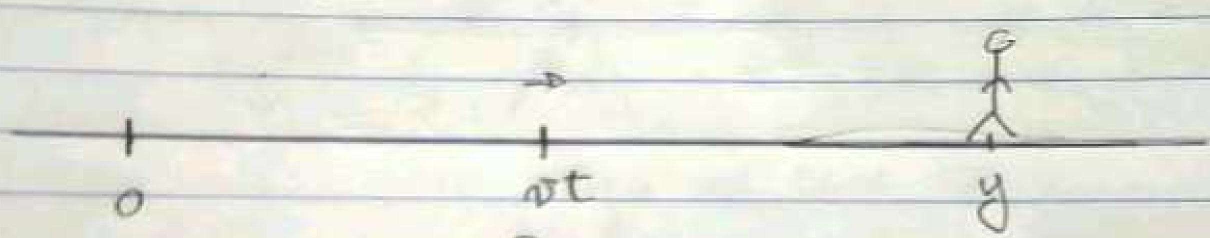
Διαλεξη 20

1. Σχολια επανω στην διαλεξη 19

Υπαρχει λαθος στο Συστημα Συντεταγμενων:

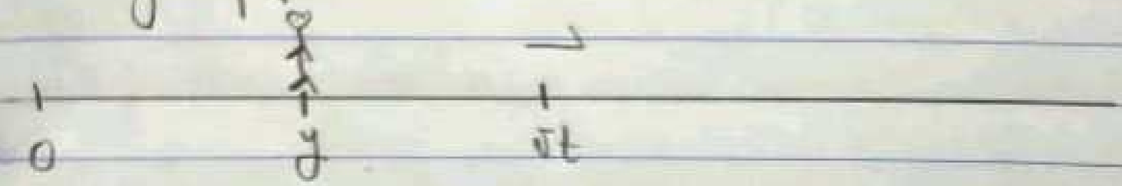
$$\bar{y} = y - vt \quad , \quad \bar{x} = x$$

Αυτο ειναι εμφανες στο ακολουθο σχημα:



Η συντεταγμενη του ως προς το κινουμενο ειναι $y - vt$.

Δεν παιζει ρολο η θεση:



$y - vt$ επισης.

Κατα συνεπεια διορθωσαμε την εξαγωγη των τυπων αλλαζοντας την v με $-v$.

$$Q^{+} = \frac{-y'v + \sqrt{c^2 y'^2 + (c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2} > 0 \qquad (c > v)$$

$y' > 0$.

Σχολιο στην γωνια Πλοιχρανω

$$\vec{V} = (c\cos\theta, c\sin\theta) = (V_{\bar{x}}, V_{\bar{y}})$$

Αυτη ειναι η ταχυτητα ως προς το κινουμενο συστημα συντεταγμενων. Παρατηρωμε $|\vec{V}| = c$.

ως προς το σταθερο συστημα, και $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ ομοιως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \cancel{\frac{V_y}{V_x}} = \frac{V_{\bar{y}} + v}{V_{\bar{x}}} = \frac{c\sin\theta + v}{c\cos\theta},$$

(διοτι $V_{\bar{x}}$ δεν αλλαζει ως προς τα δυο συστηματα)

...

□

Σχολιο στην (3)

Η (3) προκυπτει απο

$$c^2 (y'(b))^2 = v^2(b),$$

Δεν αλλαζει αν $v \longrightarrow -v$.

□

Ασκησεις

3.6, 3.11, 4.1, 4.6, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.17

Η Αρχή της Hamilton (Hamilton's Principle)

Έστω T = Κινητική Ενέργεια

V = Δυναμική Ενέργεια

$$T = \sum_{i,j} a_{ij}(y_1, \dots, y_n)\, y_i' y_j'$$

$$V = V(t, y_1, \dots, y_n ; y_1', \dots, y_n')$$

Θεωρούμε την Διαφορά $T - V = L(t, y, \dots$

$= L(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$

$= $ Lagrangian

$\vec{y}(t)$ = "Θέση"

$\vec{y}'(t)$ = "Ταχύτητα" (y, y' λέγονται "γενικευμένες αντεστραμμένες" και δεν συμπίπτουν αναγκαστικά με τις αντεστραμμένες Θέσης – Ταχύτ.)

