

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Νικόλαος Αλικάκος

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Μάιος 2006

## Contents

<b>1</b>	<b>Το Κεντρικό Θεώρημα</b>	<b>3</b>
1.1	Θεώρημα Πεπλεγμένης συναρτήσης . . . . .	3
1.2	Μικρή (ομαλή) διαταραχή Χαμιλτονιανού Συστήματος . . . . .	8
1.3	Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα]. . . . .	12
<b>2</b>	<b>Αλγεβρικές Εξισώσεις</b>	<b>13</b>
2.1	Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Σύνηθεις Διαφορικές Εξισώσεις</b>	<b>27</b>
3.1	Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - η ομαλή περίπτωση	28
3.2	Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων Poincare - Linstedt (Ιδιόμορφη διαταραχή) . . . . .	40
3.3	Ανάλυση οριακού στρώματος - Ιδιόμορφη διαταραχή . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις</b>	<b>52</b>
4.1	Προέλευση της θεωρίας ιδιόμορφων διαταραχών και οριακού στρώματος: Το σύστημα Prandtl στη Ρευστοδυναμική. . . . .	52
4.1.1	Εξισώσεις Navier - Stokes . . . . .	52
4.1.2	Το φυσικό φαινόμενο . . . . .	54
4.1.3	Το πάχος της λεπίδας: το φυσικό επιχείρημα. . . . .	55
4.2	Εσωτερική κλίμακα - Εσωτερικά αναπτύγματα και σύστημα Prandtl. . . . .	56
4.3	Ο ρόλος της πίεσης στη δημιουργία οριακού στρώματος. . . . .	66
<b>5</b>	<b>Ο Μετασχηματισμός του Liouville - Η Μέθοδος WKB</b>	<b>82</b>

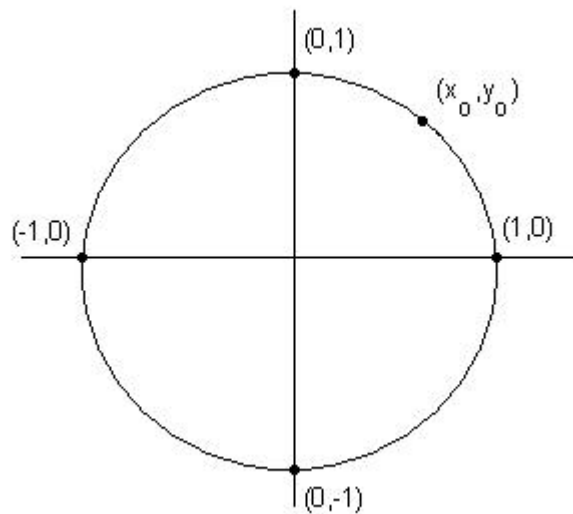
# 1 Το Κεντρικό Θεώρημα

## 1.1 Θεώρημα Πεπλεγμένης συναρτήσης

Η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

συσχετίζει τις μεταβλητές  $x$  και  $y$  και ορίζει τη μια σαν συνάρτηση της άλλης.



Έστω  $(x_0, y_0)$  όπως στο σχήμα. Τότε τοπικά σε περιοχή του σημείου η (1) ορίζει

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad y_0 = f(x_0)$$

και ανάλογα

$$x = g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad x_0 = g(y_0)$$

Για  $(x_0, y_0)$  επί των αξόνων, έχουμε μόνο μια επιλογή. Για παράδειγμα, αν  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  αναγκαστικά επιλέγουμε το  $x$  σαν συνάρτηση του  $y$ .

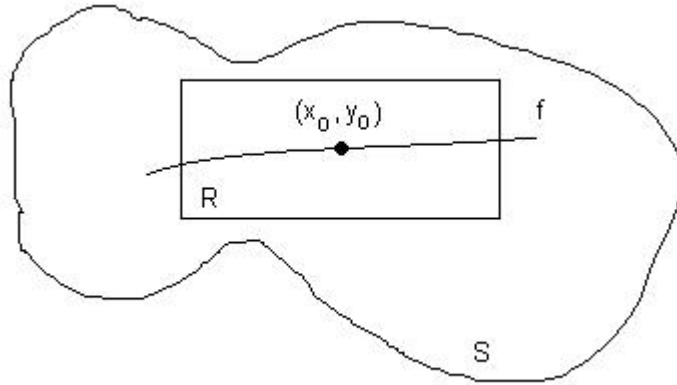
Όταν δωθεί μια γενική εξίσωση της μορφής

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

είναι εν γένει σπάνιο να μπορούμε να εκφράσουμε σε λυμένη μορφή τη μια μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

εγγυάται, κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, ότι η (2) ορίζει τη μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης, τουλάχιστον τοπικά περί το  $(x_0, y_0)$  που ικανοποιεί την (2) και επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης με όση ακρίβεια επιθυμούμε.

**Θεώρημα 1.1** Έστω  $F(.,.)$   $C^1$  -συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό σύνολο  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in S$ .



Υποθέτουμε ότι

(I)  $F(x_0, y_0) = 0$

(II)  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε υπάρχουν  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  τέτοια ώστε στο ορθογώνιο  $R = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2\} \subseteq S$  ισχύουν τα ακόλουθα

(i)  $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \exists ! y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$  τέτοιο ώστε

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει καλώς ορισμένη  $y=f(x)$  που ικανοποιεί

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \tag{4}$$

και όλες οι λύσεις της (3) μέσα στο  $R$  βρίσκονται πάνω στο γράφημα της  $f(x)$ .

(ii) Η  $f(x)$  είναι  $C^1$ ,  $f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \rightarrow (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ ,  $f(x_0) = y_0$ , και ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1). \tag{5}$$

Παρατηρήσεις

(1) Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα με παραγωγή από την (4):

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)$$

(2) θεωρούμε την  $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ . Για  $(x_0, y_0)$  εκτός των αξόνων ισχύει  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ,  $F_x(x_0, y_0) = 2x_0$  και το ΘΠΣ μπορεί να εφαρμοστεί και στις 2 κατευθύνσεις και δίνει  $y=f(x)$  και  $x=g(y)$ . Αυτό δεν ισχύει για  $(x_0, y_0)$  επί των αξόνων; πχ,  $F_y(x, y) = -2y = 0$  στο  $(1,0)$ , και κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εγγυάται  $y=f(x)$  σε περιοχή του  $(1,0)$  (ευτυχώς!).

(3) Θεωρείστε το παράδειγμα  $F(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$  που σε περιοχή του  $(0,0)$  η  $F(x,y)=0$  ορίζει δύο διαφορετικές συναρτήσεις  $y = f_1(x) = x^2$  και  $y = f_2(x) = x^3$  γεγονός που φαινομενικά αντίκειται στη μοναδικότητα του  $f(x)$ . Παρατηρούμε όμως ότι  $F_y(x, y) = 2y - x^2 - x^3$  και  $F_y(0, 0) = 0$ , άρα η υπόθεση (II) δεν ισχύει και κατά συνέπεια δεν υπάρχει αντίφαση.

**Απόδειξη.** (1) Έστω  $F_y(x_0, y_0) > 0$  (η άλλη περίπτωση  $F_y(x_0, y_0) < 0$  είναι ανάλογη). Επιλέγουμε  $\delta_2 > 0$  έτσι ώστε

$$F_y(x_0, y) > 0, \quad |y - y_0| \leq \delta_2 \tag{6}$$

το οποίο είναι δυνατόν λόγω συνέχειας. Κατά συνέπεια, η  $y \mapsto F(x_0, y)$  είναι αυστηρά αύξουσα, και δεδομένου ότι  $F(x_0, y_0) = 0$  έχουμε

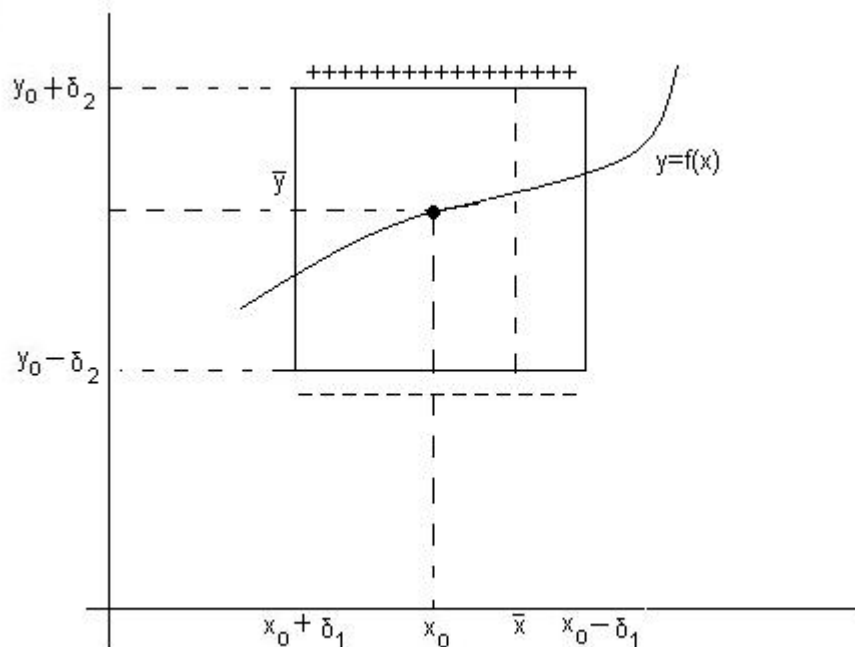
$$F(x_0, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta_2) > 0. \tag{7}$$

Κάνοντας χρήση τώρα της συνέχειας  $x \mapsto F(x, y_0 \pm \delta_2)$  με  $\delta_1$  αρκετά μικρό, έχουμε

$$F(x, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta_2) > 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_1. \tag{8}$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει ένα ορθογώνιο  $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$  στην πάνω πλευρά του οποίου η  $F$  είναι θετική, στην κάτω αρνητική. Επιλέγοντας τα  $\delta_1, \delta_2$  μικρότερα ενδεχομένως μπορούμε να εγγυηθούμε ότι εντός του ορθογωνίου ισχύει

$$F_y > 0 \tag{9}$$



(2) Εάν δοθεί τώρα  $\bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$  θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $y \mapsto F(\bar{x}, y)$ ,  $y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$  η οποία αλλάζει πρόσημο ακριβώς μια φορά λόγω (8) και (9). Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας υπάρχει  $\bar{y} \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$  τέτοιο ώστε

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{10}$$

Το  $\bar{y}$  είναι μοναδικό (λόγω (9)). Ορίζουμε λοιπόν

$$f(\bar{x}) := \bar{y}, \quad \bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]. \tag{11}$$

3. Θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = x_0$ . Δοθέντος  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε να ισχύει ότι  $F(x, y_0 + \epsilon) > 0$ ,  $F(x, y_0 - \epsilon) < 0$  για  $|x - x_0| < \delta$ . Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας, υπάρχει  $y^* = y^*(x)$  με  $y^* \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$  τέτοιο ώστε  $F(x, y^*(x)) = 0$ .

Λόγω της μοναδικότητας της  $f(x)$ , συμπεραίνουμε ότι  $y^*(x) = f(x)$  και κατά συνέπεια  $|f(x) - f(x_0)| = |y^*(x) - y_0| < \epsilon$  για  $|x - x_0| < \delta$  που αποδεικνύει τη συνέχεια.

Για  $x^* \neq x_0$ ,  $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$  θεωρούμε το σημείο  $(x^*, f(x^*)) \in R$ . Οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν για το  $(x^*, y^*)$  στη θέση του  $(x_0, y_0)$ .

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω κατασκευή οδηγούμαστε σε μια  $f^*$  που συμπίπτει αναγκαστικά με την  $f$  λόγω του ορισμού της τελευταίας ως μοναδικής λύσης της εξίσωσης  $F(x,y)=0$ . Συνεπώς, η  $f$  είναι συνεχής στο  $x^*$  για κάθε  $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ .

4. Τέλος θα δείξουμε ότι η  $f(x)$  είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \quad (12)$$

από όπου έπεται ότι η  $f \in C^1$ .

Έστω λοιπόν  $x$  φιξαρισμένο σημείο και  $y=f(x)$ . Για  $\Delta x$  τέτοιο ώστε  $x + \Delta x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ , ορίζουμε

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) - y.$$

Από τον ορισμό της  $f$  έχουμε

$$F(x, y) = 0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + F_y(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$$

όπου  $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$ ,  $\bar{y} \in (y, y + \Delta y)$ , όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Έπεται ότι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})} \quad (13)$$

όπου κάναμε χρήση του  $F_y > 0$  στο  $\mathbb{R}$ . Παίρνοντας το όριο  $\Delta x \rightarrow 0$ , κάνοντας χρήση της συνέχειας έχουμε  $\Delta y \rightarrow 0$ , και κατά συνέπεια  $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$  και από την (13) έχουμε

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

□

## 1.2 Μικρή (ομαλή) διαταραχή Χαμιλτονιανού Συστήματος

([A], σελ. 149)

Θεωρούμε το σύστημα

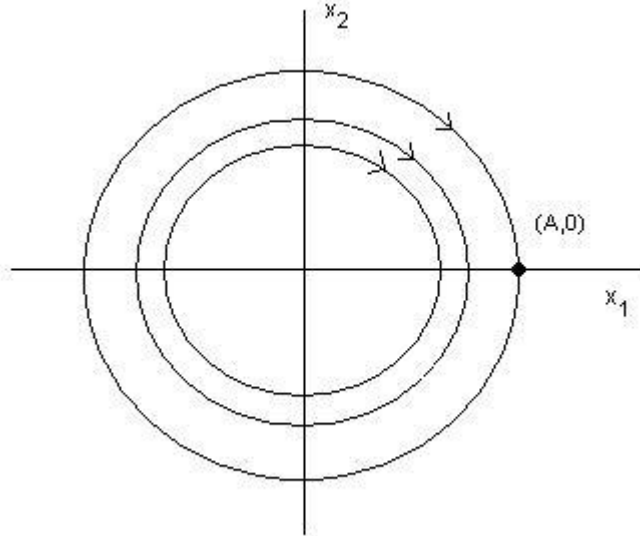
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (14)$$

(όπου  $f_i \in C^1$  συναρτήσεις)

που διαφέρει ελαφρώς από τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \quad (15)$$

του οποίου όλες οι λύσεις είναι περιοδικές:

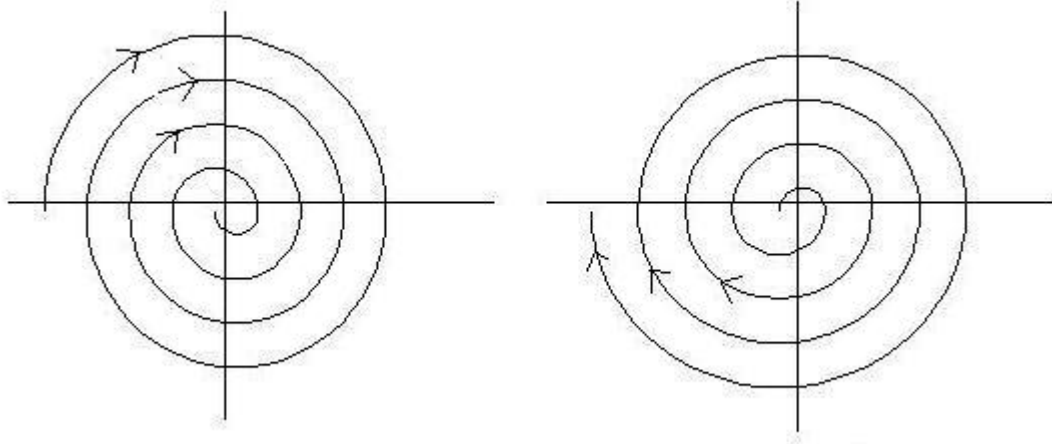


$$x_1^0(t) = A \cos(t - t_0)$$

$$x_2^0(t) = A \sin(t - t_0)$$

Οι τροχιές του (14) εν γένει δεν είναι κλειστές και ενδέχεται να έχουμε τη μορφή ελικοειδούς με απόκλιση της τάξης του  $\varepsilon$  μεταξύ 2 διαδοχικών στροφών:





Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η ελικοειδής λύση πλησιάζει ή απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, θεωρούμε την ποσότητα (μηχανική ενέργεια)

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

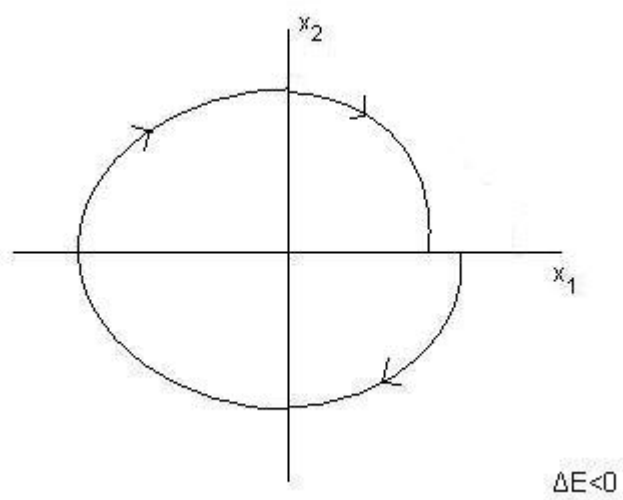
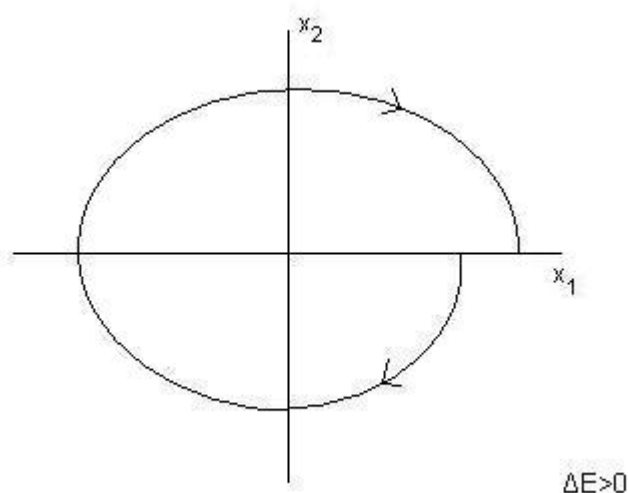
με

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x_1, x_2) &:= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2)) + x_2(-x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2)) \\ &= \varepsilon(x_1 f_1(x_1, x_2) + x_2 f_2(x_1, x_2)) =: \dot{E}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Ζητάμε πληροφορία για το πρόσημο της ποσότητας

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) dt =: \Delta E \tag{16}$$

που αντιστοιχεί στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της  $(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t))$  κατά μια πλήρη "περιστροφή":  $x_2^\varepsilon(0) = x_2^\varepsilon(T(\varepsilon)) = 0$



**Λήμμα 1.2**

$$\Delta E = \int_0^{2\pi} \dot{E}(A \cos(t - t_0), A \sin(t - t_0)) dt + o(\varepsilon). \quad (17)$$

Συμβολισμός: Εξ' ορισμού,  $o(\varepsilon)$  είναι ποσότητα που εξαρτάται από το  $\varepsilon$  και

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Το  $O(\varepsilon)$  είναι παράσταση που εξαρτάται από το  $\varepsilon$  και για την οποία ισχύει

$$|O(\varepsilon)| < C\varepsilon$$

όπου  $C$  μια σταθερά ανεξάρτητη του  $\varepsilon$ .

