Αρμονική Ανάλυση (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 29 Απριλίου 2022)

1. (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.
(β) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

3. Εκφράστε τη συνάρτηση $\cos x$ σαν σειρά ημιτόνων στο διάστημα $(0, \pi)$. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας υπολογίστε το

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

5. Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $0 < \alpha \leqslant 1$ και $M > 0$ ώστε

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos^4(k_n x + t_n)\,dx.$$

7. Έστω $E \subsetneq [0, 2\pi]$ με $\lambda(E) > 0$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \cos nx + b_n \sin nx \longrightarrow 0$ για κάθε $x \in E$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(β) Αν η πραγματική τριγωνομετρική σειρά $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in E$ τότε η σειρά $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ συγκλίνει και η τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε αρχικά ότι υπάρχουν $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx - \vartheta_n)$, όπου $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.]

8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos kt\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

(β) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$ και

$$f(t) = \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi \sin(t/2)}, \qquad 0 < t \leqslant \pi.$$

Αποδείξτε ότι

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} f(t) \sin[(n + 1/2)t]\, dt + \frac{\pi^2}{3}$$

και συμπεράνατε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9. Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n} \left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + \theta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \theta\right) \right] \sin n\theta\, d\theta.$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0, 2\pi)$ τότε $b_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. (α) Έστω $p(t) = \sum_{s=-n}^{n} a_s e^{-ist}$ και $q(t) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{-ikt}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αποδείξτε ότι

$$\|p\|_2^2 = \sum_{s=-n}^{n} |a_s|^2 \qquad \text{και} \qquad \|q\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |b_k|^2$$

και ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)q(t)f(t)e^{-it} dt = \sum_{s,k=-n}^{n} a_s b_k \widehat{f}(s + k + 1).$$

(β) Αν $f_0(t) = t - \pi$ στο $[0, 2\pi)$, αποδείξτε ότι $\widehat{f_0}(0) = 0$ και $\widehat{f_0}(n) = \frac{i}{n}$ για κάθε $n \neq 0$.

(γ) Αν για τα πολυώνυμα p και q του (α) ισχύει ότι $a_s = b_k = 0$ για κάθε $-n \leqslant s, k < 0$, χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα του (α) για τη συνάρτηση f_0 του (β) αποδείξτε ότι

$$\left| \sum_{s,k=0}^{n} \frac{a_s b_k}{s + k + 1} \right| \leqslant \pi \left(\sum_{s=0}^{n} |a_s|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 \right)^{1/2}.$$