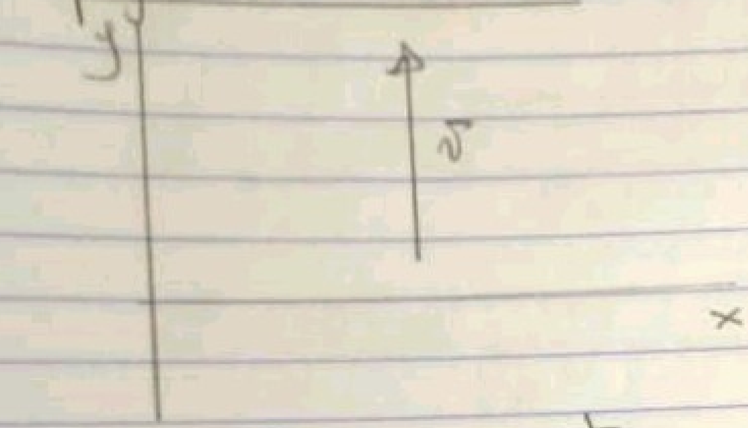
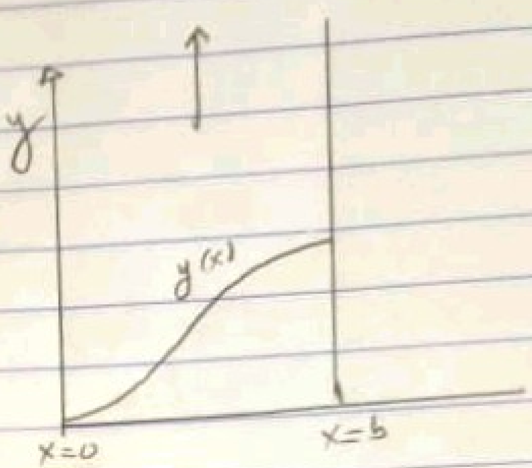
Διάλεξη 19 (Η Διάλεξη 18 λόγω γρίπης (ελ αγωνιστικές))

1) $$J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2} - v y'}{c^2 - v^2}\, dx.$$

Προέλευση του τύπου





v σταθερά ως προς t.

Σύστημα συντεταγμένων: $\bar{y} = y + vt$, $\bar{x} = x$

Ως προς αυτό το σύστημα έχουμε για την ταχύτητα

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 = c^2 \iff \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + v\right)^2 = c^2$$

$$\iff \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} + \frac{v}{\frac{dx}{dt}}\right)^2\right] = c^2$$

$$\iff \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{v}{\frac{dx}{dt}}\right)^2\right] = c^2$$

$$\iff 1 + \left(y' + \frac{v}{\frac{dx}{dt}}\right)^2 = \frac{c^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Θέτουμε $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{Q}$

Η φυσική συνοριακή συνθήκη για το (1)

$$L_z(b, y(b), y'(b)) = 0$$

$$L(x,y,z) = \frac{1}{c^2 - v^2(x)}\left(z\,v(x) + \sqrt{c^2 z^2 + (c^2 - v^2(x))}\right)$$

$$L_z = \frac{1}{c^2 - v^2}\left(v + \frac{1}{\sqrt{}}\, c^2 y'(b)\right) = 0$$

$$\iff -v(b) = \frac{c^2 y'(b)}{\sqrt{c^2 (y'(b))^2 + (c^2 - v^2(b))}}$$

$$\iff v^2(b)\left(c^2 (y'(b))^2 + (c^2 - v^2(b))\right) = c^4 (y'(b))^2$$

$$c^2 (y'(b))^2 \left(c^2 - \cancel{v^2(b)}\right) = v^2(b)\left(c^2 - \cancel{v^2(b)}\right)$$

$$\iff \boxed{y'(b) = \frac{v(b)}{c}} \qquad (3)$$

$\square$

B. $$J(u) = \iint_{\Omega} L(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))\, dx\, dy$$

Απλοποίηση Συμβολισμών :

(4) $$J(u) = \int_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

$\therefore$

$$1+(y'+vQ)^2=c^2Q^2$$

$$Q^2(v^2-c^2)+2y'vQ+1+y'^2=0$$

$$Q^{\mp}=\frac{-y'v\pm\sqrt{(y'v)^2-(v^2-c^2)(1+y'^2)}}{v^2-c^2} \Leftrightarrow$$

$$Q^{\mp}=\frac{-y'v\pm\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}}{v^2-c^2}$$

$$\left(c^2(1+y'^2)-v^2 = c^2y'^2+(c^2-v^2)\right)$$

$$T=\int_0^b \frac{dt}{dx}\,dx=\int_0^b Q\,dx$$

$$=\int_0^b \frac{-y'v\pm\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}}{v^2-c^2}\,dx$$

Προσοχή

$$Q^+=\frac{-y'v-\sqrt{c^2y'^2+(c^2-v^2)}}{v^2-c^2}=\frac{y'v+\sqrt{c^2y'^2+(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}>0$$