Από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης από παραμέτρους των Σ.Δ.Ε., προκύπτει ότι  $(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) \rightarrow (x_1^0(t), x_2^0(t))$  καθώς  $t \rightarrow 0$ , ομοιόμορφα στα συμπαγή του  $t$ . Κατά συνέπεια,  $T(\varepsilon) \rightarrow 2\pi$ .

Από την

$$\begin{aligned} \Delta E &= \varepsilon \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) dt \\ &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \\ &+ \varepsilon \left( \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt - \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \right) \\ &+ \varepsilon \left( \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)) dt - \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \right). \end{aligned} \quad (18)$$

λόγω ότι του  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  είναι μηδέν των 2 παρενθέσεων, προκύπτει η (17).

Θέτουμε

$$F(A) := \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) dt \quad (19)$$

και γράφουμε την (17) ως

$$\Delta E = \varepsilon \left[ F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \quad (20)$$

**Θεώρημα 1.3** Έστω ότι η  $F$  έχει απλή ρίζα στο  $A_0$ .

$$F(A_0) = 0 \quad F'(A_0) \neq 0$$

Τότε το 14 έχει περιοδική λύση πλάτους  $A_0 + O(\varepsilon)$  για  $\varepsilon \ll 1$ .

**Απόδειξη.** Θέτουμε

$$Q(\varepsilon, A) := F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Η  $Q$  είναι  $C^1$  (εδώ κάνουμε χρήση από Σ.Δ.Ε. για ομαλή εξάρτηση ως προς  $\varepsilon$ ) και

$$Q(0, A_0) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) \neq 0.$$

Μέσω του ΘΠΣ, υπάρχει  $A(\varepsilon)$ ,  $A(0) = A_0$ , τέτοια ώστε

$$Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0.$$

Άρα το (14) έχει λύση που είναι κλειστή καμπύλη, άρα περιοδική.  $\square$

### 1.3 Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα].

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) \quad (\text{Van der Pol})$$

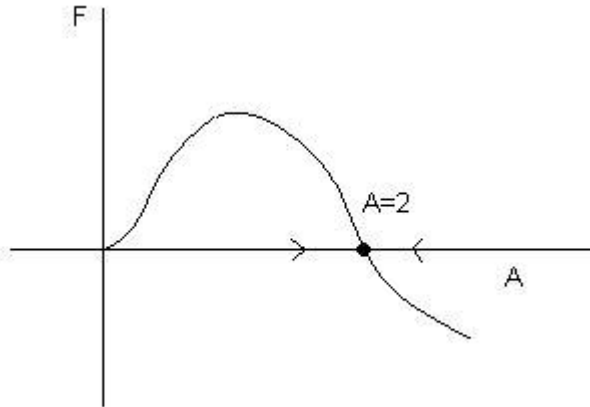
την οποία γράφουμε σε μορφή συστήματος θέτοντας  $x_1 := x$ ,  $x_2 := \dot{x}$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2(1 - x_1^2).$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon x_2^2(1 - x_1^2)$$

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t - t_0)(1 - A^2 \cos^2(t - t_0))dt = \\ &= \pi(A^2 - \frac{A^4}{4}). \end{aligned}$$



Κατά συνέπεια η εξίσωση Van der Pol έχει περιοδική λύση για  $\varepsilon \ll 1$  κοντά στην περιφέρεια  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ .

**Άσκηση 1.4** Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση Duffing:  $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$ . Παίρνετε καμία πληροφορία;

**Άσκηση 1.5** Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση:  
 $\ddot{x} = -x + \varepsilon |\dot{x}|^p \dot{x} (1 - x^{2q})$ .  
 όπου  $p, q > 0$ .

**Άσκηση 1.6** Θεωρείστε την εξίσωση του Van der Pol

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2)$$

Επιλέξτε  $f$  κατάλληλο πολυώνυμο έτσι ώστε να υπάρχουν ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις για  $\varepsilon \ll 1$ . Για το παράδειγμα που θα κατασκευάσετε ερευνηθείτε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.

## 2 Αλγεβρικές Εξισώσεις

### 2.1 Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα

Το ΘΠΣ δίνει ύπαρξη λύσεων της

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{ή } F(z, w) = 0) \tag{21}$$

σε περιοχή σημείων  $(x_0, y_0)$  που ικανοποιεί την εξίσωση,  $F(x_0, y_0) = 0$ . Στην περίπτωση που η  $F$  είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών, ή γενικότερα

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ αναλυτική ως προς 2 μεταβλητές} \\ \text{σε περιοχή του } (0,0) \text{ της μορφής (βλ. υπόμνημα} \\ \text{θεώρημα προπαρασκευής του Weierstrass)} \\ \\ F(z, w) = w^k + a_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + a_0(z) \\ \\ a_j(z) = a_j^{(p_j)}z^{p_j} + a_j^{(p_j+1)}z^{p_j+1} + \dots \\ \\ a_0^{(p_0)} \neq 0 \\ \text{όπου } a_j(z) \text{ αναλυτικές συναρτήσεις} \end{array} \right. \quad (22)$$

είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε όλες τις λύσεις  $w = f(z)$  σε περιοχή του  $(0,0)$ .

**Παρατήρηση 2.1** *Εν γένει ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις και η (21) είναι της μορφής  $F(\varepsilon, y) = 0$  (ή  $F(\lambda, y) = 0$ ) όπου  $\varepsilon, \lambda$  πραγματικές παράμετροι. Ως γνωστόν όμως ακόμα και από την περίπτωση του τριωνύμου, η μιγαδοποίηση του προβλήματος είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος μελέτης των πραγματικών ριζών.*

**Παρατήρηση 2.2** *Το ΘΠΣ ισχύει για  $x, y \in \mathbb{C}$  με αντίστοιχες υποθέσεις και αντίστοιχα συμπεράσματα (η συνθήκη  $F_y \neq 0$  αντικαθίσταται από  $F_w \neq 0$  όπου  $\frac{\partial F}{\partial w}$  η μιγαδική παράγωγος).*

*Εάν η  $F$  έχει περισσότερη ομαλότητα, αντίστοιχη ομαλότητα έχει και η  $f$ . Ειδικά, εάν η  $F$  είναι αναλυτική (δηλαδή της μορφής (22)), τότε η  $f$  είναι επίσης αναλυτική.*

**Παράδειγμα 2.3** *Να μελετηθούν οι λύσεις της*

$$w^2 + a_0^{(1)}z + a_0^{(2)}z^2 = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (23)$$

*σε περιοχή του  $(0,0)$ .*

*Προφανώς,  $(z, w) = (0, 0)$  είναι λύση. Θέτουμε  $w := f(z)$ . Παρατηρούμε ότι για  $|z| \ll 1$ , η (23) είναι κοντά στην*

$$w^2 + a_0^{(1)}z = 0, \quad a_0^{(1)} \neq 0 \quad (24)$$

*που έχει λύσεις*

$$w = \pm \left( -a_0^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Αναζητάμε λοιπόν για την (23) λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) \neq 0 \quad (25)$$

όπου  $v(z)$  συνάρτηση υπό προσδιορισμό.

Αντικατάσταση της (25) στην (23) δίνει

$$v^2 + a_0^{(1)} + a_0^{(3)}z = 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$v_{\pm}(z) = \pm \left( -a_0^{(1)} - a_0^{(3)}z \right)$$

και κατά συνέπεια η

$$w_{\pm}(z) = v_{\pm}(z)z^{\frac{1}{2}}$$

δίνει τις λύσεις της (23).

**Σχόλιο 2.4** Η βασική ιδέα του Παραδείγματος είναι η εισαγωγή της κλίμακας  $z^{\frac{1}{2}}$ . Αναμένουμε ότι οι λύσεις της (21) με  $F$  όπως στην (22), είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει να ισχύει και μάλιστα η κλάση της  $F$  που είναι δυναμοσειρές με κλασματικές δυνάμεις (πεπερασμένο αριθμό αρνητικών) είναι αλγεβρικά κλειστή κάτω από αυτή τη διαδικασία ([W], σελ. 98).

**Παράδειγμα 2.5** Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^3 + a_2^{(1)}zw^2 + a_1^{(3)}z^3w + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad a_i^{(j)} \neq 0 \quad (26)$$

σε περιοχή του  $(0,0)$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Υποκινούμενοι από την (25) αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$w = v(z)z^{\alpha} \quad (27)$$

όπου  $\alpha$  υπό προσδιορισμό. Αντικατάσταση της (27) στην (26) δίνει

$$z^{3\alpha}v^3 + a_2^{(1)}z^{2\alpha+1}v^2 + a_1^{(3)}z^{3+\alpha}v + a_0^{(4)}z^4 = 0, \quad |z| \leq \delta \quad (28)$$

Προφανώς χρειαζόμαστε το  $\alpha$  να είναι τέτοιο ώστε τουλάχιστον δύο όροι να έχουν την ίδια δύναμη ώστε να αλληλοακυρώνονται.

Έχουμε λοιπό τη μέθοδο εξισορρόπησης:

$$(1) 3\alpha = 2\alpha + 1 \quad (4) 2\alpha + 1 = \alpha + 3 \quad (7) 3 + \alpha = 4$$

$$(2) 3\alpha = \alpha + 3 \quad (5) 2\alpha + 1 = \alpha + 3$$

$$(3) 3\alpha = 4 \quad (6) 2\alpha + 1 = 4$$

$H$  (1) δίνει  $\alpha=1$ , με εκθέτες  $(3,3,4,4)$  και η (31) παίρνει τη μορφή

$$z^3 v^3 + a_2^{(1)} z^3 v^2 + a_1^{(3)} z^4 + a_0^{(4)} z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z + a_0^{(4)} z = 0. \quad (29)$$

Τώρα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ :

$H$  (29) για  $z = 0$  δίνει  $v = -a_2^{(1)}$ . Θέτουμε

$$F(z, v) = v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z + a_0^{(4)} z$$

$$F(0, -a_2^{(1)}) = 0$$

$$F_v(0, -a_2^{(1)}) = 3a_2^{(1)2} - 2a_3^{(1)} a_2^{(1)}$$

Υποθέτουμε ότι  $F_u(0, -a_2^{(1)}) \neq 0$ , παίρνουμε  $v_1(z)$  αναλυτική να επιλύει την (32) με  $v_1(0) = -a_2^{(1)}$ .

Εν συνεχεία θεωρούμε την (2) που δίνει  $\alpha = \frac{3}{2}$  και αντίστοιχους εκθέτες  $(\frac{9}{2}, 4, \frac{9}{2}, 4)$  και η (31) παίρνει τη μορφή

$$z^{\frac{9}{2}} v^3 + a_2^{(1)} z^4 v^2 + a_1^{(3)} z^{\frac{9}{2}} v + a_0^{(4)} z^4 = 0,$$

που μετά από απλοποίηση δίνει

$$z^{\frac{1}{2}} v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z^{\frac{1}{2}} v + a_0^{(4)} = 0. \quad (30)$$

Τώρα θα κάνουμε χρήση του ΘΠΣ

Θέτουμε  $s = z^{\frac{1}{2}}$ , οπότε η (30) παίρνει τη μορφή

$$F(s, v) = sv^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} sv + a_0^{(4)} = 0. \quad (31)$$



Για  $s=0$ , η (31) δίνει

$$a_2^{(1)}v^2 + a_0^{(4)} = 0 \Rightarrow v = \pm \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

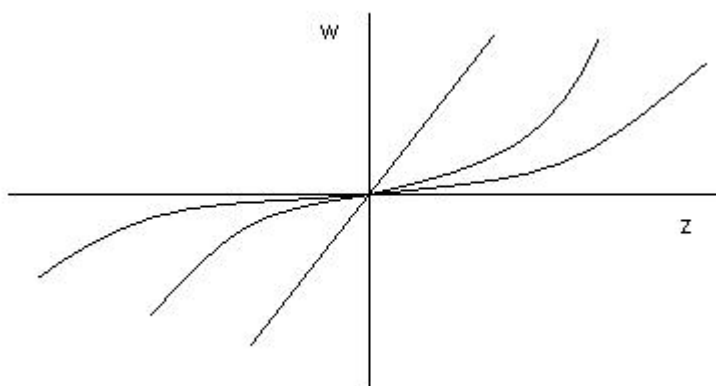
Υποθέτοντας ότι

$$F_v \left( 0, \pm \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \pm 2a_2^{(1)} \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Υποθέτοντας ότι  $F_v \left( 0, \pm \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \neq 0$ , παίρνουμε από ΘΠΣ  $v_{2,3}(s)$  αναλυτικές, να επιλύουν την (31), με  $v_{2,3}(0) = \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Δηλαδή παίρνουμε μέχρι τούδε 3 λύσεις για την (32):

$$\begin{cases} w = v_1(z)z, & v_1(0) = -a_2^{(1)}, \\ w = v_2(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_2(0) = \left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ w = v_3(z^{\frac{1}{2}})z^{\frac{3}{2}}, & v_3(0) = -\left( -\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (32)$$

όπου  $v_i(s)$  αναλυτικές σε μεριοχή του  $s=0$ .



Σχ. 6: Οι λύσεις της (29) σε περιοχή του  $(0,0)$ .

**Άσκηση 2.6** Έστω  $F(x, \lambda) \in C^1$  συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Καλούμε  $\xi$  παράμετρο και  $x$  άγνωστη και θεωρούμε την εξίσωση ως προς  $x$

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (33)$$

Υποθέτουμε ότι  $F(x_0, \lambda_0) = 0$ .

Για κάθε  $\lambda$  (σε περιοχή του  $\lambda_0$ ) έστω  $n(\lambda)$  ο αριθμός των λύσεων της (1) εντός της περιοχής. Καλούμε  $(x_0, \lambda_0)$  σημείο διακλάδωσης αν ο  $n(\lambda)$  αλλάζει καθώς η  $\lambda$  μεταβάλλεται περίξ του  $\lambda_0$ .

Δείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι το  $(x_0, \lambda_0)$  σημείο διακλάδωσης είναι  $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$ .

**Άσκηση 2.7** (i) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της  $F(x, \lambda) = \lambda x - x^3$  και να σχεδιαστεί το σύνολο των λύσεων της  $F(x, \lambda) = 0$  στο  $x$ - $\lambda$  επίπεδο.

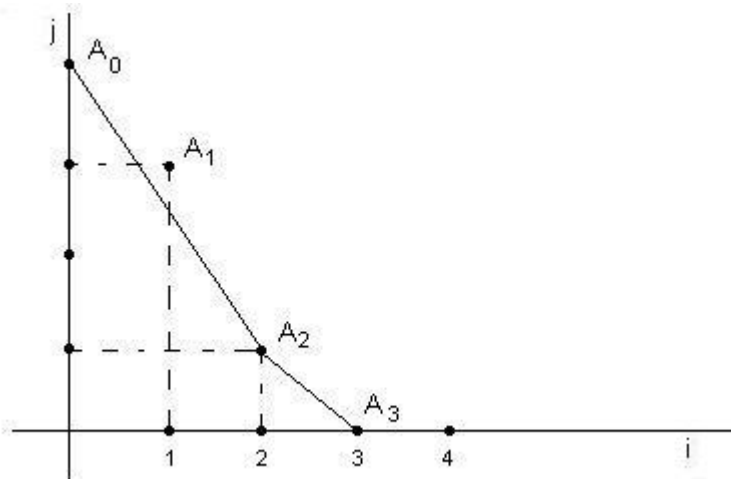
(ii) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της

$$F(y, \lambda) := y^2 + 3y + \lambda = 0$$

και να σχεδιαστεί το σύνολο λύσεων της  $F(y, \lambda) = 0$  στο  $y$ - $\lambda$  επίπεδο.

Το πολύγωνο του Νεύτωνα συστηματοποιεί την επίλυση εξισώσεων όπως της (29) και γεικότερα της (21) για  $F$  όπως στην (22).

Εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(i, j)$   $i, j = 1, 2, \dots$  και θεωρούμε τα σημεία  $A = (i, p_i)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k$  όπου  $p_i$  ο εκθέτης του  $z$  στον πρώτο μη μηδενικό όρο του αναπτύγματος του  $\alpha_i(z)$ .



Σχ. 7: Πολύγωνο Νεύτωνα για το Παράδειγμα 2.  
 Επί παραδείγματι, για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε

$$A_0 = (0, 4), A_1 = (1, 3), A_2 = (2, 1), A_3 = (3, 0) \quad (34)$$

Θεωρούμε τώρα την κυρτή πολυγωνική γραμμή  $L$  που περνάει μέσω κάποιων σημείων  $A_i$  που ενώνει τα  $(0, p_0)$  και  $(k, 0)$  και είναι τέτοια ώστε να έχει όλα τα  $A_i$  ή επί ή από πάνω. Στο σχήμα 7 έχουμε την κυρτή πολυγωνική γραμμή (Πολύγωνο του Νεύτωνα) για το Παράδειγμα 2.

Το Πολύγωνο του Νεύτωνα συνίσταται από τον πεπερασμένο αριθμό ευθύγραμμων τμημάτων  $L_i (= \overline{A_{i-1}A_i})$  αντίστοιχων κλίσεων  $-\alpha_j, j=1, \dots, r$ . Θέτουμε  $n_j = i_j - i_{j-1}$ . Για το Παράδειγμα 2.5 έχουμε τα ευθύγραμμο τμήματα

$$L_1 = \overline{A_0A_2} \quad \text{και} \quad L_2 = \overline{A_2A_3}$$

με κλίσεις

$$-\alpha_1 = \frac{4-1}{0-2} = -\frac{3}{2}, \quad -\alpha_2 = \frac{1-0}{2-3} = -1$$

και

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1$$

Θα αποδείξουμε ότι αντιστοιχούν σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $L_j, n_j$  λύσεις της  $F(z,w)=0$  (βλ. (21), (22)) της μορφής  $z^{a_j}v_{jl}(z)$ ,  $l=1,2,\dots,n_j$  όπου κάθε

$v_{jl}$  είναι αναλυτική συνάρτηση ως προς κάποιο κλασματικό εκθέτη του  $z$  σε περιοχή του  $z=0$ . Από την προφανή σχέση δε  $\sum_{j=1}^r = K$  προκύπτει όπως θα δείξουμε, ότι η διαδικασία αυτή δίνει όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του  $z=0, w=0$ .

