01/11/2021 Μάθημα 10

Ενότητα 3: ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.1. Εισαγωγή

Για κάθε π.γ.π. μπορεί να ορισθεί το δυϊκό του.
Για να ορισθεί το δυϊκό θα δούμε την ημικανονική μορφή.

Ορισμός
Ένα π.γ.π. είναι σε ημικανονική μορφή (ΗΚ) αν εκφράζεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{c}'x \\ \text{υπό}\ & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} \min\ & \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υπό}\ & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

όπου $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, A πίνακας $m \times n$ και $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.
Συγκεκριμένα, την πρώτη μορφή την ονομάζουμε ημικανονική μορφή μεγιστοποίησης (HK-max), ενώ τη δεύτερη την ονομάζουμε ημικανονική μορφή ελαχιστοποίησης (HK-min).

Σημείωση:
- Σε προβλήματα μεγιστοποίησης η προβλεπόμενη φορά των γρ. περιορισμών είναι $\leq$, ενώ σε προβλήματα ελαχιστοποίησης είναι $\geq$. Άρα, μπορούμε να πούμε ότι ένα π.γ.π. είναι σε ημικανονική μορφή όταν οι γρ. περιορισμοί έχουν την προβλεπόμενη φορά και οι μεταβλητές απόφασης είναι μη-αρνητικές.
- Για να προσδιορίσω ένα π.γ.π. σε ημικανονική μορφή χρειάζομαι την τετράδα

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υπό}\ & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

$$P = HK(p, A, \underline{b}, \underline{c})$$

$$\begin{aligned} \min\ & \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υπό}\ & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

όπου $p = \begin{cases} 0, & \text{έχω min} \\ 1, & \text{έχω max} \end{cases}$, A: πίνακας των συντελ. στους γρ. περιορισμούς,
$\underline{b}$: το διάνυσμα των σταθερών όρων στους περιορισμούς,
$\underline{c}$: το διάνυσμα των συντελεστών στην α.σ..

$\max \underline{c}'\underline{x}$
υπό $A\underline{x}=\underline{b}$
$\underline{x}\geq 0$

▪ Αντίστοιχα, ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή περιγράφεται ως $P=KM(A,\underline{b},\underline{c})$

<u>Παράδειγμα</u>

Να φέρετε σε HK-max μορφή το

$$\left.\begin{aligned} &\min\ 2x_1+5x_2\\ &\text{υπό}\ 3x_1+7x_2=6\\ &\qquad x_1-5x_2\geq 3\\ &\qquad x_1\leq 0,\ x_2\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\} \underset{\substack{x_2=x_2'-x_2''\\ x_2',x_2''\geq 0}}{\overset{\substack{x_1=-x_1'\\ x_1'\geq 0}}{\Longleftrightarrow}} \begin{aligned} &\min\ -2x_1'+5x_2'-5x_2''\\ &\text{υπό}\ -3x_1'+7x_2'-7x_2''=6\\ &\qquad -x_1'-5x_2'+5x_2''\geq 3\\ &\qquad x_1',x_2',x_2''\geq 0\end{aligned} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} &-\max\ +2x_1'-5x_2'+5x_2''\\ &\text{υπό}\ -3x_1'+7x_2'-7x_2''\leq 6\\ &\qquad +3x_1'-7x_2'+7x_2''\leq -6\\ &\qquad x_1'+5x_2'-5x_2''\leq -3\\ &\qquad x_1',x_2',x_2''\geq 0\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 7 & -7\\ 3 & -7 & +7\\ 1 & 5 & -5\end{bmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix}$$

$P=HK(1,A,\underline{b},\underline{c})$.

3.2. <u>Ορισμός δυϊκού προβλήματος</u>

Θεωρούμε ένα π.γ.π. σε HK-max $P=HK(1,A,\underline{b},\underline{c})$

$$\begin{aligned} z_p=&\max\ \underline{c}'\underline{x}\\ &\text{υπό}\ A\underline{x}\leq\underline{b} \qquad (1)\\ &\qquad \underline{x}\geq\underline{0}\end{aligned}$$

$$\left(A\underline{x}\leq\underline{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\underline{a}_1'\\ \underline{a}_2'\\ \vdots\\ \underline{a}_m'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underline{a}_i'\underline{x}\leq b_i,\ i=1,\dots,m\right)$$

Θέλω να βρω ένα "καλό" άνω φράγμα για την z_p.