Η Τροχιά ικανοποιεί

$$(H) \qquad \min_{A} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{y}(t), \vec{y}'(t)), \quad \vec{y}(t_0) = \bar{y}_0, \; \vec{y}(t_1) = \bar{y}_1$$

$$A = \{C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n), \; \vec{y}(t_0) = \bar{y}_0, \; \vec{y}(t_1) = \bar{y}_1\}$$

Σχόλ. Η ποσότητα $T+V$ είναι η Συνολική Μηχανική Ενέργεια και διατηρείται στην περίπτωση που η L δεν εξαρτάται από την t

Παρατήρηση

Αν η L δεν εξαρτάται από την t, τότε

Σχέση Δύναμης – Δυναμικής Ενέργειας

$$\vec{F} = -\nabla_y V \quad , \quad V(y, y')$$

$$L = \frac{1}{2} m y'^2 - \frac{1}{2} k y^2$$

$$(H) \quad \text{Min} \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m y'^2 - \frac{1}{2} k y^2\right)}_{L} dt$$

H (E-L)

$$L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = -ky - my''$$

$$= -ky - \frac{d}{dt} \underbrace{(my')}_{\text{ορμή}} = 0 \iff$$

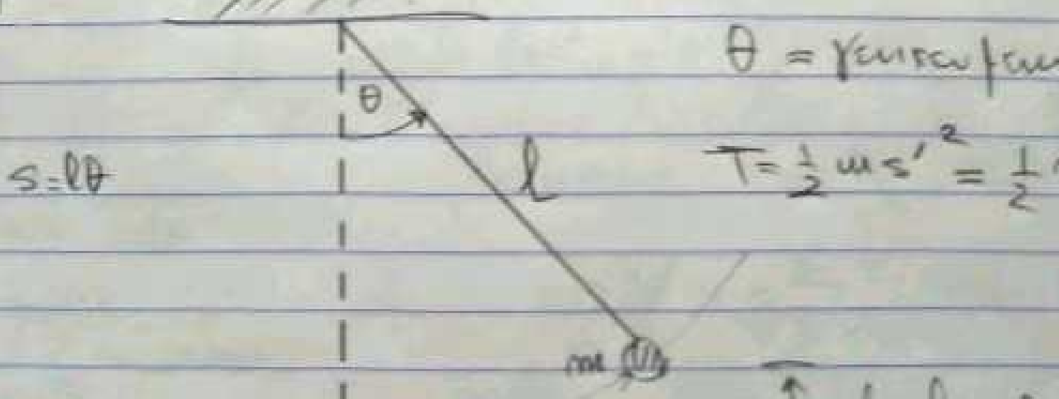
$$(4) \qquad y'' + \frac{k}{m} y = 0$$

2) Άλλο Εκκρεμές

θ = γενικευμένη συντ.

$$T = \frac{1}{2} m s'^2 = \frac{1}{2} m l^2 \theta'^2$$

$s = l\theta$



(H) $$\operatorname{Min}\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\left\{\frac{m}{2}\left(r'^2+r^2\theta'^2\right)+\frac{k}{r}\right\}}_{L}dt$$

$$L(y_1, y_2; y_1', y_2')$$

$y_1 = r$, $y_2 = \theta$

(5) $$L_r - \frac{d}{dt}L_{r'} = 0, \quad L_\theta - \frac{d}{dt}L_{\theta'} = 0,$$

$$L_r = mr\theta'^2 - \frac{k}{r^2}, \quad L_{r'} = mr'$$

$$L_\theta = 0, \quad L_{\theta'} = mr^2\theta'$$

$(5)_{(ii)} \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left(mr^2\theta'\right) = 0 \Rightarrow \boxed{mr^2\theta' = \text{σταθερά}}$

(διατηρηση στροφορμης)

$(5)_{(i)} \Leftrightarrow mr\theta'^2 - \frac{k}{r^2} - \frac{d}{dt}\left(mr'\right) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{mr'' + \frac{k}{r^2} - mr\theta'^2 = 0}$

Ασκηση 5.13.