Για το Παράδειγμα 2, η μέθοδος προβλέπει 2 λύσεις της μορφής  $z^{3/2}v_{11}(\cdot)$ ,  $z^{3/2}v_{12}(\cdot)$  και 1 λύση της μορφής  $z^{3/2}v_{21}(\cdot)$  που συμφωνεί με την (34).

Εάν τώρα  $-a_j$  κλίση που αντιστοιχεί στο  $L_j = \overline{A_{i_{j-1}}A_{i_j}}$ ,  $A_{i_{j-1}} = (i_{j-1}, p_{i_{j-1}})$ ,  $A_{i_j} = (i_j, p_{i_j})$

Έχουμε ότι

$$p_{i_{j-1}} + a_j i_{j-1} = p_{i_j} + a_j i_j \leq p_j + a_j i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \quad (35)$$

Η σχέση (35) γεωμετρικά αντιστοιχεί στο ότι τα  $A_{i_{j-1}}$  ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα  $L_j$  που κείται επί της ευθείας η οποία ευρίσκεται κάτω από τα άλλα σημεία  $A_i$ . Η σχέση (35) αλγεβρικά είναι αναμενόμενη και προκύπτει από την απαίτηση ότι η  $F(z,w)=0$  έχει λύση της μορφής  $w = z^{a_j}v(\cdot)$ , διότι σε τέτοια περίπτωση η αντικατάσταση της  $w$  στην  $F(z,w)$  θα πρέπει να δώσει τουλάχιστον όρους που έχουν την ίδια δύναμη ως προς  $z$  ώστε να αλληλοαναιρούνται. Η (35) εκφράζει την ισότητα των δύο χαμηλότερων (εκθέτικα) όρων.

Αντικαθιστώντας την

$$w = z^{a_j}v(\cdot) \quad (36)$$

στην εξίσωση (21) με τις υποθέσεις (22) και μετά από απλοποίηση που προκύπτει διαιρώντας την εξίσωση με  $w = z^{p_{i_j} + a_j i_j}$  (χρήση της ανισότητας στην (35)) έχουμε

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{i_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} v^{i_{j-1}} + g_{i_j}(z, w) = 0 \quad (37)$$

Όπου  $g_{i_j}(z, w)$  είναι αναλυτική ως προς  $v$  και ως προς κάποια κλασματική δύναμη του  $z$ , κοντά στο  $(0,0)$ ,  $g_{i_j}(0, v) = 0$ .

Θέτοντας  $z=0$  στην (37) παίρνουμε

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{n_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} = 0 \quad (38)$$

διότι  $n_j = i_j - i_{j-1}$ . Αυτή η εξίσωση έχει  $n_j$  διακεκριμένες λύσεις. Μέσω του Θεωρήματος 1 (βλ. παρατήρηση σ. 13) προκύπτει ότι η (39) έχει ισάριθμες λύσεις  $v = v(z^\sigma)$ , όπου  $\sigma$  κλασματικός εκθέτης και  $v$  αναλυτική συνάρτηση. Κατά συνέπεια, η (21) έχει  $n_j$  λύσεις αυτής της μορφής. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε όλες τις λύσεις της (21) σε περιοχή του  $(0,0)$ .

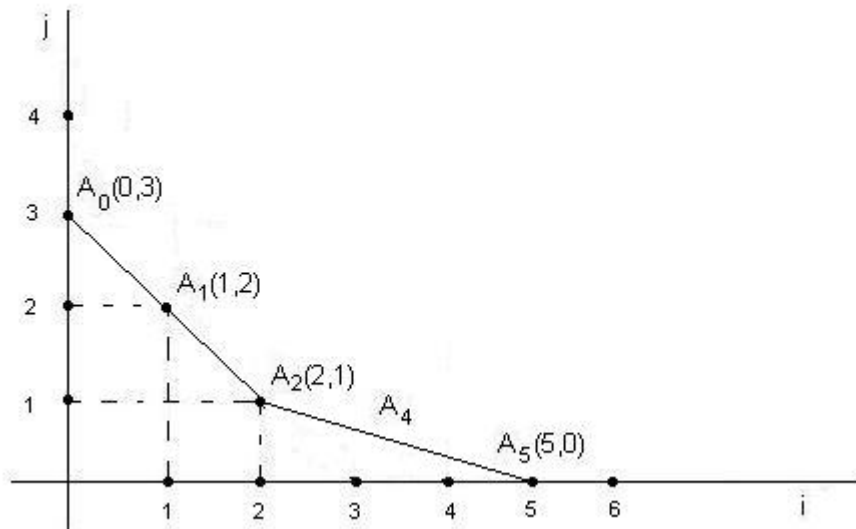
Στην περίπτωση που στην (37) περισσότεροι των δύο αριθμοί  $p_j + a_j j$  είναι ίσοι τότε η αντίστοιχη (38) εμπλέκει περισσότερες δυνάμεις του  $v$  με ενδεχομένως πολλαπλές ρίζες. Το παρακάτω παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό και βοηθάει στην κατανόηση αυτής της περίπτωσης.

**Παράδειγμα 2.8** Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^5 + 2zw^4 - zw^2 - 2z^2w - z^4 - z^3 = 0 \tag{39}$$

σε περιοχή του  $(0,0)$ .

Ξεκινάμε με την κατασκευή του πολυγώνου του Νεύτωνα:



$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = (0, 3), \quad A_1 = (1, 2), \quad A_2 = (2, 1), \quad A_3 = \alpha\pi\omega\nu \\ A_4 = (4, 1), \quad A_5 = (5, 0) \\ L_1 = \overline{A_0A_2}, \quad L_2 = \overline{A_2A_5} \\ a_1 = \frac{3-1}{0-2} = -1, \quad a_2 = \frac{1-0}{2-5} = -\frac{1}{3} \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 3 \end{array} \right. \quad (40)$$

Κατά συνέπεια αναμένουμε

3 λύσεις της μορφής  $z^{\frac{1}{3}}v_k(z^{\sigma_1})$

2 λύσεις της μορφής  $zv_l(z^{\sigma_2})$

$v_k, v_l$  αναλυτικές συναρτήσεις,  $\sigma_1, \sigma_2$  κλασματικοί (εν γένει) εκθέτες.

Ξεκινάμε με τη λύση της μορφής  $z^{\frac{1}{3}}v$ . Αντικατάσταση στην (39) δίνει

$$(z^{\frac{1}{3}}v)^5 + 2z(z^{\frac{1}{3}}v)^4 - z(z^{\frac{1}{3}}v)^2 - 2z^2(z^{\frac{1}{3}}v) - z^4 - z^3 = 0 \quad (41)$$

1ος και 3ος όρος ισορροπούν,  $z^{\frac{5}{3}}$ , ενώ οι υπόλοιποι είναι υψηλότερης τάξης. Διαιρούμε με  $z^{\frac{5}{3}}$  και παίρνουμε

$$v^5 + 2z^{\frac{2}{3}}v^4 - v^2 - 2z^{\frac{2}{3}}v - z^{\frac{4}{3}} - z^{\frac{7}{3}} = 0 \quad (42)$$

Θέτουμε

$$F(x, v) = v^5 + 2x^2v^4 - v^2 - 2x^2v - x^4 - x^7$$

$$F(x, v_*) = v_*^5 - v_*^2 = v_*^2(v_*^3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow v_* \text{ κυβική ρίζα της μονάδας} = \{e^{\frac{2\pi ki}{3}}, k = 0, 1, 2\}$$

Από εδώ προκύπτει εύκολα ότι έχουμε 3 λύσεις

$$w = z^{\frac{1}{3}}v_k(z^{\frac{1}{3}}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{Άσκηση 5}) \quad (43)$$

Στην συνέχεια εξετάζουμε λύσεις της μορφής  $zv$ .

**Άσκηση 2.9** Δείξτε πως προκύπτει η (43).

**Άσκηση 2.10** (i) Αντικαταστήσετε την  $zv$  στην (41). Πόσοι όροι εξισορροπούν (χαμηλότερης τάξης);

(ii) Μετά από απλοποίηση δείξτε ότι η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$(*) \quad F(z, v) = z^2v^5 + 2z^2v^4 - v^2 - 2v - z - 1 = 0,$$

$$F(0, v_*) = (1 + v_*)^2 = 0.$$

Εφόσον η  $v_*$  είναι διπλή ρίζα δεν εφαρμόζεται στο το  $\Theta\Pi\Sigma$

(iii) Θέσατε  $\bar{v} = v+1$  και γράψτε την (\*) ως προς τη μεταβλητή  $\bar{v}$ . Αναζητείστε λύσεις κοντά στο  $\bar{v} = 0, z = 0$  εφαρμόζοντας το πολύγωνο του Νεύτωνα. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 λύσεις της μορφής  $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$ .

**Άσκηση 2.11** Να μελετηθούν οι λύσεις της

$$w^7 - 3zw^5 + 3zw^3 - z^3w + z^4 = 0$$

σε περιοχή του  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 2.12** Να μελετηθεί η εξίσωση στην άσκηση (2.3) του Logan σ. 65 με τη μέθοδο του Νεύτωνα (Προσοχή: πραγματικές ρίζες).

**Άσκηση 2.13** Να μελετηθεί η άσκηση (2.1) του Logan, σ. 65.

**Άσκηση 2.14** Θεωρήστε την εξίσωση  $\epsilon x^5 - \epsilon x^4 - x^3 + 8 = 0, 0 < \epsilon \ll 1$ .

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών και μιγαδικών), φραγμένων και μη, όπως το  $\epsilon \rightarrow 0$ .

(ii) Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την θετική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι δύο πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων.

### Λύσεις ασκήσεων 1.4, 1.5, 2.6, 2.7

1)  $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$

Μορφή συστήματος

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon x_1^3 \end{cases}$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = -\varepsilon x_1^3$$

$$F(A) = - \int_0^{2\pi} A^2 \sin^3(t - t_0) dt \equiv 0$$

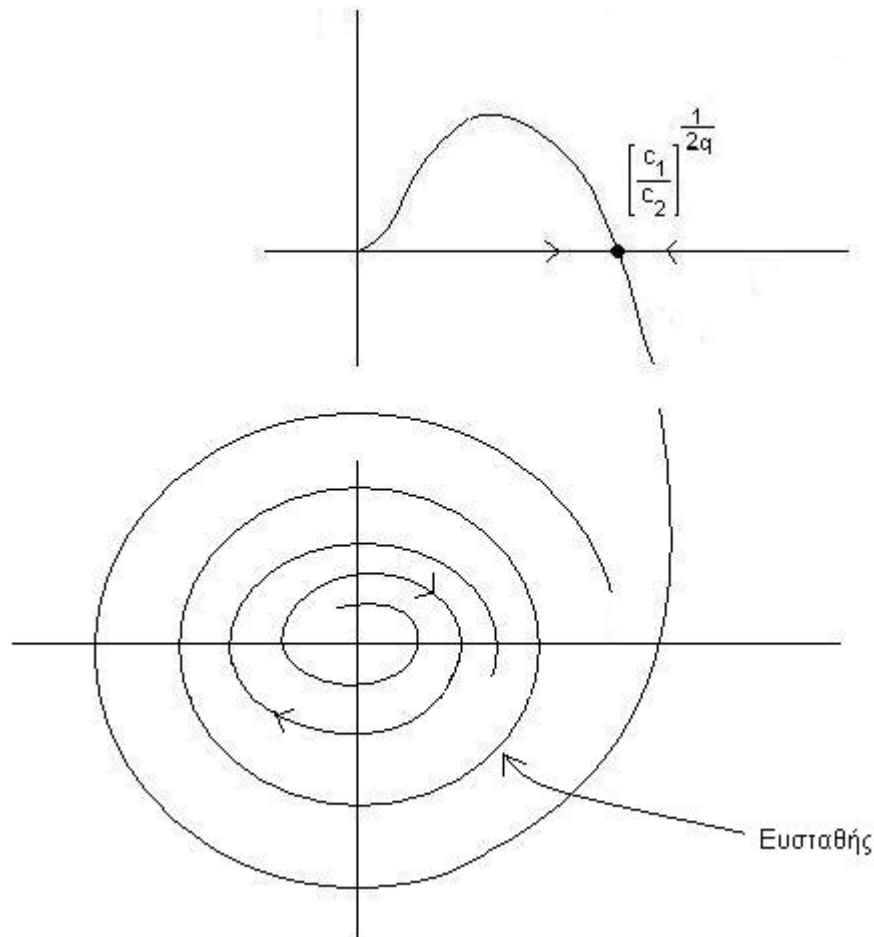
Ουδεμία πληροφορία παρέχεται από τη μέθοδο.

$$2) \ddot{x} = -x + \varepsilon |\dot{x}|^p \dot{x} (1 - x^{2q})$$

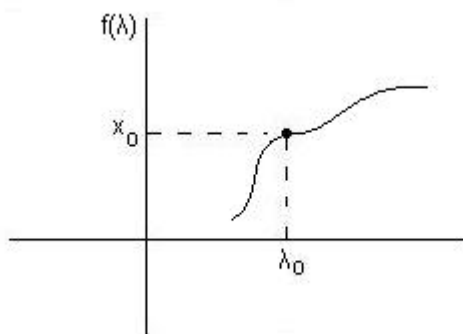
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ -x_1 + \varepsilon |x_2|^p x_2 (1 - x_1^{2q}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(A) &= A^{p+1} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) dt - A^{2q} \int_0^{2\pi} \sin^p(t - t_0) \cos^{2q}(t - t_0) dt \right\} = \\ &= A^{p+1} \{C_1 - C_2 A^{2q}\} \end{aligned}$$





3) Έστω  $F_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$ . Από το ΘΠΣ έπεται ότι υπάρχει  $x=f(\lambda)$ ,  $x_0 = f(\lambda_0)$  ορισμένη σε περιοχή  $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$  τέτοια ώστε όλες οι λύσεις της (1) σε περιοχή του  $(x_0, \lambda_0)$  ευρίσκονται στο  $\{(f(\lambda), \lambda)/\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)\}$ . Κατά συνέπεια,  $n(\lambda)=1$  σε αυτή την περιοχή του  $(x_0, \lambda_0)$ .



4) Από την Ασκ. 3 προκύπτει ότι τα σημεία διακλάδωσης δίδονται από τις εξισώσεις

$$F(x, \lambda) = 0$$

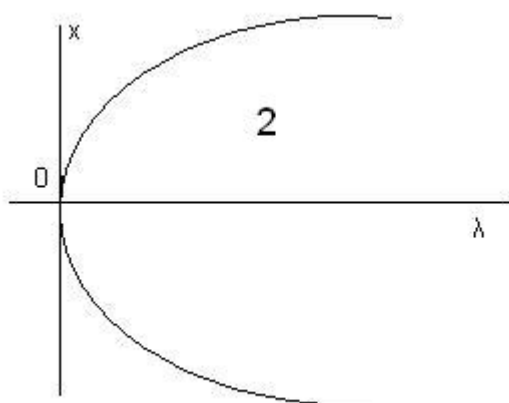
$$F_x(x, \lambda) = 0$$

Κατά συνέπεια

$$\lambda x^3 - x^3 = 0$$

$$\lambda - 3x^2 = 0$$

Από όπου προκύπτει ότι  $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$  είναι το μοναδικό (ενδεχομένως) σημείο διακλάδωσης.



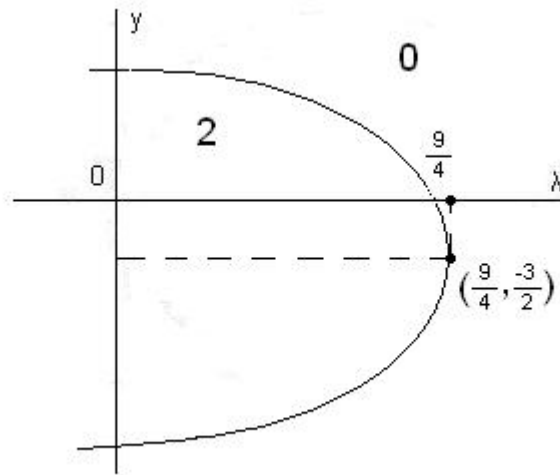
Σχ. 11: Το σύνολο λύσεων  $\lambda x^3 - x^3 = 0$ .

Από το γράφημα (Σχ. 11) βλέπουμε ότι το  $(0,0)$  είναι σημείο διακλάδωσης.

(ii)

$$F(y, \lambda) = y^2 + 3y + \lambda = 0$$

$$F_y(y, \lambda) = 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{9}{4}$$



Σχ. 12:  $y^2 + 3y + \lambda = 0$

### 3 Σύνηθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Από την προηγούμενη μελέτη μας των αλγεβρικών εξισώσεων αποκομίσαμε ότι το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων εν γένει δεν επαρκεί για την κατασκευή όλων των λύσεων σε κάποια περιοχή δοθείσας λύσης. Εισαγάγαμε το πολύγωνο του Νεύτωνα, που είναι κατάλληλο εργαλείο στην περίπτωση που το ΘΠΣ δεν είναι εφαρμόσιμο, το οποίο υποδεικνύει λύσεις διαφορετικών κλιμάκων. Με λίγα λόγια, όταν η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 1.1 δεν ισχύει τότε εν γένει έχουμε λύσεις διαφορετικών κλιμάκων.

Στην περίπτωση των Σ.Δ.Ε. έχουμε ένα ανάλογο φαινόμενο με την επιπλέον διαφορά ότι στην ίδια λύση (που είναι πλέον συνάρτηση), μπορεί να συνυπάρχουν διαφορετικές κλίμακες.

### 3.1 Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - η ομαλή περίπτωση

#### Παράδειγμα 3.1

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (44)$$

Το Π.Α.Τ. (44) επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή γιατί η εξίσωση είναι τύπου Bernoulli.

Έχουμε

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon(e^{-t} - 1)} \quad (45)$$

Η (45) γράφεται επίσης σαν ανάπτυγμα Taylor περί το  $\varepsilon=1$  ως εξής

$$y(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

Προσποιούμενοι τώρα ότι δεν γνωρίζουμε την λύση (??) θα αποπειραθούμε να τη βρούμε σε μορφή ανάπτυγματος σε περιοχή του  $\varepsilon=0$ .

