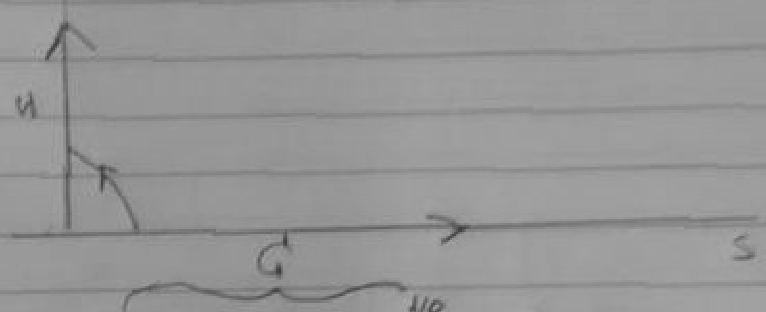
Διάλεξη 15 (Ολοκληρώματα Στάσιμης Φάσης)

Υπολογισμός του $\hat{I} = \int_0^\infty \exp\left[\frac{ix}{p!}\psi^{p}(a)s^{p}\right]ds$, $x \to \infty$

A. $\psi^{(p)}(a) > 0$

$$s = e^{i\pi/2p}\left[\frac{p!\,u}{x\psi^{(p)}(a)}\right]^{1/p}, \quad u \in \mathbb{R}$$



$$ds = e^{i\pi/2p}\left[\frac{p!}{x\psi^{(p)}(a)}\right]^{1/p}\frac{1}{p}u^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\frac{ix}{p!}\psi^{p}(a)s^{p} = -u$$

$$\Rightarrow \hat{I} = \left(\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{p}-1}du\right)C = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)C$$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

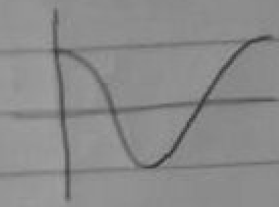
B. $\psi^{(p)}(a) < 0 \Longrightarrow s = e^{-\frac{i\pi}{2p}}\left[\frac{p!\,u}{x\psi^{(p)}(a)}\right]^{1/p}$.

$\therefore$

$$\boxed{I(x) \sim f(a)e^{ix\psi(a) \pm \frac{i\pi}{2p}}\left[\frac{p!}{x|\psi^{(p)}(a)|}\right]^{1/p}\frac{\Gamma(1/p)}{p}}$$

Παράδειγμα 1

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} e^{ix\cos t}\, dt \quad \text{όπως} \quad x \to +\infty$$



$\psi(t) = \cos t$, $\boxed{t=0}$

$\psi''(0) = -1$, $p=2$

$$I(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad \left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$$

Παράδειγμα 2

$$I(x) = \int_0^{\infty} \cos(xt^2 - t)\, dt \quad , \quad x \to +\infty$$

$$= \mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{i(xt^2 - t)}\, dt \quad , \quad \psi(t) = t^2 \quad , \quad \boxed{t=0}$$

$\psi''(0) = 2$

$$I(x) \sim \mathrm{Re}\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \quad , \quad x \to +\infty .$$

Άσκηση (Ασυμπτωτική συμπεριφορά συνάρτησης Bessel)

1) Δείξτε ότι $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\, dt$

(Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα ικανοποιεί την $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
και συμπεριφέρεται σαν $\left(\frac{x}{2}\right)^n / n!$, $x \to 0$

2) $J_n(n) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{in(\sin t - t)}\, dt\right)\frac{1}{\pi}$, $\psi(t) = \sin t - t$, $t=0$

$= \psi''(0) = 0, \quad \psi'''(0) = -1$

$$J_n(n) \sim \frac{1}{\pi} 2^{-2/3} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) n^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad n \to \infty, \qquad (+)$$

Για $x \neq n$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - \nu t)\, dt - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh t - \nu t}\, dt \quad (*)$$

- Δείξτε την φορμούλα (*)
- Δείξτε ότι η (+) ισχύει για $n = x$.

$\square$