$$V = mg\,(l - l\cos\theta)$$

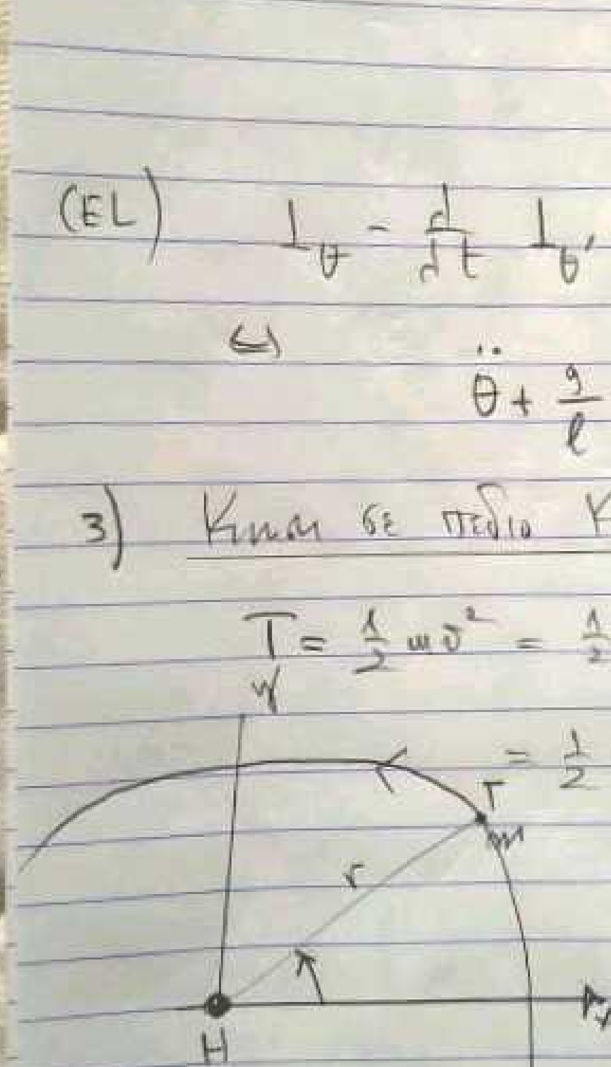
(H) $\quad \text{Min} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} m l^2 \theta'^2 - mg\,l(1-\cos\theta)\right)}_{L(\theta,\theta')} dt$.

(EL) $\quad L_\theta - \dfrac{d}{dt} L_{\theta'} = -mgl\sin\theta - \dfrac{d}{dt}\left(ml^2\theta'\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

3) <u>Κινηση σε πεδιο Κεντρικης Δυναμης στο Επιπεδο</u>

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m\left(x'^2 + y'^2\right)$$



$$= \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{d}{dt}(r\cos\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(r\sin\theta)\right)^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} m \left[(r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta')^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta')^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} m \left(r'^2 + r^2\theta'^2\right)$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r'^2\cos^2\theta + r'^2\sin^2\theta$

$r^2\sin^2\theta(\theta')^2 + r^2\cos^2\theta(\theta')^2$,

$-\cancel{2r'\sin\theta\cos\theta\,\theta'} + \cancel{2r'\sin\theta\cos\theta\,\theta'}$

$= r'^2 + r^2\theta'^2$

Υποθετουμε $F = -\dfrac{k}{r^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$

$$\Rightarrow V = -\frac{k}{r}$$

Έχουμε την διανυσματική εκδοχή της

(1) $L(y,y') - y' L_{y'}(y,y') =$ σταθερά

(2) $L - \sum_{i=1}^{n} y_i' L_{y_i'} =$ σταθερά (Διατήρηση Μηχ. Εν.)

Σημ: Το 1ο ολοκλήρωμα, (2), δεν ανάγει πλήρως το πρόβλημα σε εξ. 1ης τάξεως. Σημαντική διαφορά με $n=1$.

Η Euler-Lagrange που αντιστοιχεί στην (Η)

είναι το σύστημα n Δ.Ε.:

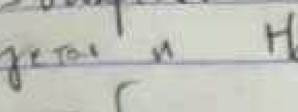
(3) $L_{y_i} - \frac{d}{dt} L_{y_i'} = 0 \quad , i=1,\dots,n$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_i}(t, y_1, \dots, y_n ; y_1', \dots, y_n') =: L_{y_i} \\ \frac{\partial L}{\partial y_i'}(t, \dots ; \dots) =: L_{y_i'} \end{array} \right)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η $L - \sum y_i' L_{y_i'} =: H$ (ως συνάρτηση των $y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'$) λέγεται η Hamiltonian του συστήματος

Παραδείγματα Μηχανικών Συστημάτων

1) Αρμονικός Ταλαντωτής



$T = \frac{1}{2} m y'^2, \quad V = \frac{1}{2} K y^2$

$F = -K \Delta l$