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (46)$$

Προσδιορίζοντας διαδοχικά  $y_0(t)$ ,  $y_1(t)$ , ...

Αντικαθιστώντας την (46) στην (44) έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = \dot{y}_0(t) + \varepsilon \dot{y}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{y}_2(t) + \dots = -(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots) + \\ + \varepsilon (y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίδιων δυνάμεων του  $\varepsilon$  στα δυο μέλη παίρνουμε την ακολουθία γραμμικών εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_0 + y_0 = 0 \\ \dot{y}_1 + y_1 = y_0^2 \\ \dot{y}_2 + y_2 = 2y_0 y_1 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (48)$$

Αξιοσημείωτα είναι:

(α) Η (46)  $\Leftrightarrow$  Άπειρο σύστημα εξισώσεων

(β) Οι εξισώσεις είναι γραμμικές και το σύστημα μπορεί να λυθεί λύνοντας διαδοχικά τις εξισώσεις (Τριγωνική μορφή).

Για την αρχική συνθήκη εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία:

$$1 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots \quad (49)$$

Από όπου παίρνουμε

$$y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \dots \quad (50)$$

Επιλύοντας τώρα το σύστημα (48), (50)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = e^{-t} \\ y_1 = e^{-t} - e^{-2t} \\ y_2 = e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (51)$$

Ουδόλως περιέργως κατασκευάζουμε ξανά το ανάπτυγμα (45).

Παρατηρούμε ότι :

Εάν κρατήσουμε έναν αριθμό  $n$  όρων από την (49) παίρνουμε μια ομοιόμορφη προσέγγιση  $O(\varepsilon^{n+1})$  της λύσης

Πχ

$$(*) \quad y_{\text{προσ}}(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t})$$

$$|y_{\text{ακρ}} - y_{\text{προσ}}| < C \varepsilon^2, \quad \text{ομοιομορφα για } t > 0.$$

Η ομοιομορφία προκύπτει από το ότι οι όροι της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένοι για  $t > 0$  και διότι η σειρά συγκλίνει.

**Σχόλιο 3.2** Στην περίπτωση του Παραδείγματος 1 η ασυμπτωτική σειρά συγκλίνει, και η προσέγγιση ισχύει ομοιόμορφα. Όπως θα δούμε όταν το πρόβλημα δεν είναι ομαλό (δηλ. απλή εφαρμογή αντίστοιχου  $\Theta\Pi\Sigma$  σε χώρο Banach) η ασυμπτωτική σειρά δεν θα συγκλίνει κατ' ανάγκη και η προσέγγιση δεν θα είναι αναγκαστικά ομοιόμορφη. Παρόλα αυτά η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων (που είναι ανάλογη της μεθόδου σειρών στις Σ.Δ.Ε.) κατάλληλα τροποποιημένη δίνει χρήσιμη πληροφορία και σε αυτές τις ιδιόμορφες περιπτώσεις.

**Άσκηση 3.3** Δείξτε αυστηρά την εκτίμηση  $|y_{\text{ακρ}}(t) - y_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^2$ , ομοιόμορφα για  $t \in [\delta, \infty)$ ,  $\delta > 0$ .

**Παράδειγμα 3.4** θεωρούμε την εξίσωση Duffing

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (52)$$

Αναζητούμε τη λύση για  $\varepsilon \ll 1$  στη μορφή ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + \varepsilon(u_0^3 + 3u_0^2 \varepsilon u_1 + \dots) = 0$$

Και κατά συνέπεια εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε

$$\varepsilon^0 : \quad +\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0$$

$$\varepsilon^1 : \quad +\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad \dot{u}_1(0) = 0$$

$$\varepsilon^2 : \quad +\ddot{u}_2 + u_2 + 3u_0^2 u_1 = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad \dot{u}_2(0) = 0$$

⋮

Επιλύοντας διαδοχικά τις εξισώσεις έχουμε

$$u_0(t) = \cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 = -\cos^3 t \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \cos t \quad (53)$$

⋮

**Παρατήρηση 3.5** Η εξίσωση (53) επιλύεται με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών [AK]. Παρατηρήστε ότι

$$\cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}$$

και ότι ο όρος  $\cos t$  είναι επίσης λύση της ομοιογενούς εξίσωσης. Αυτό οδηγεί στον όρο  $t \sin t$ . Εδώ έχουμε συντονισμό που οδηγεί σε δυσκολίες ουσίας.

Η

$$(**) \quad u_{\text{προσ}}(t) = \cos t + \varepsilon \left( \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8}t \sin t \right)$$

θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχεί με την (\*) του προηγούμενου παραδείγματος και συνεπώς αναμένουμε την εκτίμηση

$$|u_{\text{ακρ}} - u_{\text{προσ}}| < \varepsilon^2 C \quad (54)$$

Έυκολα όμως παρατηρούμε ότι η εκτίμηση (54) δεν είναι δυνατόν να ισχύει ομοιόμορφα για  $t > 0$  διότι η  $u_{\text{προσ}}$  δεν είναι φραγμένη, ενώ αντίθετα η  $u_{\text{ακρ}}$  είναι (βλ. επιχείρημα ενέργειας (57), (58)).

Επίσης η  $u_{\text{προσ}}$  είναι ανεπαρκής ποιοτικά διότι δεν είναι περιοδική συνάρτηση του  $t$  και αυτό οδηγεί στο (λανθασμένο) συμπέρασμα ενδεχομένως ότι η διαταραχή στην (52) με τον  $\varepsilon$  όρο καταστρέφει την περιοδικότητα των λύσεων του προβλήματος αναφοράς  $\ddot{u} + u = 0$  ( $\varepsilon = 0$ ).

Υπόδειξη Ασκ. 1.6

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2) \quad (*)$$

Επιλέγουμε  $f(\dot{x}) = \dot{x}g(\dot{x})$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 g(x_2)(1 - x_1^2)$$

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon x_2^2 g(x_2)(1 - x_1^2), \quad x_1 = A \cos t, \quad x_2 = A \sin t$$

$$F(A) = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 g(A \sin t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt$$

Έστω  $g(x_1) = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1^4$ ,  $a_0, a_1, a_2$  θα επιλεγούν στην πορεία.

$$F(A) = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 (a_0 + a_1 A^2 \sin^2 + a_2 A^4 \sin^4 t)(1 - A^2 \cos^2 t) dt$$

$$= A^2 \int_0^{2\pi} \sin 62t \{ a_0 + A^2 (a_1 \sin^2 t - a_0 \cos^2 t) + A^4 (a_2 - a_1 \sin^2 t \cos^2 t)$$

$$+ A^6 (-a_2 \sin^4 t \cos^2 t) \} dt$$

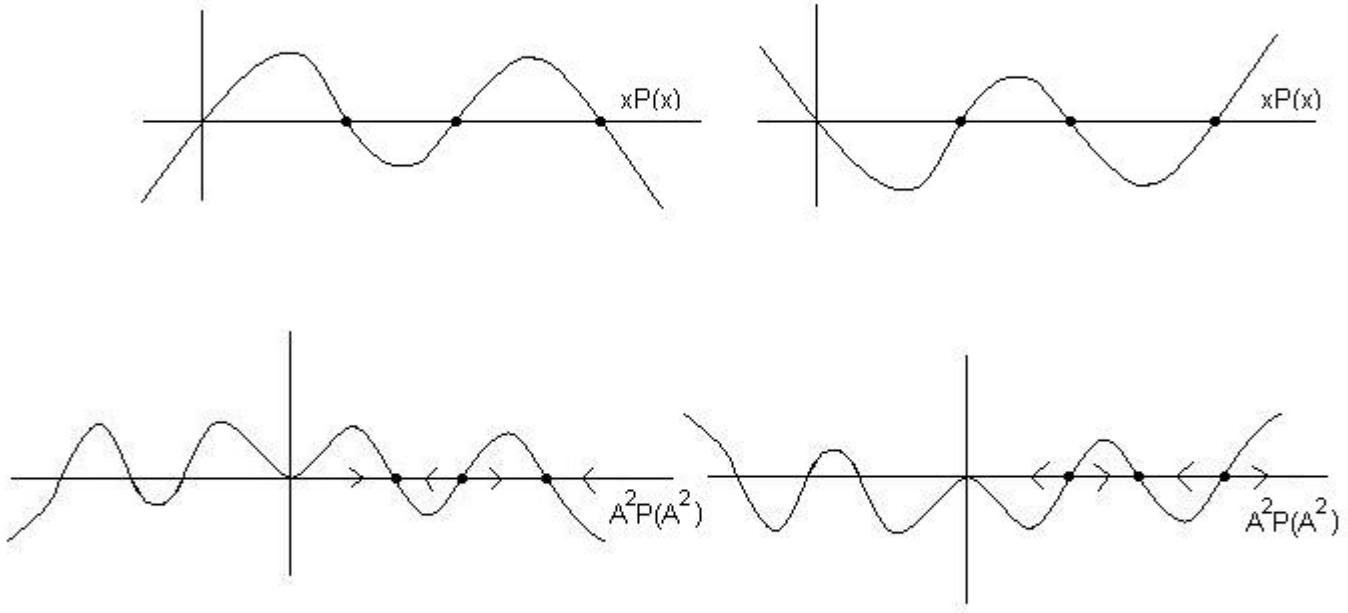
$$= A^2 [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 A^2 + \bar{a}_2 A^4 + \bar{a}_3 A^6] = A^2 P(A^2), \quad \text{οπου}$$

(α) Υπολογίστε τα  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_3$  συναρτήσεσι των  $a_0, a_1, a_2$ .

(β) Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα  $a_0, a_1, a_2$  έτσι ώστε η (\*) να έχει ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις.

(γ) Διερευνήστε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.





**Άσκηση 3.6** Να λυθεί η άσκηση 2.1 στο βιβλίο του Logan.

**Λύση άσκησης 2.10**

$$(*) F(z, u) = z^2u^5 + 2z^2u^4 - (u + 1)^2 - z = 0$$

$$F(0, u_*) = -(u_* + 1)^2 = 0 \Rightarrow u_* = 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται.

Μεταφορά των αξόνων μέσω του μετασχηματισμού  $\bar{v} := v + 1$  δίνει

$$(**) z^2(\bar{v} - 1)^5 + 2z^2(\bar{v} - 1)^4 - \bar{v}^2 - z = 0$$

Αναζήτηση λύσεων σε περιοχή του  $\bar{v} = 0, z = 0$ . Παρατηρούμε ότι τα αναπτύγματα

$$(\bar{v} - 1)^5 = \bar{v}^5 + \dots + 5\bar{v} - 1$$

$$(\bar{v} - 1)^4 = \bar{v}^4 + \dots - 4\bar{v} + 1$$

οι μόνοι όροι που έχουν σημασία είναι οι δύο τελευταίοι (διότι οι άλλοι είναι αμελητέοι σε σχέση με το  $\bar{v}^2$ ). Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο εξής βοηθητικό πρόβλημα:

**Βοηθητικό Πρόβλημα**

$$(***) \quad z^2(5\bar{v} - 1) + 2z^2(-4\bar{v} + 1) - \bar{v}^2 - z = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\bar{v}^2 + 3\bar{v}z^2 - z^2 + z = 0$$

που επιδέχεται μεταχείριση μέσω του πολυγώνου του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1) \quad A_1 = (1, 2) \quad A_2 = (2, 0)$$

Συμπεραίνουμε ότι η (\*\*\*) έχει 2 λύσεις της μορφής  $z^{\frac{1}{2}}g$ .

Τώρα επανερχόμαστε στο (\*\*). Το βοηθητικό πρόβλημα μας οδηγεί στο μετασχηματισμό  $(z, \bar{v}) \mapsto (z, g)$ , όπου  $\bar{v} = z^{\frac{1}{2}}g$ . Η (\*\*) μετασχηματίζεται στην

$$z^2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2 - z = 0,$$

και απλοποιώντας ( $\Leftrightarrow$  θεραπεία της πολλαπλότητας 2 του  $v_* = 1$ ) έχουμε

$$R(z, g) := z(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^5 + 2(z^{\frac{1}{2}}g - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το ΘΠΣ: θέτουμε  $z^{\frac{1}{2}} =: s$ . Τότε

$$\bar{R}(s, g) := s^2(sg - 1)^5 + 2(sg - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

$$\bar{R}(0, g_*) := -g_*^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_* = \pm 1.$$

$$\frac{\partial \bar{R}(0, g_*)}{\partial g} = -2g_* \neq 0$$

Κατά συνέπεια η  $R(z, g) = 0$  έχει 2 λύσεις της μορφής  $g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$  με  $g_{\pm}(0) = \pm 1$ .

Καταλήγουμε ότι  $\bar{v}_{\mp} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow u_{\pm} = z^{\frac{1}{2}}g_{\pm}(z^{\frac{1}{2}}) - 1$ . □

**Λύση άσκησης 2.15**

(i) Να βρεθούν οι πρωτεύοντες όροι όλων των ριζών (πραγματικών, μιγαδικών, φραγμένων και μη) όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A. Φραγμένες Ρίζες

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0$$

$$F(0, x) = -(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x_k = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=x_k} = -2x_k \neq 0$$

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει 3 ρίζες  $x_k(\varepsilon)$ ,  $k=0,1,2$  με  $x_k(0) = 2e^{\frac{2\pi ki}{3}}$ .

Χρειαζόμαστε άλλες 2 ρίζες (5ου βαθμού).

B. Μη Φραγμένες Ρίζες

Εισάγουμε το μετασχηματισμό  $x =: \frac{1}{w}$ . Η (\*) παίρνει τη μορφή

$$(**) \quad 8w^5 - w^2 - \varepsilon w + \varepsilon = 0.$$

Εφαρμόζουμε το πολύγωνο του Νεύτωνα:

$$A_0 = (0, 1), \quad A_1 = (1, 1), \quad A_2 = (2, 0), \quad A_5 = (5, 0)$$

Έχουμε 2 λύσεις  $w = z^{\frac{1}{2}}v$ , 3 λύσεις  $w = z^0v$  ( $z = \varepsilon$ ). Αγνοούμε τις 3 λύσεις (διότι συμπίπτουν με τις φραγμένες). Άρα έχουμε

$$8z^{\frac{5}{2}}v^5 - zv^2 - z^{\frac{3}{2}}v = z = 0 \Rightarrow 1 - z^{\frac{1}{2}}v - v^2 + 8z^{\frac{3}{2}}v^5 = 0$$

$$F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$$

$$F(0, v) = 1 - v^2 \Rightarrow v = \pm 1.$$

$$\Theta\Pi\Sigma \Rightarrow w_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}v_{mp}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots].$$

Κατά συνέπεια οι 2 μη φραγμένες ρίζες είναι

$$x_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon[\pm 1 + \dots]} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}[\pm 1 + \dots]$$

Για την πραγματική φραγμένη ρίζα και την αρνητική μη φραγμένη ρίζα να προσδιοριστούν οι 2 πρώτοι όροι των αντίστοιχων αναπτυγμάτων

$$A. \varepsilon x^5(\varepsilon) - \varepsilon x^4(\varepsilon) = (x(\varepsilon))^2 - 8$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^5(\varepsilon) + 5\varepsilon x^4(\varepsilon)x'(\varepsilon) - x^4(\varepsilon) - 4\varepsilon x^3(\varepsilon)x'(\varepsilon) &= \\ &= 3x^2(\varepsilon)x'(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{Για } \varepsilon=0: x^5(0) - x^4(0) = 3x^2(0)x'(0) \quad \Leftrightarrow$$

$$x^3(0) - x^2(0) = 3x'(0)$$

$$\Rightarrow x'(0) = \frac{4}{3} \quad (\text{αφού } x(0) = 2)$$

Κατά συνέπεια,

$$x_0(\varepsilon) = 2 + \frac{4}{3}\varepsilon + \dots$$

B.  $F(s, v) = 1 - sv - v^2 + 8s^3v^5 = 0$ , όπου  $v = v(s)$ . Διαφορίζοντας ως προς  $s$  έχουμε

$$v'(0) = -\frac{F_s(0, u(0))}{F_v(0, v(0))}$$

Κάνοντας χρήση του  $v(0) = +1$  βρίσκουμε  $v'(0) = -\frac{1}{2}$ .

$$\Rightarrow v(s) = 1 - \frac{1}{2}s + \dots \quad \Leftrightarrow$$

$$v(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots \quad \Leftrightarrow \quad w(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(\varepsilon) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} [1 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots] \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

□

Υποδείξεις Ασκ. 2.14

Οι ασκήσεις αυτές δεν είναι της μορφής (22),  $F(z,w)=0$ , όπου  $z=\varepsilon$ ,  $w=x$ , και κατά συνέπεια η θεωρία δεν εφαρμόζεται άμεσα. Όπως θα δούμε όμως ανάγονται<sup>1</sup> εύκολα στην (22). Για παράδειγμα, θεωρείστε την

$$F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Θέτοντας  $\varepsilon=0$  έχουμε το πρόβλημα αναφοράς

$$F(0, x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$F_x(0, -\frac{1}{2}) = -1 \neq 0$$

Το ΘΠΣ δίνει  $x_1(\varepsilon)$  λύση,  $x_1(0) = -1$ . Επίσης εγγυάται ότι όλες οι λύσεις με  $\varepsilon x^2 \ll 1$  καλύπτονται από την  $x_1(\varepsilon)$ . Ενδεχομένως υπάρχουν και άλλες λύσεις με  $\varepsilon x^2$  όχι μικρό. Για να τις μελετήσουμε ένας τρόπος είναι να αλλάξουμε μεταβλητές  $x = \varepsilon^{-\sigma} y$  ( $\varepsilon x^2$  όχι μικρό συνεπάγεται  $x$  μεγάλο όπως  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Αντικατάσταση δίνει

$$\varepsilon^{1-2\sigma} y^2 + 2\varepsilon^{-\sigma} y + 1 = 0$$

Εξισορρόπηση συνεπάγεται  $1 - 2\sigma = -\sigma \Leftrightarrow \sigma = 1$ . Κατά συνέπεια

$$\varepsilon^{-1} y^2 + 2\varepsilon^{-1} y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + \varepsilon = 0$$

που είναι της μορφής που εξετάσαμε:

$$G(\varepsilon, y) = y^2 + 2y + \varepsilon = 0$$

$$G(0, y) = y^2 + 2y = y(y + 2) = 0 \Rightarrow y = 0, y = -2$$

$$G_y(\varepsilon, y) = 2y + 2, \quad G_y(0, 0) = 2, \quad G_y(0, -2) = -2$$

---

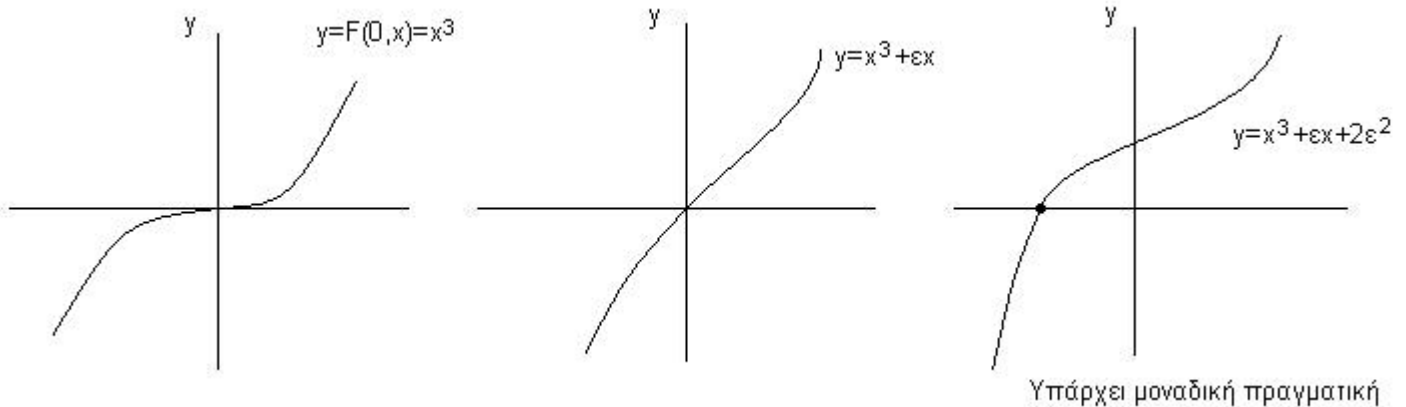
<sup>1</sup>Υπάρχουν 2 ειδών λύσεις: (I) φραγμένες όπως  $\varepsilon \rightarrow 0$  (II) μη φραγμένες όπως  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Τις (I) τις μελετάμε με το ΘΠΣ Τις (II) μέσω του μετασχηματισμού  $x = \frac{1}{w}$  ( $x \approx \infty \Leftrightarrow w \approx 0$ ) που τις αναγάγει στην μορφή (22) όπου εφαρμόζεται το πολύγωνο του Νεύτωνα.

