Διάλεξη 21

Οι Εξισώσεις των Hamilton

H Δράση (Action) ορίζεται ως το συναρτησιακό

1) $$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, y')\,dt \qquad , y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$$

L = Lagrangian (Λαγκρατζιαν).

2) $$L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0 \qquad \text{(Euler-Lagrange)}$$

$$p := L_{y'}(t, y, y') \xrightarrow{L_{y'y'} \neq 0} y' = \phi(t, y, p) \qquad (3)$$

H Hamiltonian (Χαμιλτονιαν) ορίζεται

(4) $$H(t, y, p) = -L(t, y, \phi(t,y,p)) + \phi(t, y, p)\,p$$

$$\left(= -L + y' L_{y'} \right).$$

$(4) \Rightarrow$

(5)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p} = -\cancel{\dfrac{\partial L}{\partial y'} \dfrac{\partial \phi}{\partial p}} + \phi + \cancel{p \dfrac{\partial \phi}{\partial p}} = \phi = y' \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial L}{\partial y'} \dfrac{\partial \phi}{\partial p} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} p = -\dfrac{\partial L}{\partial y} = -\dfrac{d}{dt} L_{y'} \\ \qquad = -p' \end{cases}$$

(~~Α~~ Ακριβείς Εξισώσεις)

(14) $p_i = L_{y_i'}(y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3')$, $i=1,2,3$

<u>Υπόθεση</u> $\det\left(L_{y_i' y_j'}\right) \neq 0$

$\Rightarrow$ λύνουμε (τοπικά) τις y_i' ως προς y_i (Θ.Π.Σ.)

$\therefore$

(15) $y_i' = \phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ $i=1, \dots, n$

$$H(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) = -L + \sum_{i=1}^{n} y_i' L_{y_i'}$$

$$= -L(y_1, \dots, y_n, \phi_1, \dots, \phi_n) + \sum \phi_i L_{y_i'}$$

$$= -L(y_1, \dots, y_n, \phi_1, \dots, \phi_n) + \sum \phi_i(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)\, p_i$$

(16)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = -\cancel{\dfrac{\partial L}{\partial y_i'} \dfrac{\partial \phi}{\partial p_i}} + \cancel{\dfrac{\partial \phi_i}{\partial p_i} p_i} + \phi_i = \phi_i = y_i' \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial y_i} - \cancel{\dfrac{\partial L}{\partial y_i'} \dfrac{\partial \phi}{\partial p_i}} + \cancel{\dfrac{\partial \phi_i}{\partial p_i} p_i} = -\dfrac{d}{dt} L_{y_i'} \end{cases}$$

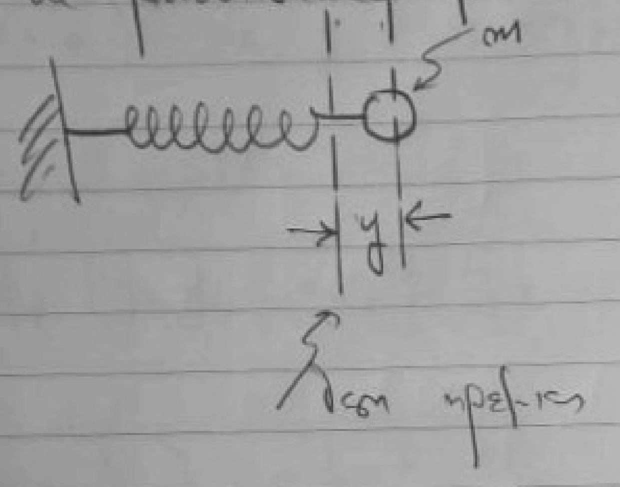
$$= -p_i'$$

$\square$

Η Περίπτωση Μέσων περισσοτέρων διαστάσεων ή Παχέων σωμάτων, ή και τα δύο

Η Lagrangian $L(y,y')$, $y:[t_0,t_1] \to R$ είναι κατάλληλη για μία (σημειακή) μάζα που κινείται σε ένα μονοδιάστατο μέσο.

Π.Χ.



Μια σημειακή μάζα στο επίπεδο ή στο χώρο περιγράφεται από

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$$

ή

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$$

Περισσότερες δε από $\vec{y}^1, \vec{y}^2, \dots, \vec{y}^N$

Ο αριθμός των μεταβλητών $(\vec{y}(t), \vec{y}(t))$ είναι πάντα άρτιος.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε μια σημειακή μάζα στο R^n

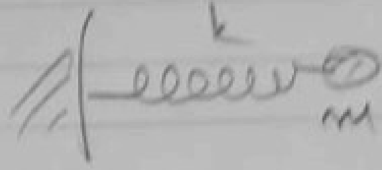
$$(13) \quad J(y_1,y_2,y_3) = \int_{t_0}^{t_1} L(y_1,y_2,y_3,y_1',y_2',y_3')\,dt$$

Λύση

(8) $$H(y(t), p(t)) = c,$$

Οι λύσεις $\{(y(t), p(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset$ Καμπύλη Στάθμης της H.

<u>Παράδειγμα</u> (Αρμονικός Ταλαντωτής)



(9) $$L = E_K - E_\Delta = \frac{1}{2} m y'^2 - \frac{1}{2} k y^2$$

$$p = L_{y'} = m y' \Rightarrow y' = \frac{p}{m} \quad (= f)$$

(10) $$H = -L\left(y, \frac{p}{m}\right) + \left(\frac{p}{m}\right) p$$

$$= -\left(\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{1}{2} k y^2\right) + \frac{p^2}{m}$$

$$= + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k y^2$$

(11) $$\begin{cases} y' = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ p' = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -ky \end{cases}$$

(8) ⇒
(12) $$\frac{1}{2} \frac{(p(t))^2}{m} + \frac{1}{2} k (y(t))^2 = C$$

(Πεπλεγμένη Μορφή - βλ. Ακριβείς Εξισώσεις)

∴ Η (2), εξίσωση $2^{ης}$ τάξης ⟺ Σύστημα $1^{ης}$ τάξης δύο εξισώσεων.

$$(6)\begin{cases} y' = \dfrac{\partial H}{\partial p}(t,y,p) \\ p' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(t,y,p) \end{cases}$$

Στην περίπτωση που η H ΔΕΝ εξαρτάται από τον t έχουμε το αυτόνομο

$$(6')\begin{cases} y' = \dfrac{\partial H}{\partial p}(y,p) \\ p' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(y,p) \end{cases}$$

y-p = επίπεδο φάσεων

Για την (6') έχουμε την <u>Αρχή Διατήρησης</u>

$$(7)\quad \frac{d}{dt}H(y(t),p(t)) = \frac{\partial H}{\partial y}y' + \frac{\partial H}{\partial p}p'$$

$$= \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$= 0.$$

H: Μηχανική Ενέργεια.