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$L(\underline{x},\underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}'\cdot(\underline{b}-A\underline{x}) =$$

$$= \underline{c}'\underline{x} + (w_1, w_2, \ldots, w_m)\begin{pmatrix} b_1 - \underline{a}_1'\underline{x} \\ b_2 - \underline{a}_2'\underline{x} \\ \vdots \\ b_m - \underline{a}_m'\underline{x} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{c}'\underline{x} + \sum_{i=1}^{m} w_i(b_i - \underline{a}_i'\underline{x}) =$$

$$= \underline{c}'\underline{x} - \sum_{i=1}^{m} w_i(\underline{a}_i'\underline{x} - b_i).$$

Τα $w_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$.

Αυτή ονομάζεται <u>Λαγκρανζιανή</u> συνάρτηση.

- Αν $\underline{a}_i'\underline{x} - b_i > 0 \Longrightarrow \underline{a}_i'\underline{x} > b_i$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, τότε το $\underline{x}$ δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή του (1).
- Αν $\underline{x}$ ανήκει στην εφικτή περιοχή του (1), τότε $L(\underline{x},\underline{w}) \geq \underline{c}'\underline{x}$, $\forall \underline{w} \geq \underline{0}$.

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση προκύπτει αν από την α.σ. του αρχικού π.γ.π. αφαιρέσαμε τους όρους $w_i(\underline{a}_i'\underline{x} - b_i)$ που είναι οι ποινές αν παραβιαστούν οι περιορισμοί $\underline{a}_i'\underline{x} \leq b_i$.
Οι ποσότητες $w_i \geq 0$ ονομάζονται <u>πολλαπλασιαστές Lagrange</u> και είναι οι ποινές ανά μονάδα παραβίασης του i-οστού περιορισμού του π.γ.π. (1).

Ορίζουμε ένα νέο πρόβλημα

$$z_L(\underline{w}) = \max L(\underline{x},\underline{w}) \quad (2)$$
$$\text{υπό} \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

<u>Λήμμα</u>: $z_L(\underline{w}) \geq z_p$, $\forall \underline{w} \geq \underline{0}$.

<u>Απόδειξη</u>: $z_L(\underline{w}) = \max\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x} \geq \underline{0}\} \geq$

$\geq \max\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq \underline{0},\ A\underline{x}\leq \underline{b}\}$

επειδή η εφικτή περιοχή του $2^{ου}$ είναι υποσύνολο της εφικτής περιοχής του $1^{ου}$.

Αν $A\underline{x}\leq \underline{b}$ και $\underline{w}\geq \underline{0}$, τότε

$$L(\underline{x},\underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} + \underbrace{\underline{w}'(\underline{b}-A\underline{x})}_{\geq 0} \geq \underline{c}'\underline{x}.$$

τότε $\max\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq \underline{b}\} \geq \max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\geq \underline{0},\ A\underline{x}\leq \underline{b}\} = z_p$.

Άρα, $z_L(\underline{w})\geq z_p,\ \forall \underline{w}\geq \underline{0}$.

Από την παραπάνω απόδειξη φαίνεται ότι η βέλτιστη τιμή του (2) είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη βέλτιστη τιμή του (1), διότι:

- Το (2) έχει ~~[illegible]~~ εφικτή περιοχή που είναι υπερσύνολο της εφ. περιοχής του (1).
- Για τα $\underline{x}$ που ανήκουν στην εφικτή περιοχή του (1) η $L(\underline{x},\underline{w})\geq \underline{c}'\underline{x}$.

Έτσι, το (2) ονομάζεται <u>πρόβλημα Λαγκρανζιανής χαλάρωσης</u> του (1).

Για κάθε $\underline{w}$ το $z_L(\underline{w})$ αποτελεί άνω φράγμα για το z_p, άρα και το $\inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w}\geq \underline{0}\}$ είναι άνω φράγμα για το z_p.