Το ΘΠΣ εφαρμόζεται και δίνει ακόμα 2 λύσεις  $y_2(\varepsilon)$ ,  $y_3(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon)$ ,  $x_3(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}y_3(\varepsilon)$

**Λύση Άσκησης 2.12**

(a) Στοιχειώσης λύση

$$F(\varepsilon, x) = x^3 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$



$$x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots$$

$$(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots)^3 + \varepsilon(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots) + 2\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon^0 \text{ όροι: } x_0^3 = 0$$

$$\varepsilon^1 \text{ όροι: } 3x_0^2x_1 + x_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ (ουδενμία πληροφορία),}$$

$$\varepsilon^2 \text{ όροι: } x_0(\dots) + x_1 + 2 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\varepsilon^3 \text{ όροι: } x_1^3 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$$

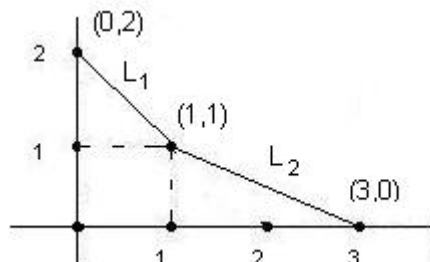
$$x(\varepsilon) = -2\varepsilon + 8\varepsilon^2 + \dots$$

(b) Το πολύγωνο του Νεύτωνα (που θα μας δώσει και τις μιγαδικές)

$$F(z, w) = w^3 + zw + 2z^2 = 0$$

$$F(0, w) = w^3 = 0 \Rightarrow w = 0$$

$F_w(0,0) = 0$ ; Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εφαρμόζεται. Καταφεύγουμε στο Π.Ν.:



$$(0,2), (1,1), (3,0), a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

1 λύση για  $zv(z^{\sigma_1})$ , λύσεις  $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$

α) Αντικατάσταση  $w = zv(z^{\sigma_1})$  δίνει

$$z^3v^3 + zv + 2z^2 = 0, \quad F(z, v) = z^3v^3 + zv + 2z^2$$

$F(0,0) = 0, \quad F_v(0,0) = 1$ . Το ΘΠΣ δίνει  $v(z) = -2z + \dots$  ( $\sigma_1 = 1$ )

β) Εκ νέου αντικατάσταση της  $z^{\frac{1}{2}}v(z^{\sigma_2})$  δίνει  $v^3 + v + 2z^{\frac{1}{2}} = 0$ . Θέτουμε  $s = z^{\frac{1}{2}}$ .

$$F(s, v) = v^3 + v + 2s = 0$$

$$F(0, v) = v^3 + v = v(v^2 + 1) = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ (τροτακαινοριο)}$$

$v = \pm i$ .  $F_v(0, \pm i) = -2 \neq 0$ . Κατά συνέπεια το ΘΠΣ δίνει δύο λύσεις  $v^\pm(s) = \pm i - 2s + \dots$ , και σε αρχικές μεταβλητές  $w^\pm(z) = z^{\frac{1}{2}}v(z^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}}(\pm i - 2z^{\frac{1}{2}} + \dots)$

$$(\sigma_2 = \frac{1}{2})$$

Σημείωση (Υπολογισμός διαδοχικών παραγώγων μέσω ΘΠΣ)

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow F_x + F_y f'(x) = 0 \Rightarrow F_x(0,0) + F_y(0,0) f'(0) = 0$$

Για β' παράγωγο διαφορίζουμε:

$$\frac{d}{dx}(F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_{xx} + F_{yy}f'(x) + F_{xy}f'(x) + F_{yy}(f'(x))^2 + F_y f''(x) = 0 ,$$

από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε την  $f''(0)$ , κλπ.

### 3.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων Poincare - Linstedt (Ιδιόμορφη διαταραχή)

#### Παράδειγμα 3.3 (Συνέχεια)

Όπως είδαμε στην άσκηση 1.4 η μέθοδος του Θ.2 για την εξίσωση Duffing οδηγεί σε εκφυλισμένη μορφή  $F(A) \equiv 0$ . Αυτό ενδεχομένως να οδηγεί στη σκέψη ότι (σε αντίθεση με την Van der Pol) όλες οι περιοδικές τροχιές του προβλήματος αναφοράς  $\ddot{u} + u = 0$  επιβιώνουν κάτω από τη διαταραχή της εξίσωσης με τον  $\varepsilon u^3$  όρο. Αυτό τελικά είναι σωστό και αποδεικνύεται με το ακόλουθο επιχειρήμα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (βλ. [AK], σελ. 60):

Η ποσότητα

$$H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{4}u^4 \quad (\text{Χαμιλτονιανη})$$

διατηρείται από την εξίσωση στην (52):

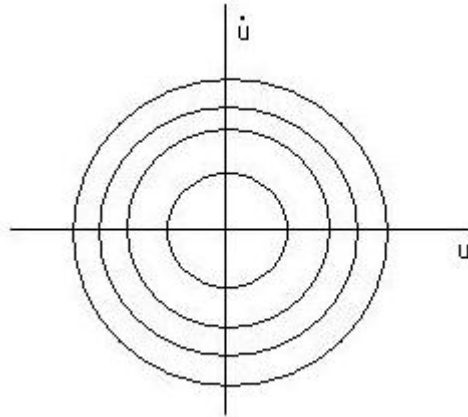
$$\frac{d}{dt}[H(u, \dot{u})] = \dot{u}\ddot{u} + u\dot{u} + \varepsilon u^3\dot{u} = \dot{u}[\ddot{u} + u + \varepsilon u^3] \stackrel{(52)}{=} 0 \quad (55)$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις ικανοποιούν την σχέση

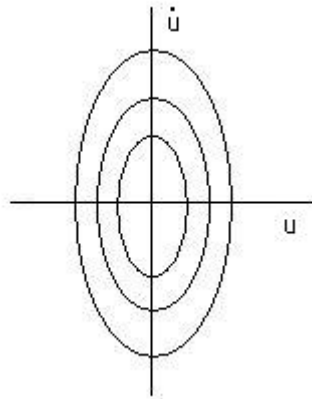
$$H(u, \dot{u}) = C \quad (56)$$

που στο επίπεδο φάσης, τουλάχιστον για  $0 < \varepsilon \ll 1$ , είναι σχεδόν περιφέρειες





Επίπεδο φάσης για ε=0



Επίπεδο φάσης για ε=1 (βλ. [BO], σελ. 547)

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την Poincaré Lindstedt μέθοδο η οποία παράγει περιοδικές προσεγγίσεις οι οποίες προσεγγίζουν τις λύσεις της Duffing ομοιόμορφα για  $t \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

Εισάγουμε τη νέα κλίμακα χρόνου

$$t = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\tau, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \text{ υπό προσδιορισμό} \quad (58)$$

Ως προς τη νέα κλίμακα χρόνου, το (57) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2[u + \varepsilon u^3] = 0. \quad (59)$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \dots = 1, \quad \frac{du_0}{d\tau}(0) + \varepsilon \frac{du_1}{d\tau}(0) + \dots = 0,$$

και ομαδοποιώντας τους όρους στην (59) ως προς τις δυνάμεις του  $\varepsilon$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_0}{d\tau^2}(0) + \varepsilon u_0 &= 0 \quad (\varepsilon^0 \text{ όροι}) \\ \frac{d^2u_1}{d\tau^2} + u_1 &= -u_0^3 + 2\omega u_0 = -(\cos \tau)^3 - 2\omega_1 \cos \tau \quad (60) \\ &= \left(\frac{3}{4} + 2\omega_1\right) \cos \tau - \frac{1}{4} \cos 3\tau \quad (\varepsilon^1 \text{ όροι}). \end{aligned}$$

Η ιδέα τώρα είναι να επιλέξουμε το  $\omega_1$  ώστε να αποφύγουμε το συντονισμό στην εξίσωση (60). Επιλέγουμε λοιπόν

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} \quad (61)$$

Και επιλύοντας την (60) παίρνουμε

$$u_1 = \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau) \quad (62)$$

Κατά συνέπεια, η προσέγγιση που παίρνουμε από τους πρώτους δύο όρους είναι

$$\begin{aligned} u_{\text{προσ}} &= \cos \tau + \frac{\varepsilon}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau) \quad (63) \\ &= \cos\left[t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right] + \frac{\varepsilon}{32}\left[\cos 3\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right)\right], \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\tau = (1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^{-1}t \simeq (1 - \varepsilon\omega_1)t = \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι η προσέγγιση  $u_{\text{προσ}}(t)$  είναι περιοδική συνάρτηση του  $t$ . Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχουν σαφώς 2 κλίμακες χρόνου, η  $t$  και η  $\varepsilon t$ . Αν και δεν αποδεικνύουμε εδώ την αντίστοιχη εκτίμηση της (54),  $|u_{\text{ακρ}}(t) - u_{\text{προσ}}(t)| < C\varepsilon^2$  (βλ. [N]), βλέπουμε καθαρά την υπεροχή της (62) σε σχέση με την (\*\*) στη σελ. 31.

Η μέθοδος Poincaré - Lindstedt λέγεται επίσης και μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.

**Παρατήρηση 3.7** Όσον αφορά δε την αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις και την παρουσία πολλαπλών κλιμάκων όταν το  $\Theta\Pi\Sigma$  δεν εφαρμόζεται, έχουμε να πούμε ότι ισχύει. Και εδώ η αδυναμία εφαρμογής του  $\Theta\Pi\Sigma$  οφείλεται στην μη αντιστρεψιμότητα του γραμμικού μέρους. Κάτι τέτοιο συμβαίνει για την *Duffing*:

Ο τελεστής  $Lu = \ddot{u} + u$  δεν είναι αντιστρέψιμος στο χώρο των  $2\pi$ -περιοδικών συναρτήσεων.

**Άσκηση 3.8** Θεωρείστε την Ασκ. 1.4, σ. 56 Logan και λύστε την ακολουθώντας τη σημείωση στη σελ. 36.

**Άσκηση 3.9** Ασκ. 1.5, Logan σ. 56, μέρος γ). Πώς συγκρίνεται αυτή η εξίσωση με την εξίσωση Van der Pol; Είναι όλες οι λύσεις τις περιοδικές;

**Άσκηση 3.10** \* Μια σνημαντική διαφορά μεταξύ της *Duffing* ( $\varepsilon > 0$ ) και της γραμμικής ( $\varepsilon=0$ ) είναι ότι η περίοδος των λύσεων εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Τι μπορείτε να συνάγετε επ' αυτού μέσω της μεθόδου Poincaré - Lindstedt;

### 3.3 Ανάλυση οριακού στρώματος - Ιδιόμορφη διαταραχή

**Παράδειγμα 3.11** ([BO]) Θεωρούμε το πρόβλημα Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (64)$$

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις οι οποίες να προσεγγίζουν την ακριβή λύση σε όλο το διάστημα  $[0,1]$ . Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η μέθοδος του (ομαλού) ασυμπτωτικού αναπτύγματος (46) δεν οδηγεί πουθενά. Στην άσκηση 3.10 ζητάμε από το φοιτητή να εφαρμόσει τη μέθοδο του

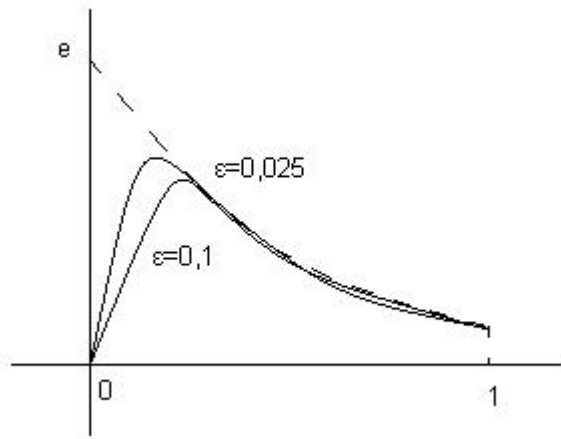
Παραδείγματος στην (62). Αμέσως κανείς οδηγείται στην εξής δυσκολία: Το μη διαταραγμένο πρόβλημα ( $\varepsilon=0$ ) είναι

$$y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (65)$$

το οποίο δεν είναι επιλύσιμο (εξίσωση 1ης τάξης με δύο συνοριακές συνθήκες).

Ότι η ανωτέρω δυσκολία είναι ουσιαστική το αποκαλύπτει η λύση της (62) που είναι δυνατόν (σε αυτή τη σχετικά σπάνια περίπτωση γραμμικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές) να γραφτεί σε κλειστή μορφή

$$y(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (66)$$



Γραφήματα της  $y(x)$  για  $\varepsilon=0,1$  και  $0,025$

Παρατηρούμε ότι η

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x) = e^{1-x} =: y_{\varepsilon\xi}(x)$$

διαφέρει σημαντικά από την ακριβή λύση για  $x=O(\varepsilon)$ , δηλ. η  $e^{1-x}$  δεν προσφέρει ομοιόμορφη προσέγγιση σε όλο το  $[0,1]$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η  $e^{1-x}$  επιλύει την εξίσωση (65) και μια από τις δύο συνοριακές συνθήκες, αυτήν μακριά από το συνοριακό στρώμα στο  $x=0$ .

Από την (64) φαίνεται καθαρά ότι υπάρχουν δύο κλίμακες, η  $x$  και η  $\frac{x}{\varepsilon}$ .

Για να μελετήσουμε λοιπόν τη λύση ως προς την κλίμακα  $\frac{x}{\varepsilon}$  θέτουμε  $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$  και εκφράζουμε την  $y$  συναρτήσει της  $\eta$ :

$$y(x) = \frac{e^{-\varepsilon\eta} - e^{-\eta}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =: V(\eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e - e^{1-\eta} =: V_{\varepsilon\sigma}(\eta) \quad (67)$$

Εάν τώρα εκφράσουμε την (65) ως προς  $\eta$  και πάρουμε το όριο όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$ , θα οδηγηθούμε σε μια εξίσωση που επιλύεται από την  $e - e^{1-\eta}$ .

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2}{d\eta^2}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε το (64) σε ισοδύναμη μορφή

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \frac{dV}{d\eta} + V = 0, \\ V(0) = 0, \quad V\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1. \end{cases} \quad (68)$$

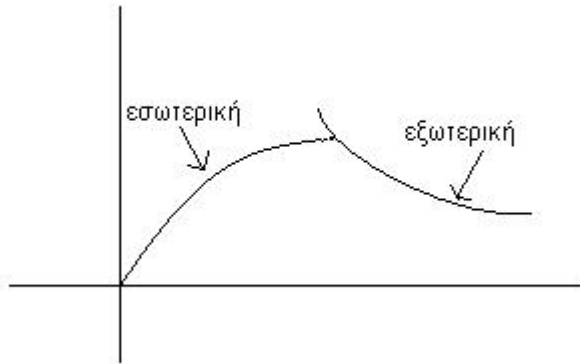
Το οριακό πρόβλημα  $\varepsilon \rightarrow 0$  είναι

$$\begin{cases} \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{dV}{d\eta} = 0, \\ V(0) = 0, \quad V(\infty) = 1. \end{cases} \quad (69)$$

Παρατηρούμε ότι η  $V_{\varepsilon\sigma}(\eta)$  στην (67) ικανοποιεί την εξίσωση (69) και μια από τις συνοριακές συνθήκες, αυτήν που είναι εντός του οριακού στρώματος.

Η κατανόηση του ανωτέρω συνοφίζεται ως εξής: Υπάρχουν δύο διαφορετικά οριακά προβλήματα (ή προβλήματα αναφοράς), η (65) με μια συνοριακή συνθήκη, και η (69), με την άλλη συνοριακή συνθήκη. Μακριά από το συνοριακό στρώμα η μεταβολή της λύσης είναι αργή και οι παράγωγοι φραγμένες ως προς  $\varepsilon$ , και κατά συνέπεια ο όρος  $\varepsilon y''$  στην (65) είναι αμελητέος. Αντίθετα εντός του συνοριακού στρώματος η μεταβολή της λύσης είναι γρήγορη, και η παράγωγος εκρήγνυται όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$  με αποτέλεσμα ο όρος  $\varepsilon y''$  στην (65) να είναι σημαντικός. Η  $e^{1-x}$  δίνει την εξωτερική προσέγγιση, ενώ η  $e - e^{1-\eta}$  δίνει την εσωτερική προσέγγιση.

