Διάλεξη 11
13

Διορθώσεις στο Παράδειγμα $3^{ης}$ τάξης, σ 48

(1) $\varepsilon y''' - y' + xy = 0$, $y(0) = y'(0) = y(1) = 1$.

Θα δείξουμε ότι η θεμελιώδης προσέγγιση που σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα παρέχει μια ομοιόμορφη προσέγγιση $O(\varepsilon)$ τάξης, καταρρέει σε αυτή την περίπτωση, και χρειάζεται μια ουσιαστική τροποποίηση

A. Εξωτερική Προσέγγιση

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

$\underline{\varepsilon^0}$

(2) $-y_0' + x y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = a_0 e^{x^2/2}$

B. Εσωτερική Προσέγγιση στο $x=0$

$$\eta \doteq \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad \dot{Y}(\eta) =: \frac{dY}{d\eta}$$

Η (1) σε η-μεταβλητές παίρνει την μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{3\alpha}} \dddot{Y} - \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\dot{Y} + \varepsilon^\alpha \eta Y = 0$$

(3) $\varepsilon^{1-3\alpha}\dddot{Y} - \varepsilon^{-\alpha}\dot{Y} = -\varepsilon^\alpha \eta Y$

Εξισορρόπηση:

$1-3\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$, $1-3\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$, $-\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \dddot{Y} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \dot{Y} = -\varepsilon^{1/2} \eta Y \iff$$

$$\dddot{Y} - \dot{Y} = \varepsilon \eta Y$$

$\alpha = \frac{1}{4}$

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} \dddot{Y} - \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \dot{Y} = -\varepsilon^{\frac{3}{4}} \eta Y \iff$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \dddot{Y} - \dot{Y} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta Y \implies -\dot{Y}_0 = 0$$! απορρίπτεται.

$\alpha = 0$

$$\varepsilon \dddot{Y} - \dot{Y} = -\eta Y \implies -\dot{Y}_0 + \eta Y_0 = 0$$, ταυτίζεται

με την εξωτερική προσέγγιση. Απορρίπτεται.

Επιλέγουμε $\alpha = \frac{1}{2}$. Η (4) για $\varepsilon = 0$ είναι

(5) $$\dddot{Y}_0 - \dot{Y}_0 = 0 \implies Y_0(\eta) = A_0 e^{\eta} + B_0 e^{-\eta} + C_0$$

$\eta = x/\sqrt{\varepsilon}$. Αναγκαστικά $A_0 = 0$ για να είναι δυνατή

η συναρμογή $\lim\limits_{\eta \to \infty} Y_0(\eta) = \lim\limits_{x \to 0} y_0(x)$

$$\therefore \quad Y_0(\eta) = B_0 e^{-\eta} + C_0$$

$\boxed{1} = Y_0(0) = \boxed{B_0 + C_0}$, $\dot{Y}_0(\eta) = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{d\eta} = \sqrt{\varepsilon}\, y'(x)$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ -B_0'}}{\dot{Y}_0(0)} = \sqrt{\varepsilon}\, y'(0) = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\therefore \quad -B_0 = \sqrt{\varepsilon} \quad !$$

Οι συντελεστές εξ' υποθέσεως ανεξάρτητοι του ε !

<u>Τροποποίηση της μηδενικής Προσέγγισης του ασ. Αναπτυγ.</u>

$$(6) \quad Y(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2}(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + \dots$$

Αντικατάσταση στην (4):

$$\left(Y_0 + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2} + \dots\right)^{\dddot{}} - \left(Y_0 + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2} + \dots\right)^{\dot{}} = -\varepsilon\eta\left(Y_0 + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2} +\right.$$