<u>Ορισμός</u> Το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$z_D = \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w}\geq \underline{0},\ \underline{w}\in \mathbb{R}^n\} \qquad (3)$$

ονομάζεται <u>δυϊκό πρόβλημα</u> (dual problem) του (1).

<u>Θεώρημα</u> (Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα)

$$z_p \leq z_D$$

<u>Γράφεται το (3) σε πιο απλή μορφή:</u>

$$z_L(\underline{w}) = \max_{\underline{x}\geq \underline{0}} L(\underline{x},\underline{w}) = \max_{\underline{x}\geq \underline{0}} \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}'(\underline{b}-A\underline{x}) =$$

$$= \max_{\underline{x}\geq \underline{0}} \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}'\underline{b} - \underline{w}'A\underline{x} = \underline{w}'\underline{b} + \max_{\underline{x}\geq \underline{0}} (\underline{c}'-\underline{w}'A)\underline{x}$$

$$\underline{w}'A = \underline{w}'(A_1\ A_2 \dots A_n) = (\underline{w}'A_1\ \ w'A_2 \dots w'A_n)$$

όπου $(\underline{c}' - \underline{w}'A)\,\underline{x} = (c_1 - \underline{w}'A_1,\ c_2 - \underline{w}'A_2, \dots, c_n - \underline{w}'A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(c_j - \underline{w}'A_j)x_j.$

Άρα $z_L(w) = \underline{w}'\underline{b} + \underbrace{\max_{x \geq 0} \sum_{j=1}^{n}(c_j - \underline{w}'A_j)x_j}_{f_L(\underline{w})}$

με $f_L(\underline{w}) = \max \sum_{j=1}^{n}(c_j - \underline{w}'A_j)x_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } c_j - \underline{w}'A_j \leq 0\ \ \forall j \in \{1, \dots, m\} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$.
υπό $\underline{x} \geq \underline{0}$

Οπότε $z_L(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{w}'\underline{b}, & \text{αν } c' - \underline{w}'A \leq \underline{0} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

03/11/2021 Μάθημα 11

$z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$
υπό $A\underline{x} \leq \underline{b}$ (1) (P)
$\underline{x} \geq \underline{0}$

$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}'(\underline{b} - A\underline{x})$

$z_L(\underline{w}) = \max L(\underline{x}, \underline{w})$ (2)
υπό $\underline{x} \geq \underline{0}$

$\forall \underline{w} \geq \underline{0}$, $z_L(\underline{w}) \geq z_P$

$z_D = \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w} \geq 0,\ \underline{w} \in \mathbb{R}^m\}$ (D) (3)

$z_L(\underline{w}) = \underline{w}'\underline{b} + f_L(\underline{w})$

$f_L(\underline{w}) = \begin{cases} 0, & \underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Άρα, $z_L(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{w}'\underline{b}, & \text{αν } \underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Εφόσον το (D) είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μπορώ να περιοριστώ στα $\underline{w}$: $\underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0}$.

Άρα, $z_D = \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w} \geq \underline{0},\ \underline{w} \in \mathbb{R}^m\} =$

$= \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w} \geq \underline{0},\ \underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0}\} =$

$= \inf\{\underline{w}'\underline{b} : \underline{w} \geq \underline{0},\ \underline{c}' - \underline{w}'\underline{A} \leq \underline{0}\}$.

Άρα, $z_D = \min \underline{w}'\underline{b}$ $\qquad$ $\underline{w}'\underline{b} \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{w}'\underline{b} = (\underline{w}'\underline{b})' = \underline{b}'\underline{w}$

υπό $\underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0}$

$\underline{w} \geq \underline{0}$

$$
\begin{aligned}
z_D = \min\ & \underline{b}'\underline{w} \\
\text{υπό}\ & A'\underline{w} \geq \underline{c} \qquad (D) \\
& \underline{w} \geq \underline{0}
\end{aligned}
$$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω το π.γ.π. $z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$

υπό $A\underline{x} \leq \underline{b}$ $\quad$ (P)

$\underline{x} \geq \underline{0}$

και το δυϊκό του $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$

υπό $A'\underline{w} \geq \underline{c}$ $\quad$ (D)

$\underline{w} \geq \underline{0}$

τότε το δυϊκό του (D) είναι το (P).