Μέχρι στιγμής έχουμε μια πλήρη αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις: παρουσία πολλών κλιμάκων  $\Leftrightarrow$  ανεπάρκεια (ομαλών) ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων  $\Leftrightarrow$  ανεπάρκεια ΘΠΣ. Υπάρχει όμως ένα εντελόν καινούριο στοιχείο: πως θα γίνει η συναρμογή των δύο προσεγγίσεων ώστε να κατασκευαστεί μια ομαλή ομοιόμορφη προσέγγιση;



Όσον αφορά τη συναρμογή (ή ασυμπτωτικό ταιρίασμα) η οποία είναι λεπτή υπόθεση, έχουμε να πούμε τα εξής: Η δυνατότητα ασυμπτωτικού ταιριάσματος εξαρτάται από το κατά πόσο η εσωτερική και η εξωτερική προσέγγιση έχουν ένα κοινό διάστημα στο οποίο και οι δύο ισχύουν. Θα εξηγηθούμε στη συνέχεια.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε μια αντιμεταθετική σχέση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = e & (\text{εσωτερικό όριο εξωτερικών}) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} V_{\varepsilon\sigma}(x) = e & (\text{εξωτερικό όριο εσωτερικών}) \end{cases} \quad (70)$$

Η ισότητα των ορίων είναι η ένδειξη για τη συναρμογή. Δεν είναι εν γένει σωστό ότι το ενδιαμέσο όριο είναι αριθμός ανεξάρτητος του  $\varepsilon$ .

Πως μπορούμε να εγγυηθούμε ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατόν σε περιπτώσεις όπου δε γωρίζουμε τη λύση;

Πριν συνεχίσουμε επί της συναρμογής δίνουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση  $\varepsilon$  τάξης που προσφέρει η μέθοδος

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{o\mu} = y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}(x) - [\text{κοινό όριο} = e] \\ = e^{1-x} + (e - e^{1-\eta}) - e \\ = e^{1-x} - e^{1-\eta} \\ = e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}} \\ |y_{o\mu} - y_{\varepsilon\xi}| = O(\varepsilon), \quad x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (71)$$

Ξεκινάμε με ένα πλήρες εξωτερικό ανάπτυγμα:

$$y_{\varepsilon\xi}(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n, \quad \text{όπως το } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (72)$$

$$y_0(0) = 1, \quad y_1(1) = y_2(1) = \dots = 0.$$

Σημειώνουμε ότι *a priori* το  $y_{\varepsilon\xi}(x)$  δεν συμπίπτει με ό,τι καλέσαμε  $y_{\varepsilon\xi}(x)$  προηγουμένως.

Αντικαθιστώντας την (72) (65) και μαζεύοντας δυνάμεις του  $\varepsilon$ , παίρνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_0 + y_0 = 0, \quad y_0(1) = 1 \\ y'_n + y_n = -y''_{n-1} - y''_{n-1}, \quad y_n(1) = 0, \quad n \geq 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (73)$$

Η λύση είναι

$$y_0(x) = e^{1-x}, \quad y_n(x) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Κατά συνέπεια η  $y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x}$  είναι η εξωτερική προσέγγιση όλων των τάξεων του  $\varepsilon$ . Αυτός είναι ο λόγος που στην περιοχή  $x \gg \varepsilon$  η διαφορά της  $y(x)$  από την  $y_{\varepsilon\xi}(x)$  είναι το πολύ εκθετικά μικρή:  $|y - y_{\varepsilon\xi}| = O(\varepsilon^n)$   $\forall n = 1, 2, 3 \dots$  όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Στη συνέχεια θεωρούμε το πλήρες εσωτερικό ασυμπτωτικό ανάπτυγμα:

$$V_{\varepsilon\sigma}(\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\eta)\varepsilon^n, \quad \text{όπως το } \varepsilon \longrightarrow 0^+. \quad (74)$$

$$V_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 \Rightarrow V_\eta(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Αντικατάσταση στην (69) και μάζεμα των όρων δίνει

$$\ddot{V}_0 + \dot{V}_0 = 0, \quad V_0(0) = 0$$

$$\ddot{V}_n + \dot{V}_n = -V'_{n-1} - V_{n-1}, \quad V_n(0) = 0$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$V_0(\eta) = A_0(1 - e^{-\eta})$$

$$V_n(\eta) = \int_0^\eta [A_n e^{-z} - V_{n-1}(z)] dz, \quad n \geq 1$$

όπου  $A_n$  αυθαίρετες σταθερές.

Τώρα ταιριάζουμε ασυμπτωτικά το εσωτερικό με το εξωτερικό ανάπτυγμα, όρο προς όρο:

Αντικατάσταση του  $x = \eta\varepsilon$  στο  $y_{\varepsilon\xi}(x)$  και ανάπτυξη ως προς  $\varepsilon$  δίνει

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x} = e\left(1 - \varepsilon\eta + \frac{\varepsilon^2\eta^2}{2!} - \frac{\varepsilon^3\eta^3}{3!} + \dots\right)$$

Για  $n \longrightarrow \infty$  έχουμε  $V_0(\eta) \sim A_0$  ου πρέπει να ταιριάζει με τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα, δηλαδή

$$A_0 = e.$$

Γυρίζουμε πίσω και υπολογίζουμε

$$V_1(\eta) = (A_0 + A_1)(1 - e^{-\eta}) - e\eta$$

Για  $\eta \longrightarrow \infty$ ,  $V_1(\eta) \sim (A_0 + A_1) - e\eta$  που πρέπει να ταιριάζει με το δεύτερο όρο, από όπου συμπεραίνουμε ότι  $A_1 = -A_0 = -e$ .

Παρόμοια εξάγουμε ότι  $V_n(\eta) = e \left[ \frac{(-1)^n}{n!} \right] \eta^n$ .



Καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon\sigma}(\eta) &\sim \sum \varepsilon^n \frac{(-1)^n \eta^n}{n!} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-\varepsilon\eta} - e^{1-\eta}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό ανάπτυγμα έχει νόημα όχι μόνο για  $\eta$  εντός του στρώματος ( $\eta=O(1)$ ) αλλά και για μεγάλα  $\eta$  (για παράδειγμα  $\eta=O(\varepsilon^{-\alpha})$ ,  $0 < \alpha < 1$ ). Επίσης το εξωτερικό ανάπτυγμα ισχύει και  $\varepsilon \ll x < 1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , όχι όμως για  $x = O(\varepsilon)$ , διότι δεν ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη ούτε και έχει την σωστή συμπεριφορά οριακού στρώματος). Κατά συνέπεια έχουμε επικάλυψη στο διάστημα

$$\varepsilon \ll x \ll 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Άσκηση 3.12** Εφαρμόστε τη μέθοδο του παραδείγματος 3.11 στο παράδειγμα 3.3, (64). Οδηγήστε σε αποτέλεσμα;

**Άσκηση 3.13** Δείξτε την εκτίμηση (71(ii)). Μήπως ισχύει η ισχυρότερη εκτίμηση

$$|y_{\alpha\sigma}(x) - y_{0\mu}(x)| = O(\varepsilon^n)$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ ;

Συνοψίζουμε τώρα τη μέθοδο, στην απλούστερη μορφή της όπως εφαρμόζεται στην (65) αγνοώντας ότι σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε τη λύση (67).

A. Εξωτερικό Ανάπτυγμα

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Αντικατάσταση στην (65) και μάζεμα δυνάμεων του  $\varepsilon$  δίνει

$$\varepsilon \left[ y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \dots \right] + (1+\varepsilon) \left[ y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \dots \right] + \left[ y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \right] = 0$$

$\varepsilon^0$  όροι

$$y_0 + y_0 = 0, \quad y_0(1) = 1$$

$$\Rightarrow y_0(x) = e^{1-x}$$

B. Εσωτερικό Ανάπτυγμα

Προσδιορισμός κλίμακας

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^\gamma}, \quad V(\eta) := y(\varepsilon^\gamma \eta) \Leftrightarrow y(x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon^\gamma}\right)$$

Αντικατάσταση στην (65) δίνει

$$\varepsilon^{1-2\gamma} \ddot{V} + (1 + \varepsilon) \varepsilon^{-\gamma} \dot{V} + V = 0$$

Εξισορρόπηση όρων δίνει

$$1 - 2\gamma = -\gamma \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

Συνεπώς η εξίσωση εωτός του στώματος γράφεται ως

$$\varepsilon^{-1} \ddot{V} + (1 + \varepsilon) \varepsilon^{-1} \dot{V} + V = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ddot{V} + (1 + \varepsilon) \dot{V} + \varepsilon V = 0$$

$$V_{\varepsilon\sigma}(\eta) = V_0(\eta) + \varepsilon V_1(\eta) + \varepsilon^2 V_2(\eta) + \dots$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\left( \ddot{V}_0(\eta) + \varepsilon \ddot{V}_1(\eta) + \dots \right) + (1 + \varepsilon) \left( \dot{V}_0(\eta) + \varepsilon \dot{V}_1(\eta) + \dots \right) + \varepsilon \left( V_0(\eta) + \varepsilon V_1(\eta) + \dots \right) = 0$$

$\varepsilon^0$  όροι

$$\ddot{V}_0 + V_0 = 0, \quad V_0(0) = 0$$

$$\Rightarrow V_0(\eta) = C(1 - e^\eta), \quad C \text{ σταθερά υπό προσδιορισμό}$$

Γ. Ασυμπτωτικό Ταίριασμα - Συναρμογή

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x}$$

$$V_{\varepsilon\sigma}(\eta) = C(1 - \varepsilon^{-\eta})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} V_{\varepsilon\sigma}(\eta) \Leftrightarrow e = C$$

Δ. Ομοιόμορφη Προσέγγιση (1ης τάξης)

$$y_{o\mu}(x) = y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - = e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}$$

$$|y_{\alpha\kappa\rho}(x) - V_{o\mu}(x)| = O(\varepsilon), \quad x \in [0, 1].$$

**Άσκηση 3.14** 3.2 (α) Logan, σελ. 76

**Άσκηση 3.15** 3.3 Logan, σελ. 77

**Άσκηση 3.16** 3.4 Logan, σελ. 77

**Άσκηση 3.17** 3.5 Logan, σελ. 77

**Άσκηση 3.18** 3.6 Logan, σελ. 77

**Άσκηση 3.19** \* Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα

$$\varepsilon y'' - x^2 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

το οποίο έχει δύο οριακά στρώματα, ένα στο  $x = 1$  με  $\gamma = 1$  και ένα στο  $x = 0$  με  $\gamma = \frac{1}{2}$  (βλέπε Β. προηγούμενως). Βρείτε ομοιόμορφη προσέγγιση  $\varepsilon$  τάξης.

**Άσκηση 3.20** \* Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα

$$\varepsilon y'' - x^4 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

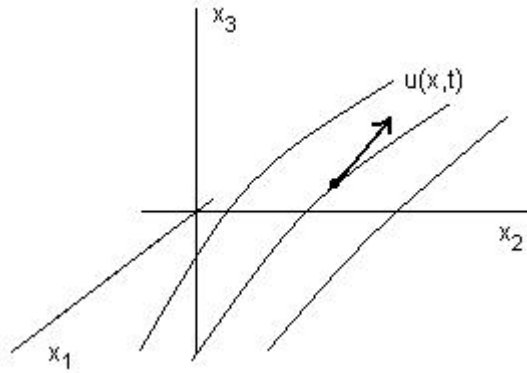
Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση  $\varepsilon$  τάξης (βλέπε προηγούμενη άσκηση).

## 4 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

4.1 Προέλευση της θεωρίας ιδιόμορφων διαταραχών και οριακού στρώματος: Το σύστημα Prandtl στη Ρευστοδυναμική.

4.1.1 Εξισώσεις Navier - Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{Re} (\Delta \vec{u} - \nabla p) \\ \text{div}(\vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (75)$$



Συμβολισμός

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{u} = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

Το πεδίο ταχυτήτων  $\vec{u}$  δίνει την ταχύτητα στο σημείο  $x$ , που ενδεχομένως μεταβάλλεται με το χρόνο.

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= \left[ u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] (u_1, u_2, u_3) \\ &= \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \right. \\ &\quad \left. u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Το "Re" είναι αδιάστατος θετικός αριθμός και λέγεται αριθμός του Reynolds. Ο Re δίνει το πηλίκο της τάξεως μεγέθους της αδράνειας προς το ιζώδες

$$Re \sim \frac{\text{'Όροι Αδράνειας}}{\text{'Όροι ιζώδους}} \quad (76)$$

Για παράδειγμα, μεγάλη μάζα σημαίνει μεγάλη αδράνεια. Το μέλι έχει περισσότερο ιζώδες από το νερό.

$$p = p(x, t), \quad \text{πίεση}$$

Το σύστημα (75) ως προς 4 αγνώστους  $u_1, u_2, u_3, p$  είναι η μαθηματική διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα στο πλαίσιο των ρευστών. Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (75)(i) είναι η επιτάχυνση ενώ το δεξιό μέλος αναπαριστά τις δυνάμεις. Αντίθετα με την περίπτωση της κλασσικής μηχανικής,  $F=ma$ , η πίεση δεν είναι γνωστή δεδομένη συνάρτηση της θέσης. Η πίεση είναι δύναμη που ασκεί το ρευστό στον εαυτό του και είναι μια από τις άγνωστες ποσότητες.

Η (75)(ii) είναι η μαθηματική διατύπωση της ασυμπίεστότητας που διαχωρίζει τα υγρά από τα αέρια.

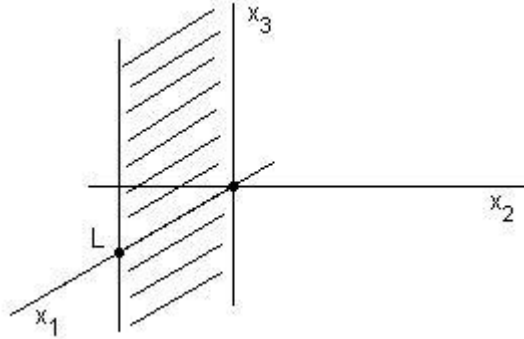
Το σύστημα Prandtl προκύπτει κατά την ανάλυση της (75) για  $Re \gg 1$ , δηλαδή στη μελέτη του ιδιόμορφου ορίου  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ . Το σύστημα που προκύπτει αν θέσουμε  $\varepsilon=0$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (77)$$

είναι οι εξισώσεις Euler, που είναι 1ης τάξης. Κατά συνέπεια η διαταραχή ως προς  $\varepsilon$  είναι ιδιόμορφη διαταραχή, φορμαλιστικά, γιατί η εξίσωση για  $\varepsilon=0$  αλλάζει τάξη.

### 4.1.2 Το φυσικό φαινόμενο

Θεωρούμε αρχικά ότι έχουμε μια ροή σταθερής ταχύτητας (ως προς  $x$  και  $t$ ) στην κατεύθυνση του  $x_1$  άξονα,  $V\vec{e}_1$ . Στη συνέχεια εισάγουμε μια λεπίδα απειροελάχιστα λεπτή και απείρου μήκους, παράλληλη στον  $x_3$  άξονα και πλάτους  $L$ .



Η διατομή της λεπίδας  $J$  στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο είναι το διάστημα  $\{0 < x < L, y = 0\}$  έτσι ώστε η αρχική ροή να είναι παράλληλη στη λεπίδα. Αυξάνουμε στη συνέχεια την ταχύτητα  $V$  και υποθέτουμε ότι ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μεγάλος:

$$Re \gg 1$$

Για τον αριθμό Reynolds ισχύει

$$Re \sim \frac{VL}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

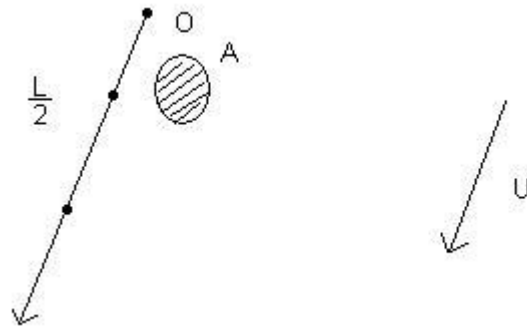
Η σταθερά  $\mu$  χαρακτηρίζει το ιξώδες, το δε  $\rho$  την πυκνότητα.

Θεωρούμε ότι το υγρό “κολλάει” στο τοίχωμα της λεπίδας, κατά συνέπεια η ταχύτητα του μηδενίζεται στο  $J$ . Αυτό είναι θεμιτή παραδοχή γιατί σε όλα τα πειράματα που έχουν γίνει η ταχύτητα του υγρού στην επιφάνεια της λεπίδας φέρεται να μηδενίζεται.

Για να πάρουμε μια ιδέα για την επίδραση της λεπίδας στη ροή ας συγκεντρωθούμε στο μέσο της λεπίδας,  $x_1 = \frac{L}{2}$ . Καθώς κινούμεθα από το  $J$ , στην κάθετη κατεύθυνση αυξανόμενου  $x_2$ , η  $u$  αλλάζει από μηδέν σε τιμή κοντά στο  $V$ . Έστω ότι η τάξη μεγέθους (χαρακτηριστική κλίμακα) του διαστήματος αυτού είναι  $\delta$ . Το στρώμα του υγρού κατά το σύνορο πάχους  $\delta$  θα ονομάζεται συνοριακό στρώμα.

Η πρώτη μας ερώτηση είναι ο συσχετισμός του  $\delta$  με τις διάφορες παραμέτρους του συστήματος. Υποθέτουμε ότι  $\delta < L$ . Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι η ροή δεν μεταβάλλεται ως προς  $x_3$ , δηλαδή ουσιαστικά έχουμε μια ροή στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.

**4.1.3 Το πάχος της λεπίδας: το φυσικό επιχείρημα.**



Θεωρείστε τώρα μια μικρή μάζα υγρού (επίπεδη) εμβαδού  $A$  που ξεκινάει από την ακινησία κοντά στο άκρο  $O$  του  $L$  και ακολουθεί τη ροή πλησίον του τοιχώματος. Στο σημείο  $\frac{L}{2}$  έχουμε

1. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι της τάξης του  $V$
2. Η μεταβολή της ορμής είναι της τάξης  $(\rho A)V$
3. Ο χρόνος είναι της τάξης  $\frac{L}{2V}$

Κατά συνέπεια επειδή  $\frac{d}{dt}mu = F$  συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή στο χρόνο της ορμής που είναι  $\frac{(\rho A)U}{L}$  δίνει δύναμη της τάξης  $\frac{(\rho A)U^2}{L}$  (το 2 δεν έχει σημασία όσον αφορά την τάξη).