$\underline{\varepsilon^0}$

$$(7) \quad \dddot{Y}_0 - \dot{Y}_0 = 0$$

$\underline{\varepsilon^{1/2}}$

$$(8) \quad \dddot{Y}_{1/2} - \dot{Y}_{1/2} = 0$$

<u>Συνοριακές Συνθήκες στο $x=0$</u>

$$Y(0) = 1, \quad \dot{Y}(0) = \sqrt{\varepsilon}$$

$$Y(\eta) = Y_0(\eta) + \sqrt{\varepsilon}\, Y_{1/2}(\eta)$$

Επιβάλλουμε: $\left.\begin{array}{l} Y_0(0) = 1, \quad Y_{1/2}(0) = 0 \\ Y_0'(0) = 0, \quad \dot{Y}_{1/2}(0) = 1 \end{array}\right] \quad (9)$

$$(7) \Rightarrow \quad Y_0(\eta) = \cancel{A_0} e^{\eta} + B_0 e^{-\eta} + C_0$$

$$Y_{1/2}(\eta) = \cancel{A_{1/2}} e^{\eta} + B_{1/2} e^{-\eta} + C_{1/2}$$

$\underline{A_0} = \underline{A_{1/2}} = 0$ (όπως πριν)

$$Y_0(0) = \cancel{B_0} + C_0 = 1$$

$$Y_{1/2}(0) = \cancel{B_{1/2}} + C_{1/2} = 0$$

$$-\underline{B_0 = 0}, \quad -B_{1/2} = 1$$

$$\Rightarrow C_0 = 1, \quad C_{1/2} = 1.$$

C. Συναρμογή στο $x=0$

$$(10) \quad Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2}(\eta)$$
$$= 1 + \varepsilon^{1/2}\left(1 - e^{-\eta}\right).$$

$$\lim_{\eta\to\infty} Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = 1 + \varepsilon^{1/2} = \lim_{x\to 0} y_0(x) = a_0 \quad !$$

Τροποποίηση της μηδενικής προσέγγισης του εξ. Αναπτ.

$$(11) \quad y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon^{1/2} y_{1/2}(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

Εύκολα προκύπτει ότι οι εξισώσεις για $\varepsilon^1, \varepsilon^{1/2}$ είναι διεζευγμένες και

$$(12) \quad -y_{1/2}' + x\, y_{1/2} = 0$$

αι ομοίως

$$y_{1/2}(x) = a_{1/2}\, e^{x^2/2} \qquad \left(y_0(x) = a_0 e^{x^2/2} \right)$$

Η Συναρμογή τροποποιείται:

$$\lim_{x\to 0} \left(y_0(x) + \varepsilon^{1/2} y_{1/2}(x) \right) = \lim_{\eta\to\infty} Y_{εσ}(\eta) = 1 + \varepsilon^{1/2}$$

$$\therefore \quad a_0 = 1, \quad a_{1/2} = 1,$$

$$\therefore$$

(14) $$y_{εξ}(x) = e^{x^2/2}\left(1 + \varepsilon^{1/2}\right).$$

Παρατήρηση

$$y_{εξ}(1) = e^{1/2}\left(1+\varepsilon^{1/2}\right) \neq 1 \quad !$$

Συμπέρασμα: Οριακό στρώμα στο $x = 1$.

D. Εσωτερική Προσέγγιση στο $x = 1$

$$\bar{\eta} = \frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\bar{Y}(\eta) = \bar{Y}_0(\eta) + \varepsilon^{1/2}\bar{Y}_{1/2}(\eta) + \dots$$

Άσκηση Διάλεξης 11

Δείξτε ότι

$$\bar{Y}_0(\bar{\eta}) = (1-\sqrt{e})e^{-\bar{\eta}} + \sqrt{e}$$

$$\bar{Y}_{1/2}(\bar{\eta}) = \left[-\sqrt{e} - \frac{1}{2}(\sqrt{e}-1)\bar{\eta}\right]e^{-\bar{\eta}} + \sqrt{e}\,\bar{\eta} + \sqrt{e}$$

$$y_{of}(x) = e^{-x^2/2}\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon(x^2-1)^2\right] + (1-e^{-1/2})\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon\left(\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right] e^{-x/\varepsilon}$$

$\#$