2x_1+x_2 \geq 2$ άρα πρέπει να ικανοποιείται.

Το τέχνασμα που λειτούργησε στο συγκεκριμένο παράδειγμα
(i) δε γενικεύεται αν έχουμε 3 περιορισμούς
(ii) δε θα λειτουργούσε αν κάποιος συντελεστής ήταν αρνητικός, π.χ. αν $2x_1-x_2 \geq 2$
γιατί τότε θα γινόταν $2x_1-x_2 \geq 2(1-y)$ και για $y=1$
θα είχαμε $2x_1-x_2 \geq 0$ που δεν ισχύει πάντα.
(iii) δε θα λειτουργούσε αν $2x_1+x_2 \leq 2$.

Γενίκευση

Έστω π.γ.π. με περιορισμούς

$$\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j \quad , j = 1, 2, \ldots, n$$

και απαιτούμε να ικανοποιούνται τουλάχιστον k από τους n περιορισμούς, $k \le n$.

Θα εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές $y_j \in \{0,1\}$ (μία για κάθε περιορισμό) και θέλουμε αν $y_j = 1$, να παίρνουμε τον αρχικό περιορισμό και αν $y_j = 0$, να παίρνουμε κάτι που ισχύει πάντα.

$$\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j + M(1 - y_j) \quad \text{όπου}$$

M αυθαίρετα μεγάλη θετική σταθερά.

Πράγματι, αν $y_j = 1$, έχω τον αρχικό περιορισμό

αν $y_j = 0$, έχω $\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j + M$ που ισχύει πάντα διότι M πολύ μεγάλο.

Για να ικανοποιούνται τουλάχιστον k από τους n περιορισμούς πρέπει $\sum_{j=1}^{n} y_j \ge k$.

Τελικά, γράφουμε

$$\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j + M(1 - y_j) \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \ge k$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}_+^m \ , \ y_j \in \{0,1\} \ , \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

4.2.4 Προβλήματα με μεταβλητές με πεπερασμένες τιμές

Έστω ότι σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μία μεταβλητή απόφασης x παίρνει τιμές σε ένα πεπερασμένο σύνολο

$$x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

Παράδειγμα Αν $x_j \in \{2, 3, 4, 5\}$

$$x_j \ge 2$$

$$x_j \le 5$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+$$

Αλλά αυτό δεν γενικεύεται.

Γενικά, αν $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν παίρνει την τιμή } a_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = 1(x = a_j),\ j = 1, \dots, k$$

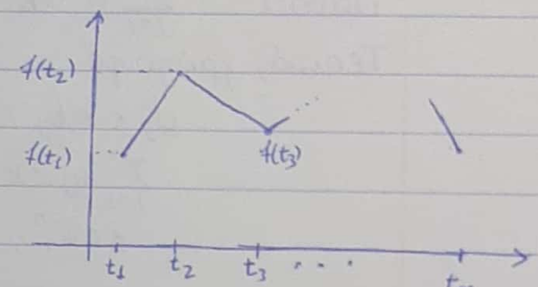
$$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = 1$$

$$y_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \dots, k$$

4.2.5 Γενική τμηματικά γραμμική αντικειμενική συνάρτηση

Έχουμε δει ότι προβλήματα ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης ή μεγιστοποίησης μίας τμηματικά γραμμικής κοίλης συνάρτησης μπορούν να εκφραστούν σαν π.γ.π. Αν έχουμε, όμως, γενική τμηματικά γραμμική συνάρτηση μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησής της σαν πρόβλημα μ.α.π.



Θεωρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται σε ένα διάστημα $[t_1, t_m]$ και είναι τμηματικά γραμμική. Υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq \dots \leq t_m$ τέτοια ώστε η f να είναι γραμμική σε κάθε $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$ και συνεχής στο $[t_1, t_m]$.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$z = \min f(x)$$
$$\text{υπό } x \in [t_1, t_m].$$

Σκεφτόμαστε:

- Αν $x \in [t_i, t_{i+1}]$, τότε μπορεί να γραφτεί με ένα μοναδικό τρόπο ως κυρτός συνδυασμός των άκρων t_i και t_{i+1}. Δηλαδή υπάρχουν <u>μοναδικά</u> (d_i, d_{i+1}) έτσι ώστε

$$x = d_i t_i + d_{i+1} t_{i+1}$$
$$d_i + d_{i+1} = 1$$
$$d_i, d_{i+1} \geq 0 \qquad \text{και} \quad f(x) = d_i f(t_i) + d_{i+1} f(t_{i+1}).$$

Ισοδύναμα, γράφουμε

$$x = d_1 t_1 + d_2 t_2 + \dots + d_m t_m$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = 1$$

$$d_1, d_2, \dots, d_m \geq 0$$

$$f(x) = d_1 f(t_1) + d_2 f(t_2) + \dots + d_m f(t_m)$$

με τον επιπλέον περιορισμό ότι αν $x \in [t_i, t_{i+1}]$ μόνο τα d_i και d_{i+1} να επιτρέπεται να είναι θετικοί και τα υπόλοιπα 0.

- Για να εκφράσουμε τον τελευταίο περιορισμό, εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές (μία για κάθε διάστημα)

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m-2$$

$$y_{m-1} = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \in [t_{m-1}, t_m] \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

και απαιτούμε $y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} = 1$ έτσι ώστε το x να ανήκει σε ένα διάστημα.

Για να έχω τον περιορισμό "αν $x \in [t_i, t_{i+1})$, μόνο τα d_i και d_{i+1} θα είναι θετικά", γράφουμε

$$\cancel{d_i \leq y_i, \quad i = 1, \dots, m-1}$$

$$\cancel{d_{i+1} \leq y_i, \quad i = 1, \dots, m-1}$$

$$d_1 \leq y_1$$

$$d_i \leq y_{i-1} + y_i, \quad i = 2, \dots, m-1 \quad \rightarrow \text{ αν } x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$$

$$d_m \leq y_{m-1}$$

Τελικά έχουμε

$$\min \sum_{i=1}^{m} d_i f(t_i)$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_i = 1 \quad \leftarrow \text{ το } x \text{ ανήκει σε ακριβώς ένα διάστημα}$$

$$\left.\begin{aligned} & d_1 \leq y_1 \\ & d_i \leq y_{i-1} + y_i, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ & d_m \leq y_{m-1} \end{aligned}\right\} \text{ αν } x \in [t_i, t_{i+1}) \text{ τότε μόνο } d_i \text{ και } d_{i+1} \text{ μπορεί να είναι θετικά}$$

$$d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad \leftarrow \text{ δυαδικές μεταβλητές που δείχνουν σε ποιο διάστημα ανήκει το } x$$

το x γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των d_i

$x = d_1 t_1 + d_2 t_2 + \dots + d_m t_m$

↑

δεν εμφανίζεται στο πρόβλημα