Τώρα η δύναμη που εξασκείται στη μάζα οφείλεται μόνο στο ιξώδες (δυνάμεις τριβής λόγω της παρουσίας της λεπίδας. Αν δεν υπήρχε λεπίδα η ταχύτητα θα ήταν σταθερή και άρα η δύναμη ίση με το μηδέν). Η πυκνότητα της δύναμης του ιξώδους δίνεται από τον όρο  $\mu[u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}]$ , άρα η δύναμη του ιξώδους από τον όρο  $\mu[u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}]A$ .

Παρατηρούμε τα εξής:

$\mu[u_{x_2x_2}]A$  είναι της τάξης  $\mu \frac{UA}{\delta^2}$ , διότι  $u_{x_2} \sim \frac{U}{\delta}$  και  $u_{x_2x_2} \sim \frac{U/\delta}{\delta} = \frac{U}{\delta^2}$

$\mu[u_{x_1x_1}]A \sim \mu \frac{U}{L^2}$ , διότι  $u_{x_1} \sim \frac{U}{L}$  και  $u_{x_1x_1} \sim \frac{U}{L^2}$

Κατά συνέπεια αυτός ο όρος είναι μικρότερος (λόγω της παραδοχής  $\delta < L$ ).

Συμπέρασμα:

$$\frac{(\rho A)U^2}{L} \sim \mu \frac{UA}{\delta^2} \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{L^2} \sim \frac{\mu}{L\rho U} \sim \frac{1}{Re}$$

δηλαδή το οριακό στρώμα συρρικνώνεται καθώς ο αριθμός Reynolds τείνει στο άπειρο.

## 4.2 Εσωτερική κλίμακα - Εσωτερικά αναπτύγματα και σύστημα Prandtl.

Θεωρούμε μόνιμες ροές ( $\vec{u}$  ανεξάρτητο του χρόνου) και σε δύο διαστάσεις, οπότε το σύστημα (75) Navier - Stokes παίρνει τη μορφή για  $\vec{u} = (u, v)$  (αντί για  $(u_1, u_2)$ )

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{Re} [u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - p_{x_1}] \\ u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{Re} [v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} - p_{x_2}] \\ u_{x_1} + u_{x_2} = 0 \end{cases} \quad (78)$$

Θέλουμε να ανακαλύψουμε κάποιες κλίμακες στην περιοχή του οριακού στρώματος. Για αυτό το σκοπό θα σκεφτούμε κατά αναλογία με τις αλγεβρικές εξισώσεις (βλ. (30)) και παρόμοια με την (65)

$$\begin{cases} \text{Ανεξάρτητες μεταβλητές: } x_1, x_2 \\ \text{Εξαρτημένες μεταβλητές: } (u, v) \text{ και } p \end{cases} \quad (79)$$



Ανεξάρτητες: Την οριζόντια κλίμακα μήκους  $x_1$  που είναι  $L$  δεν την αλλάζαμε. Στην  $x_2$  κατεύθυνση εισάγουμε την κλίμακα του πάχους του στρώματος,  $\beta = \frac{\delta}{L}$ .

$$\eta = \frac{x_2}{\beta} \quad (80)$$

Εξαρτημένες: Την  $x_1$  συνιστώσα της ταχύτητας δεν την πειράζουμε διότι εδώ η  $U$  δίνει την κατάλληλη κλίμακα. Δεν την γνωρίζουμε και εισάγουμε την άγνωστη (προς στιγμή) χαρακτηριστική ποσότητα  $\gamma$ :

$$v = \gamma \bar{v} \quad (81)$$

Ομοίως για την πίεση εισάγουμε την άγνωστη κλίμακα

$$p = \alpha \bar{p}$$

Εν περιλήψει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{u, x όπως είχαν} \\ \eta = \frac{x_2}{\beta} \quad v = \gamma \bar{v} \quad p = \alpha \bar{p} \end{array} \right. \quad (82)$$

Εισάγουμε τώρα το σύστημα (78) ως προς τις καινούριες μεταβλητές:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \frac{\partial u}{\partial x_2} = \gamma \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{\beta} \\ u_{x_2 x_2} = \frac{1}{\beta^2} u_{\eta \eta} \end{array} \right. \quad (83)$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$\left\{ \begin{array}{l} uu_{x_1} + \frac{\gamma}{\beta} \bar{v} u_{\eta} = \frac{1}{Re} \left( u_{x_1 x_1} + \frac{1}{\beta^2} u_{\eta \eta} - \alpha \bar{p}_{x_1} \right) \\ \gamma u \bar{v}_{x_1} + \frac{\gamma^2}{\beta} v \bar{v}_{\eta} = \frac{\gamma}{\beta^2 Re} \bar{v}_{\eta \eta} + \frac{1}{Re} \gamma \bar{v}_{xx} + \frac{\alpha}{\beta Re} \bar{p}_{\eta} \end{array} \right. \quad (84)$$

$$u_{x_1} + \frac{\gamma}{\beta} \bar{v}_{\eta} = 0 \quad (85)$$

Ορμώμενοι τώρα από τις αλγεβρικές εξισώσεις §3 θα επιλέξουμε τα  $\alpha, \beta, \gamma$  έτσι ώστε μέσω της μεθόδου της εξισορρόπησης να εξισορροπήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερους όρους της εξίσωσης, με τους δε υπόλοιπους όρους μικρότερους, τους οποίους αγνοούμε.

Ξεκινάμε από την (85) εφαρμόζοντας αυτή την αρχή:

$$\beta = \gamma \quad (86)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την (84)(i):

$$uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = \frac{1}{Re} \left( u_{x_1x_1} + \frac{1}{\beta^2} v_{\eta\eta} - \alpha \bar{p}_{x_1} \right)$$

Εφόσον  $\beta < 1 \Rightarrow u_{x_1x_1}$  μικρός όρος σε σχέση με τον  $\frac{1}{\beta^2} v_{\eta\eta}$

Υπόλοιποι: τάξεις όρων:

$$1 \quad 1 \quad \frac{1}{\beta^2 Re} \quad \frac{\alpha}{Re} \quad (87)$$

Επιλέγουμε

$$1 = \frac{1}{\beta^2 Re} = \frac{\alpha}{Re} \Rightarrow \alpha = Re, \beta = (Re)^{-\frac{1}{2}} \quad (88)$$

Αγνοώντας τον  $u_{x_1x_1}$  η (84)(i) δίνει τη θέση της στην

$$uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = u_{\eta\eta} - \bar{p}_{x_1} \quad (89)$$

Τέλος έχουμε την (84)(ii):

$$\gamma u \bar{v}_{x_1} + \frac{\gamma^2}{\beta} \bar{v} v_\eta = \frac{\gamma}{\beta^2 Re} \bar{v}_{\eta\eta} + \frac{1}{Re} \gamma \bar{v}_{x_1x_1} + \frac{\alpha}{\beta Re} \bar{p}_\eta$$

$$\beta \quad \beta \quad \beta \quad \beta^3 \quad \frac{1}{\beta}$$

( $\beta < 1, Re \gg 1$ )

Κατά συνέπεια ο μεγαλύτερος όρος είναι ο  $\frac{1}{\beta}$  και η (84)(ii) δίνει τη θέση της στην

$$\bar{p}_\eta = 0 \quad (90)$$

Συμπέρασμα:

Η Navier - Stokes εντός του στρώματος προσεγγίζεται από το σύστημα Prandtl:

$$\begin{cases} uu_{x_1} + \bar{v}u_\eta = u_{\eta\eta} - \bar{p}_{x_1} \\ \bar{p}_\eta = 0 \\ u_{x_1} + \bar{v}_\eta = 0. \end{cases} \quad (91)$$

Επίσης συνάγουμε ότι  $\beta = (Re)^{-\frac{1}{2}}$  που συμφωνεί πλήρως με το φυσικό επιχείρημα.

Σχολιο: Το σύστημα Prandtl είναι για την Navier - Stokes ότι η (??) για την (65). Το σύστημα Euler (77) αντιστοιχεί με την (66).

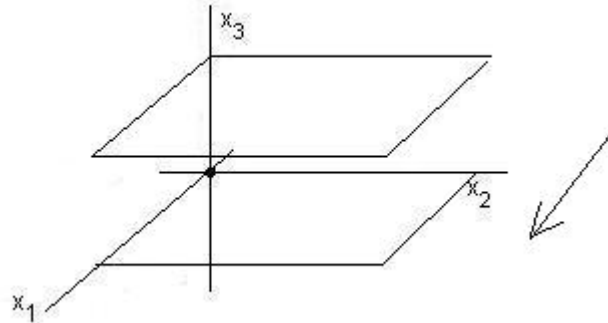
Σχολιο: Το σύστημα (75) συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες  $u(x, 0) = u_0(x)$  με  $\operatorname{div}u_0(x) = 0$  και από συνοριακές συνθήκες  $u = 0$  στο  $\partial V$ , όπου  $V$  το χωρίο όπου λαμβάνει χώρα η ροή. Εάν η ροή είναι σε όλο τον  $\mathbb{R}^3$  τότε δεν έχουμε συνοριακές συνθήκες.

Το πρόβλημα (75) με τις ανωτέρω συνθήκες είναι ένα Π.Α.Τ. (πρόβλημα αρχικών τιμών). Το ερώτημα που προκύπτει είναι είναι κατά πόσο δοθείσης  $u_0(x)$  η  $u(x, t)$  προσδιορίζεται για  $t \geq 0$ . Στη μελέτη του Π.Α.Τ. οδηγείται κανείς φυσιολογικά στην έννοια της “ασθενούς λύσης”. Οι ασθενείς λύσεις δεν είναι αναγκαστικά “κλασσικές”, δηλαδή δεν έχουν αναγκαστικά όλες τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση αλλά είναι συναρτήσεις που ικανοποιούν ολοκληρωτικές σχέσεις που προκύπτουν όταν πολλαπλασιάσει κανείς την (75) με συναρτήσεις δοκιμής μηδενικής απόκλισης και ολοκληρώσει κατά μέρη. Οι κλασσικές λύσεις είναι ασθενείς, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα ήταν σημαντικό αν υπήρχε μια θεωρία ύπαρξης / μοναδικότητας που για ομαλή αρχική συνθήκη να δίνει ολική ύπαρξη ομαλής  $u(x, t)$ . Αυτό είναι γνωστό μόνο για τις 2 διαστάσεις (πχ. στον  $\mathbb{R}^2$ ).

Στις 3 διαστάσεις ένα τοπικό θεώρημα έχει αποδειχθεί (η λύση υπάρχει<sup>2</sup> για  $t \in [0, T)$ , όπου το  $T$  εξαρτάται από την  $u_0(x)$  και το  $Re$ ). Επίσης ολική ύπαρξη ασθενών λύσεων είναι γνωστή (αλλά όχι μοναδικότητα). Από όσα μέχρι τώρα είναι γνωστά σε ορισμένες περιπτώσεις μια ασθενής λύση μπορεί να μην είναι κλασσική, ή ενδεχομένως να υπάρχουν πολλές ασθενείς λύσεις. Αυτό είναι ένα φημισμένο ανοικτό πρόβλημα από την αρχή του 20ου αιώνα, πρόβλημα επιπέδου μεταλλίου Fields.

<sup>2</sup>δες [H], σελ. 79

**Άσκηση 4.1** Θεωρείστε μια μόνιμη ροή μεταξύ δύο ακίνητων επιπέδων απείρων πλακών  $x_3 = -d$ ,  $x_3 = d$ . Θεωρείστε ότι η ροή προκύπτει από πίεση  $p$  με  $\nabla p = (-C, 0, 0)$ ,  $c > 0$ . Τέλος θεωρείστε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται πάνω στις πλάκες. Βρείτε την ταχύτητα του ρευστού.



Υπόδειξη: Η δύναμη της πίεσης είναι  $-\nabla p = (-C, 0, 0)$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ,  $u_1 = u_1(x_3)$ .

**Άσκηση 4.2** Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης για το Π.Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' + (1+x)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$$

Λύση: Το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του θεωρήματος 3.1 του Logan, με  $p(x) = 1 + x$ . Εφόσον  $p(x) > 0$  στο  $[0,1]$ , αναμένουμε οριακό στρώμα στο  $x=0$ .

Εξωτερικό ανάπτυγμα

$$y_{\varepsilon}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

$$y_{\varepsilon}(1) = 1, \text{ από όπου προκύπτει ότι } y_0(1) = 1, y_n(1) = 0, n \geq 1.$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει:

$$\varepsilon[y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \dots] + (1+x)[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \dots] + [y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots] = 0$$

$\varepsilon^0$  όροι:

$$(1+x)y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(1) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = 2(1+x)^{-1}.$$

Εσωτερικό ανάπτυγμα

$y(x) = Y\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $Y = Y(\eta)$ . Η εξίσωση ως προς  $Y$  γράφεται

$$\frac{1}{\varepsilon}\ddot{Y} + \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\dot{Y} + Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{Y} + (1+\varepsilon)\dot{Y} + \varepsilon Y = 0$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0(0) = 1, \quad Y_1(0) = 0, \quad \dots$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει:

$$(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots)'' + (Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots)' + \varepsilon(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots) = 0.$$

$\varepsilon^0$  όροι:

$$Y_0'' + Y_0 = 0, \quad Y_0(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y_0(\eta) = 1 + A_0(e^\eta - 1).$$

Συναρμογή

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = 2(1+x)^{-1}, \quad Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = 1 + A_0(e^\eta - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 - A_0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0 = -1$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης

$$y_{o\mu}(x) = y_{\varepsilon\xi}(x) + Y_{\varepsilon\sigma}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 2 = \frac{2}{1+x} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Σημείωση:

$$\varepsilon y'' + (2x+1)y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

Εδώ έχουμε  $p(x) = -(2x + 1) < 0$  και κατά συνέπεια το οριακό στρώμα αναμένεται στο  $x = 1$ . Οπότε η  $\eta = \frac{1-x}{\varepsilon}$ , και  $Y = Y(\eta)$ . Κατά τα άλλα πανομοιότυπη ανάλυση.

Λύση Άσκησης (Μη γραμμική)

$$\varepsilon y'' + y' + y^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4} \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

A. Εξωτερικό ανάπτυγμα

$\varepsilon^0$  όροι

$$y'_0 + y_0^2 = 0, \quad y_0(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{x+1}$$

B. Εσωτερικό ανάπτυγμα

$$Y(\eta), \quad \eta = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}$$

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \ddot{Y} + \varepsilon^{-\alpha} \dot{Y} + Y^2 = 0.$$

$$1 - 2\alpha = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1 : \text{η εξίσωση παίρνει τη μορφή}$$

$$\ddot{Y} + \dot{Y} + \varepsilon Y^2 = 0.$$

$\varepsilon^0$  όροι

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0, \quad Y_0(0) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Y_0(\eta) = C_1[1 - e^{-\eta}] + \frac{1}{4}$$

Γ. Συναρμογή

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0(\eta) \Leftrightarrow C^1 = \frac{3}{4}$$

Δ. Ομοιόμορφη Προσέγγιση

$$y_{ομ}(x) = y_{ομ}(x) + Y_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

□

Λύση Άσκησης (Εκφυλισμένη  $p(x)$ , 2 οριακά στρώματα)

$$\varepsilon y'' + x^4 y' - y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι δεν εμπίπτει στην κατηγορία προβλημάτων  $\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, 0 < x < 1$  διότι το  $p(x)$  μηδενίζεται στο  $[0,1]$ . Παρά ταύτα από το θεώρημα (από την παραλλαγή του για  $p(x) < 0$ ) αναμένεται ότι στο  $x=1$  θα έχουμε οριακό στρώμα κλίμακας  $\varepsilon$ .

Είναι όμως ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι έχουμε οριακό στρώμα και στο  $x=0$ . Αυτό είναι εμφανές διότι θέτοντας  $\varepsilon=0$  παίρνουμε  $-x^4 y' - y = 0$  που (αν δεν είχαμε οριακό στρώμα στο  $x=0$ ) θα έπρεπε να συνοδεύεται από τη συνθήκη  $y(0)=1$ . Εάν λοιπόν το  $y'(0)$  οριζότανε θα καταλήγαμε σε αντίφαση. Ξεκινάμε με ένα a priori φράγμα.

**Λήμμα 4.3** Για όλα τα  $x$  στο  $[0,1]$ ,

$$0 \leq y(x) \leq 1$$

**Απόδειξη.** Έστω ότι  $\max y = y(x_M) > 1$ . Έπεται ότι  $x_M \in (0,1) \Rightarrow y'(x_M) = 0, y''(x_M) \leq 0$ . Η εξίσωση  $\varepsilon y'' + x^4 y' - y = 0$  υπολογισμένη στο  $x = x_M$  οδηγεί σε άτοπο. Παρόμοια επιχειρηματολογούμε για  $\min y = y(x_m) < 0$ .

□

A. Εξωτερική προσέγγιση

$$-x^4 y'_0 + y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = C_0 e^{\frac{1}{3\varepsilon^3}}$$

Από το Λήμμα έπεται ότι η  $y_0(x)$  πρέπει να είναι φραγμένη  $\Rightarrow C_0 = 0$ .

