Άσκηση δ.12 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x) = \delta(x)$ $x\in[0,1]$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int y_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}\left(e^{-x\varepsilon^{-1}} - e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{x\varepsilon^{-1}}\right)dx$$ έστω $u = x\varepsilon^{-1}$ $du = dx\,\varepsilon^{-1}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon^{-1}}\frac{1}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left[e^{-u} - e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{u}\right]du = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left[-e^{-u} - e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{u}\right]_0^{\varepsilon^{-1}} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left[-e^{-\varepsilon^{-1}} - e^{-\varepsilon^{-1}} + 1 + e^{-2\varepsilon^{-1}}\right] = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^1 y_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)dx\cdot\varphi(0)\right|$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\right|$$ $u = x\varepsilon^{-1} \Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_0^{\varepsilon^{-1}}\frac{1}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left[e^{-u} - e^{-2\varepsilon^{-1}}e^{u}\right](\varphi(\varepsilon u)-\varphi(0))du\right|,$$ ΘΜΤ: $f'(c)\cdot(\varepsilon u) = \varphi(\varepsilon u) - \varphi(0)$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\|\varphi'\|_\infty}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left|\int_0^{\varepsilon^{-1}} u\left[e^{-u} + e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{u}\right]du\right| \overset{\text{ολ. κατά παράγοντες}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\|\varphi'\|_\infty}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left|u\left[-e^{-u}+e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{u}\right]_0^{\varepsilon^{-1}} - \int_0^{\varepsilon^{-1}} e^{-u}+e^{-2\varepsilon^{-1}}e^{u}du\right|$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\|\varphi'\|_\infty}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left|0 - \left[-e^{-u}+e^{-2\varepsilon^{-1}}\cdot e^{u}\right]_0^{\varepsilon^{-1}}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\|\varphi'\|_\infty}{1-e^{-2\varepsilon^{-1}}}\left|e^{-\varepsilon^{-1}} - e^{-\varepsilon^{-1}} - 1 + e^{-2\varepsilon^{-1}}\right| = 0$$

άρα $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$