Άρα, μπορούμε να μιλάμε για ζεύγη π.γ.π. που το ένα είναι δυϊκό του άλλου.

<u>Απόδειξη</u>:

Για να βρω το δυϊκό του (D) πρέπει να το μετατρέψω σε ΗΚ-max μορφή.

$$
\begin{aligned}
z_D = \min\ & \underline{b}'\underline{w} \\
\text{υπό}\ & A'\underline{w} \geq \underline{c} \\
& \underline{w} \geq \underline{0}
\end{aligned}
\iff
\begin{aligned}
z_D = -\max\ & (-\underline{b})'\underline{w} \\
\text{υπό}\ & (-A)'\underline{w} \leq -\underline{c} \\
& \underline{w} \geq \underline{0}
\end{aligned}
$$

το δυϊκό του (D) είναι:

$$-\min(-\underline{c})'\underline{x} \qquad\qquad \max \underline{c}'\underline{x}$$

$$\text{υπό } (-A')'\underline{x} \geq (-\underline{b}')' \iff \text{υπό } A\underline{x} \leq \underline{b} \text{ είναι πράγματι το (P).}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{x} \geq \underline{0}$$

$Z_P \leq Z_D$

Υπενθύμιση

Προβλεπόμενη φορά στους γραμμικούς περιορισμούς:

max $\longrightarrow$ $\leq$

min $\longrightarrow$ $\geq$

προβλεπόμενη φορά στους περιορισμούς μη αρνητ.

$x_j \geq 0$

$w_i \geq 0$

Απευθείας εύρεση δυϊκού

P		D
# μετ. απόφασης	$\longrightarrow$	# γρ. περιορισμών
# γρ. περιορισμών	$\longrightarrow$	# μετ. απόφασης
max	$\longrightarrow$	min
min	$\longrightarrow$	max
i-οστός γρ. περιορισμός με προβλεπόμενη φορά	$\longrightarrow$	i-οστή μετ. απόφασης ≥ 0
i-οστός γρ. περιορισμός με φορά αντίθ. της προβλεπόμενης	$\longrightarrow$	i-οστή μετ. απόφασης ≤ 0
i-οστός γρ. περιορισμός =	$\longrightarrow$	i-οστή μετ. απόφασης $\in \mathbb{R}$
j-οστή μετ. απόφασης ≥ 0	$\longrightarrow$	j-οστός γρ. περιορισμός με προβλ. φορά
j-οστή μετ. απόφασης ≤ 0	$\longrightarrow$	j-οστός γρ. περιορισμός με φορά αντίθ. της προβλεπ.
j-οστή μετ. απόφασης $\in \mathbb{R}$	$\longrightarrow$	j-οστός γρ. περιορισμός =

Παράδειγμα

$$\boxed{\min}\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3$$

υπό $x_1 + x_2 - x_3 \le 8$ — 3 μετ. απόφ.

$2x_1 - 7x_2 + x_3 \ge 9 \quad (P)$ — 4 γρ. περιορ.

$3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 6$

$x_1 \qquad - x_3 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$

(D) 4 μετ. απόφ. w_1, w_2, w_3, w_4

3 γρ. περιορισμούς

$$\max\ 8w_1 + 9w_2 + 6w_3 + 3w_4$$

υπό $1w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 1w_4 \le 5$

$1w_1 - 7w_2 + 2w_3 \ge 3$

$-1w_1 + 1w_2 - 7w_3 - 1w_4 = -7$

$w_1 \le 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \in \mathbb{R},\ w_4 \le 0$

3.3. Το Ισχυρό Θεώρημα Δυϊκότητας

$z_p = \max \underline{c}'\underline{x}$
(P) υπό $A\underline{x} \le \underline{b}$, $\underline{x} \ge 0$

$z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$
(D) υπό $A'\underline{w} \ge \underline{c}$, $\underline{w} \ge \underline{0}$

Λήμμα: Αν $\underline{x}$ και $\underline{w}$ εφικτές λύσεις των (P) και (D), αντίστοιχα ($\underline{x} \in F_P, \underline{w} \in F_D$), τότε

$$\underline{c}'\underline{x} \le z_p \le z_D \le \underline{b}'\underline{w}$$

Λήμμα: Αν $\underline{x}^* \in F_P$, $\underline{w}^* \in F_D$ και $\underline{c}'\underline{x}^* = \underline{b}'\underline{w}^*$, τότε η $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του (P) και η $\underline{w}^*$ είναι βέλτιστη λύση του (D).