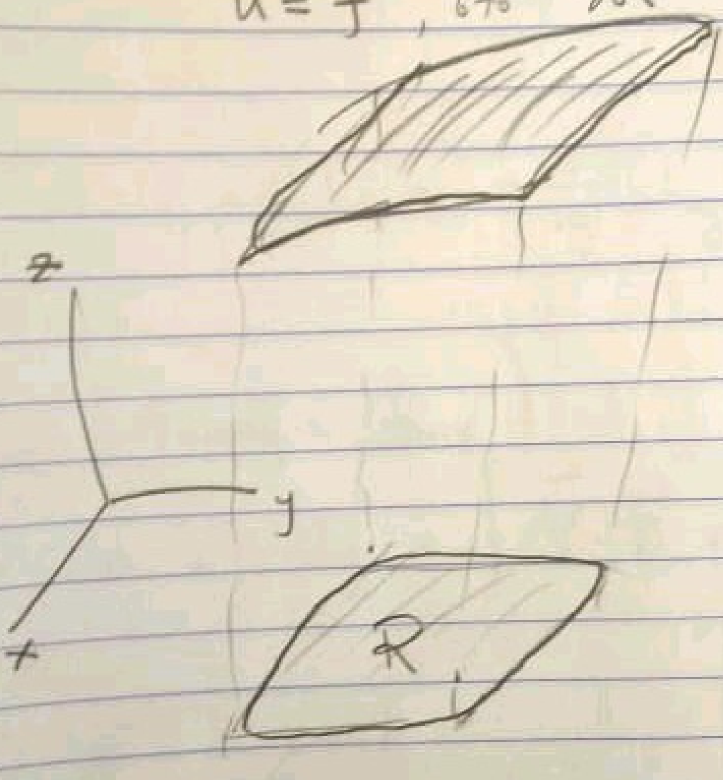
$$Q^-=\frac{-y'v+\sqrt{c^2y'^2+(c^2-v^2)}}{v^2-c^2}=\frac{y'v-\sqrt{c^2y'^2+(c^2-v^2)}}{c^2-v^2}<0$$

$$0<\frac{dx}{dt}=Q^+$$

Ειδική Περίπτωση

(5) $$J(u) = \int_R \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx\, dy = \text{Εμβαδόν}$$

$u = f$, στο ∂R



$\Gamma = \partial R$

Πρόβλημα Plateau (Διατυπώθηκε από τον Lagrange 1760)

Δεδομένης Γ, f, να βρεθεί η ελάχιστη επιφάνεια

(Ύπαρξη – Douglas, Rado
$\downarrow$
Fields Medal 1936)

Euler-Lagrange

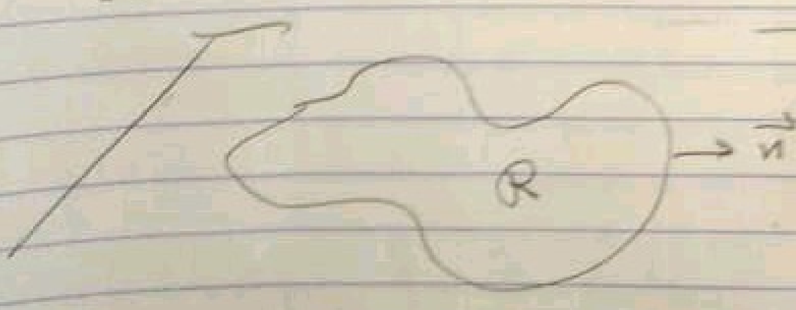
$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \iint_R L(x,y,u+\varepsilon h, u_x+\varepsilon h_x, u_y+\varepsilon h_y)\,dx\,dy \qquad h\big|_{\partial R}=0$$

$$= \int_R \left(L_u h + L_{u_x} h_x + L_{u_y} h_y\right)dx\,dy$$

$$= \int_R L_u h + \frac{\partial}{\partial x}(L_{u_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(L_{u_y} h) - h\left(\frac{\partial}{\partial x}(L_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(L_{u_y})\right)$$

Σημ. (Θεώρημα Gauss)

(6) $\displaystyle\int_R \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy = \int_{\partial R} \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$ (Θεώρημα Απόκλισης)



$$\vec{V} = (V_1(x,y), V_2(x,y))$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

$$\therefore \int_R \operatorname{div}\left(L_{u_x} h, L_{u_y} h\right)dx\,dy = \int_{\partial R} \cancelto{0}{\left(L_{u_x} h, L_{u_y} h\right)}\cdot\vec{n}\,dS$$

Θεώρημα $h \in C_0^2(R)$ έχουμε το Θεμελιώδες Λήμμα Λ.Μ.

$$\int_R g(x,y)\, h(x,y)\, dx\, dy = 0 \qquad \forall\ h \in C^2(R)$$

$$\Rightarrow g \equiv 0$$

(EL) $$L_u - \left(\frac{\partial}{\partial x} L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y) + \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}(x,y,u,u_x,u_y) \right) = 0$$

<u>Παράδειγμα</u> (Εξίσωση ~~Ελαχιστικής~~ Επιφάνειας) (Ελαχίστης) $\int (1+u_x^2+u_y^2)^{1/2} dx dy$

Η (EL) για το (5) είναι

(7) $$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2) u_{yy} = 0$$

<u>Απόδειξη</u>

$L_u = 0$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = 0$$

$$\frac{u_{xx}\sqrt{\quad} - u_x \frac{1}{2}(\ )^{-\frac{1}{2}}\left[2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}\right]}{1+u_x^2+u_y^2}$$

$$+\frac{u_{yy}\sqrt{\quad} - u_y \frac{1}{2}(\ )^{-\frac{1}{2}}\left[2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy}\right]}{1+u_x^2+u_y^2} = 0$$

$$u_{xx}\left(1+\cancel{u_x^2}+u_y^2\right)-u_x\left(\cancel{u_x u_{xx}}+u_y u_{yx}\right)$$

$$+\,u_{yy}\left(1+u_x^2+\cancel{u_y^2}\right)-u_y\left(u_x u_{xy}+\cancel{u_y u_{yy}}\right)=0$$

$$u_{xx}\left(1+u_y^2\right)+u_{yy}\left(1+u_x^2\right)-2u_x u_y u_{xy}=0.$$

$\square$