Απόδειξη:

$\underline{w}^* \in F_D \Rightarrow \underline{c}'\underline{x} \le \underline{b}'\underline{w}^*,\ \forall \underline{x} \in F_P$

$\xrightarrow{\underline{b}'\underline{w}^* = \underline{c}'\underline{x}^*} \underline{c}'\underline{x} \le \underline{c}'\underline{x}^*,\ \forall \underline{x} \in F_P$

$\Rightarrow \underline{x}^*$ βέλτιστη λύση του (P)

$\longrightarrow$

$\underline{x}^* \in F_P \Rightarrow \underline{c}'\underline{x}^* \leq \underline{b}'\underline{w} \quad , \forall \underline{w} \in F_D$

$\Rightarrow \underline{b}'\underline{w}^* \leq \underline{b}'\underline{w} \quad , \forall \underline{w} \in F_D$

$\Rightarrow \underline{w}^*$ βέλτιστη λύση του (D) ▪

Θεώρημα (Ισχυρό Θεώρημα Δυϊκότητας)
Αν ένα π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση, τότε και το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων στις βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται.

Απόδειξη:
Έστω ότι το πρωτεύον έχει βέλτιστη λύση $\underline{x}$ και B ο αντίστοιχος βασικός πίνακας. Θα ισχύει $x_B = B^{-1}\underline{b}$ και από το κριτήριο βελτιστότητας $\bar{c}_j \leq 0 \ , \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με
$\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j$.
Τα παραπάνω ισχύουν αν έχουμε το (P) σε κανονική μορφή

$$z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$\text{υπό } A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Το δυϊκό του θα είναι $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$

$$\text{υπό } A'\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{w} \in \mathbb{R}^m$$

Έστω $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$, τότε

$$c_j - \underline{w}'A_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j = \bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

και, άρα, $\underline{c}' - \underline{w}'A \leq \underline{0} \Rightarrow -\underline{w}'A \leq -\underline{c}' \Rightarrow \underline{w}'A \leq \underline{c}' \Rightarrow A'\underline{w} \geq \underline{c}$
$\Rightarrow \underline{w} \in F_D$.
Επίσης, έχουμε

$$\underline{b}'\underline{w} = \underline{w}'\underline{b} = \underline{c}_B' \underbrace{B^{-1}\underline{b}}_{x_B} = \underline{c}_B' \underline{x}_B = \underline{c}'\underline{x}.$$

$\underline{b}'\underline{w} \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\underline{b}'\underline{w} = (\underline{b}'\underline{w})' = \underline{w}'\underline{b}$

Άρα, $\underline{w}$ βέλτιστη λύση του (D). ▪

Scanned with CamScanner

Πόρισμα

Αν ένα από τα (P) και (D) είναι μη-φραγμένο, τότε το άλλο είναι μη-εφικτό.

Απόδειξη

Έστω το (P) που είναι σε ΗΚ-max μορφή είναι μη-φραγμένο, δηλαδή $z_P = \infty$. Έστω ότι το (D) έχει εφικτή λύση $\underline{w}$, τότε

$z_P \le z_D \le \underbrace{\underline{b}'\underline{w}}_{\text{πεπερασμένο}}$, άτοπο.

Άρα, το (D) μη-εφικτό. ∎

Σημείωση

Αν ένα π.γ.π. είναι μη-εφικτό, τότε το δυϊκό του μπορεί να είναι μη-εφικτό ή μη-φραγμένο.

P \ D	μη-εφικτό	βέλτιστη	μη-φραγμένο
μη-εφικτό	✓	×	✓
βελτ. λύση	×	✓	×
μη-φραγμένο	✓	×	×