B. Εσωτερική προσέγγιση

$$\eta = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad y(x) = Y^1(\eta) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \ddot{Y}^1 - (1-\varepsilon\eta)^4 \frac{1}{\varepsilon} \dot{Y}^1 - = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Y}^1 - \dot{Y}(1 - \varepsilon\eta)^4 - \varepsilon Y^1 = 0, \text{ από όπου προκύπτει ότι}$$

$$\ddot{Y}^1 + \dot{Y} = 0 \Rightarrow Y^1(\eta) = A_0 + B_0 e^{-\eta}$$

$$Y_0(0) = 1 = 1 \Rightarrow A_0 + B_0 = 1$$

Γ. Συναρμογή στο x=1

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0(\eta) \Leftrightarrow A_0 = 0$$

$$\Rightarrow B_0 = 1$$

Δ. Εσωτερική προσέγγιση στο x=0

Η κλίμακα είναι το πρώτο που χρειάζεται να αποφασίσουμε.

$$\eta = \frac{x}{\delta}, \quad y(x) = Y^0(\eta); \quad Y_0(0) = 1$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} - \delta^3 \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0.$$

Εξισορρόπηση δίνει

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \delta^3, \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim 1, \quad \delta^3 \sim 1.$$

Η πρώτη δυνατότητα δίνει

$$\delta^3 \ddot{Y}^0 - \delta^3 \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0.$$

Θέτουμε  $\delta = 0$  ( $\Leftrightarrow \varepsilon = 0$ ) και παίρνουμε  $Y_0^0 = 0$ , μη αποδεκτό. Η τρίτη δυνατότητα δίνει

$$\varepsilon \ddot{Y}^0 - \eta^4 \dot{Y}^0 - Y^0 = 0$$

και κατά συνέπεια  $-\eta^4 \ddot{Y}_0^0 - Y_0^0 = 0$ , που συμπίπτει με την εξίσωση για την εξωτερική προσέγγιση και οδηγεί στην  $Y_0^0(\eta) \equiv 0$  που δεν ικανοποιεί την  $Y_0^0(0) = 1$ . Συνεπώς η μόνη επιλογή είναι η δεύτερη,  $\varepsilon \sim \delta^2$  δηλαδή  $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$ , που δίνει



$$\ddot{Y}^0 - \varepsilon^{\frac{3}{2}} Y^0 \eta^4 Y^0 - Y^0 = 0, \quad Y^0(0) = 1$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}^0 - Y^0 = 0, \quad Y_0^0(0) = 1$$

$$Y_0^0(\eta) = D_0 e^\eta + E_0 e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$D_0 + E_0 = 1.$$

Από το Λήμμα έπεται ότι η  $Y_0^0$  πρέπει να είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια,

$$D_0 = 0$$

$$\Rightarrow E_0 = 1.$$

E. Συναρμογή στο  $x=0$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_0^0(\eta) = 0$$

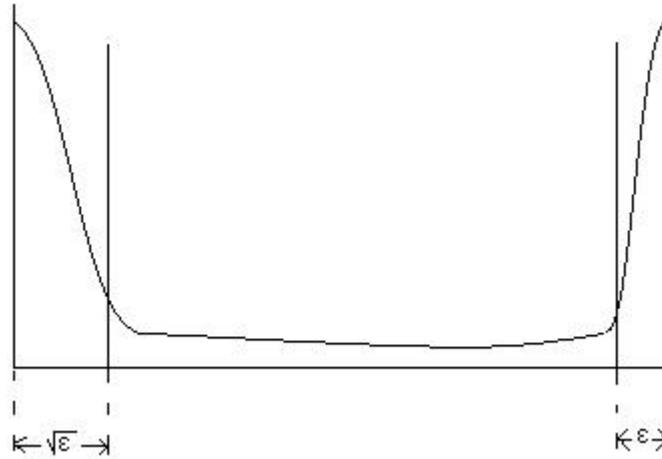
που ισχύει.

F. Ομοιόμορφη προσέγγιση πρώτης τάξης

Μαζεύουμε ότι έχουμε:

$$y_0(x) \equiv 0, \quad Y_0^0(\eta) = e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad Y_0^1(\eta) = e^{-\eta}, \quad \eta = \frac{1-x}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} y_{\pi\rho}(x) &= y_0(x) + Y_0^0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + Y_0^1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) - \lim_{x \rightarrow 1} y_0(x) \\ &= e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$



Σχόλιο: Η απάντηση της άσκησης είναι πανομοιότυπη με αυτή της επόμενης. Γενικότερα ο M. Μπερκέτης παρατήρησε ότι απάντηση για την εξίσωση  $\varepsilon y'' + x^{k+1}y' - y = 0$ ,  $y(0) = y(1) = 1$  είναι επίσης η ίδια, ανεξάρτητα του k. Πώς το εξηγείτε;

### 4.3 Ο ρόλος της πίεσης στη δημιουργία οριακού στρώματος.

Υπευθυμίζουμε το Θεώρημα 3.1 του Logan [L].

Θεωρημα 3.1 ([L], σελ. 74 - 76) *Θεωρείστε το Π.Σ.Τ.*

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = a \quad y(1) = b \end{cases} \quad (92)$$

όπου  $p, q$  συνεχείς στο  $[0,1]$ .

- (i) *Εάν  $p(x) > 0$  στο  $0 \leq x \leq 1$ , τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο  $x=0$*
- (ii) *Εάν  $p(x) < 0$  στο  $0 \leq x \leq 1$ , τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο  $x=1$*

Καταρχήν για να διακρίνουμε αυτές τις περιπτώσεις από φυσικής άποψης βοηθάει να θεωρήσουμε το  $x$  σαν χρόνο οπότε η εξίσωση (92) αντιστοιχεί με έναν ταλαντωτή που εάν μεν  $p > 0$  αντιμετωπίζει αντίσταση στην κίνηση, ενώ αντίθετα εάν  $p < 0$  τότε η κίνηση επιταχύνεται.

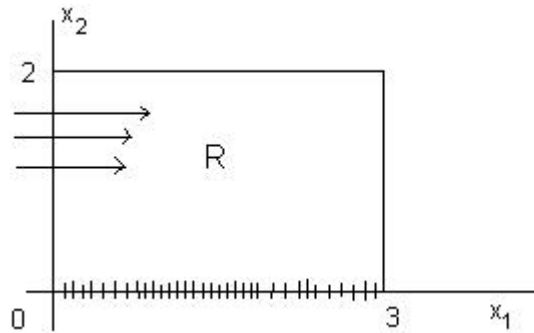
Στην πρώτη περίπτωση η εξίσωση του οριακού στρώματος θα έχει ως λύση ένα αρνητικό εκθετικό ενώ στη δεύτερη ένα θετικό εκθετικό.

Σε κάθε περίπτωση ένα μόνο από το δύο όρια  $\lim_{\eta \rightarrow \infty}$  υπάρχουν.

Είναι φανερό λοιπόν ότι στην πρώτη περίπτωση το οριακό στρώμα πρέπει αναγκαστικά να είναι αριστερά (στο παρελθόν) ώστε η συναρμογή να γίνει στο  $+\infty$ . Αντίθετα στη δεύτερη περίπτωση το όριο που υπάρχει είναι το  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty}$  οπότε αναγκαστικά στο οριακό στρώμα θα βρίσκεται δεξιά (στο μέλλον).

Θα δείξουμε ότι κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την εξίσωση Navier - Stokes, όπου τώρα ο ρόλος της πίεσης παίζει το ρόλο του  $p$  στην (92).

Θεωρούμε το σενάριο ουσιαστικά της λεπίδας που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα (78) στο χωρίο  $R = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 2\}$ .



που περιγράφει μια μόνιμη ροή από αριστερά προς τα δεξιά. Θεωρούμε ότι η κάτω πλευρά του ορθογωνίου είναι το μόνο φυσικό σύνορο της ροής, όπου η ταχύτητα μηδενίζεται:

$$u(x_1, 0) = v(x_1, 0) = 0, \quad \vec{u}(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \quad (93)$$

**Θεώρημα 4.4** ([F], σελ. 54 - 56) Έστω ότι ισχύουν οι εξής υποθέσεις

(i)  $0 \leq u(x_1, x_2) \leq 1$  στο  $R$

(ii)  $|u_{x_1}| \leq M$  στο  $R$

(iii) Η (93)

(iv)  $Re \gg 1$ .

Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- A. Εάν το  $p_{x_1}$  είναι αρκετά αρνητικό<sup>3</sup>, τότε υπάρχει οριακό στρώμα,  
 B. Εάν το  $p_{x_1}$  είναι αρκετά θετικό, τότε δεν υπάρχει οριακό στρώμα.

Σχόλιο

Αυτό το μαθηματικό αποτέλεσμα συμβιβάζεται απόλυτα με τη φυσική. Πράγματι, από το νόμο του Bernoulli,

$$\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + p = const.,$$

έχουμε ότι όσο η πίεση μικραίνει, τόσο η ταχύτητα αυξάνεται. Κατά συνέπεια, εάν  $p_{x_1} < 0$  έπεται ότι η ταχύτητα αυξάνεται ως προς  $x_1$ . Αναμένουμε λοιπόν τη δημιουργία οριακού στρώματος σε αυτή την περίπτωση διότι η ταχύτητα μηδενίζεται στην κάτω πλευρά (και διότι υποθέτουμε ότι η  $x_1$  συνιστώσα της είναι θετική). Αντίθετα, αν η πίεση επιβραδύνει τη ροή τότε δεν αναμένεται οριακό στρώμα.

**Απόδειξη.**

Θα δουλέψουμε με την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του συστήματος (78).

$$\varepsilon^2 \Delta u - p_{x_1} = uu_{x_1} + vu_{x_2}, \quad (94)$$

όπου  $\varepsilon^2 = \frac{1}{Re}$ , και όπου  $p$  έχει αντικατασταθεί από την  $\frac{p}{Re}$  που εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με  $p$ .

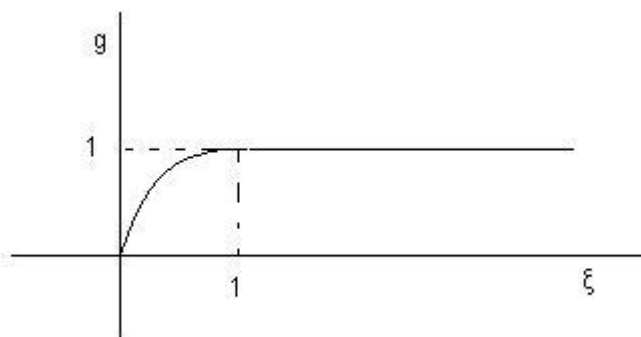
$$u_{x_1} + v_{x_2} = 0. \quad (95)$$

A. Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$g(\xi) := \begin{cases} 2\xi - \xi^2, & 0 \leq \xi < 1 \\ 1, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>αν συμβαίνει  $\max_R < -\alpha K$ ,  $K = 3 + 6\varepsilon^2 + 3M$ .



Παρατηρούμε ότι

$$0 \leq g \leq 1, \quad 0 \leq g' \leq 2, \quad 0 \geq g'' \geq -2 \quad (96)$$

Έστω  $(u, v)$  λύση του συστήματος (78) στο  $R = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 2\}$ , με συνθήκες Dirichlet (93) στο κάτω σύνορο και υποθέσεις (i), (ii), (iii). Τότε για  $Re$  αρκετά μεγάλο ισχύει η εκτίμηση

$$u(x_1, x_2) \geq \underline{u}(x_1, x_2) \quad (97)$$

με

$$\underline{u}(x_1, x_2) := \alpha g(x_1) g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(3 - x_1) g(2 - x_2) \quad (98)$$

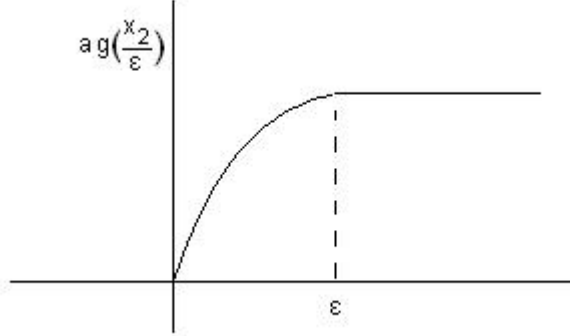
όπου  $\alpha$  θετικός αριθμός που ικανοποιεί

$$\begin{cases} \alpha < \frac{a}{K} \\ -\alpha = \max_R p_{x_1} (< 0), \quad K = 3 + 6\varepsilon^2 + 3M \end{cases} \quad (99)$$

### Σχόλια

Το Λήμμα δείχνει πολύπλοκο αλλά μπορεί να κατανοηθεί αρκετά εύκολα. Πρώτον το  $\alpha$  είναι ένας θετικός αριθμός το μέγεθος του οποίου καθορίζεται από τη σταθερά  $M$  στην υπόθεση (ii) και από το  $\max p_{x_1} (= -\alpha < 0)$ .

Ο σημαντικός όρος στον ορισμό της  $\underline{u}$  είναι ο  $\alpha g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)$ .



που δείχνει ότι η  $u(x_1, x_2)$  έχει συνοριακό στρώμα πάχους  $\varepsilon$ . Οι άλλοι όροι είναι μείζονος σημασίας και έχουν να κάνουν με τις οριακές συνθήκες

$$\underline{u}(x_1, x_2) \Big|_{\partial R} = 0.$$

Η απόδειξη του λήματος κάνει χρήση της Αρχής Μεγίστου ([E]). Η  $\underline{u}$  είναι μια συνάρτηση σύγκρισης, υπολύση για τον τελεστή

$$Lw := \varepsilon^2 \Delta w - uw_{x_1} - vw_{x_2} \tag{100}$$

(βλέπε (102)).

**Απόδειξη.** (Λήματος)

Πρώτα από την (95) μέσω της (ii) παίρνουμε την εκτίμηση

$$|v(x_1, x_2)| \leq Mx_2, \quad \text{στο } R. \tag{101}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε την ποσοτητα

$$L\underline{u} = \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_2^2} \right] - \underline{u}\underline{u}_{x_1} - \underline{v}\underline{u}_{x_2}.$$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_1^2} = \alpha g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \left[ g''(x_1)g(3-x_1) - g'(x_1)g'(3-x_1) + g(x_1)g''(3-x_1) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_2^2} = \alpha g(x_1) g(3-x_1) \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} g''\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) - \frac{2}{\varepsilon^2} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) + \right]$$

$$\left. + g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g''(2-x_2) \right]$$

$$-u\underline{u}_{x_1} = -\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \left[ g'(x_1)g(3-x_1) - g(x_1)g'(3-x_1) \right]$$

$$-u\underline{u}_{x_2} = -\alpha v g(x_1) g(3-x_1) \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) - g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) \right]$$

Κάνοντας χρήση των

(a) της (i)

(b) της (101) ( $\Rightarrow |g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)| \leq 2M\varepsilon$ )

(c) της (96)

Έχουμε:

$$\varepsilon^2 \alpha g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g''\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) g(3-x_1) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\varepsilon^2 \alpha g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) g''(3-x_1) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\varepsilon^2 \alpha g(x_1) g(3-x_1) g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g''(2-x_2) \geq -2\varepsilon^2 \alpha$$

$$\alpha g(x_1) g(3-x_1) g''\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \geq -2\alpha$$

$$-\alpha v g(x_1) g(3-x_1) \frac{1}{\varepsilon} g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) \geq -2\alpha M$$

$$+\alpha v g(x_1) g(3-x_1) g'\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g'(2-x_2) \geq -\alpha M$$

$$-\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2) g'(x_1) g(3-x_1) \geq -\alpha$$

$$\alpha u g\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) g(2-x_2)g(x_1)g'(3-x_1) \geq 0$$

Κατά συνέπεια

$$L\underline{u} \geq -\alpha(3+6\varepsilon^2+3M) =: -\alpha K \quad (102)$$

Έστω

$$w := \underline{u} - u.$$

Από την (94)  $Lu = p_{x_1}$ , από όπου έπεται ότι

$$L(\underline{u} - u) \stackrel{(102)}{\geq} -\alpha K - p_{x_1}$$

Κατά συνέπεια εάν

$$-\alpha K - p_{x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha K > p_{x_1} \quad (103)$$

τότε προκύπτει

$$Lw > 0 \text{ στο } R \quad (104)$$

$$w \Big|_{\partial R} \leq 0 \quad (\text{μέσω της (i)}). \quad (105)$$

Από την (ασθενή) αρχή του μεγίστου συμπαίρνουμε ότι  $w \leq 0$ . Για χάρη του αναγνώστη μου αγνοεί αυτή την αρχή, δίνουμε ένα λεπτομερές αυτοδύναμο επιχείρημα. Έστω λοιπόν ότι η  $w$  έχει θετικό μέγιστο στο  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του  $R$ .

Τότε θα ισχύει

$$w_{x_1} = w_{x_2} = 0, \quad w^{x_1 x_1} \leq 0, \quad w_{x_2 x_2} \leq 0, \quad x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

που αντίκειται όμως με την (104). Κατά συνέπεια, το μέγιστο της  $w$  στο  $R$  δεν είναι δυνατόν να είναι θετικό,

$$w \leq 0 \Leftrightarrow \underline{u} \leq u \text{ στο } R. \quad (106)$$

Η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

□



Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη του A.

Συγκεντρωνόμαστε στο τετράγωνο  $S = \{1 < x < 2, 0 < y < 1\}$  όπου  $\bar{u} = \alpha g\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$  διότι οι άλλοι παράγοντες στην (98) είναι ίσοι με τη μονάδα. Παρατηρούμε ότι η  $u$  μηδενίζεται στην κάτω πλευρά του  $S$ , αλλά αυξάνεται απότομα και σε απόσταση  $\varepsilon$  ξεπερνά την τιμή  $\alpha$ . Επίσης βλέπουμε ότι η δημιουργία αυτού του οριακού στρώματος συντελείται μεταξύ της εισόδου της ροής από την αριστερή πλευρά του ορθογωνίου  $R$  και της άφιξης της ροής στην αριστερή πλευρά του τετραγώνου  $S$ .

Η απόδειξη του A. είναι πλήρης.

□

B.

Θεωρείστε το ορθογώνιο  $R' = \{0 < x_1 < 3, 0 < x_2 < 1\}$ .

Ορίζουμε την

$$\bar{u}(x_1, x_2) := \left\{ x_2 g(x_1) g(3 - x_1) + 2 - g(x_1) - g(3 - x_1) \right\} \quad (107)$$

στο  $R'$ , ως υπερλύση που θα δώσει το επάνω φράγμα.

**Άσκηση 4.5** Δείξτε ότι κάτω από τις υποθέσεις (i), (ii), (iii) της εκφώνησης του θεωρήματος, υπάρχει σταθερά  $K > 0$  ανεξάρτητη του  $\varepsilon$ , τέτοια ώστε στο  $R'$  ισχύει η

$$L\bar{u}(x_1, x_2) \leq K. \quad (108)$$

Έστω τώρα

$$p_{x_1} > K. \quad (109)$$

Έπεται ότι

$$L\bar{u} \leq p_{x_1} = Lu \quad (110)$$

**Άσκηση 4.6** (a) Δείξτε ότι στις πλευρές  $x_1 = 0, x_1 = 3$  του  $R'$  ισχύει  $\bar{u} = 1$

(b) Δείξτε ότι στην επάνω πλευρα του  $R'$  ισχύει  $\bar{u} = 1$

(c) Δείξτε ότι στην κάτω πλευρα του  $R'$  ισχύει  $\bar{u} \geq 0$ .

Κατά συνέπεια

$$\bar{u} \geq u \quad \text{στο } \partial R'. \quad (111)$$

**Άσκηση 4.7** Δείξτε με ένα επιχείρημα αρχής μεγίστου πως

$$\bar{u} \geq u \quad \text{στο } R'. \quad (112)$$

Κατά συνέπεια, για  $1 < x_1 < 2$ ,  $\bar{u} = x_2$  η (111) δίνει

$$u(x_1, x_2) \leq x_2, \quad x - 1 \in [1, 2]$$

από όπου προκύπτει ότι δεν έχουμε οριακό στρώμα. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

□

Υποδείξεις για τις ασκήσεις

$$\varepsilon x^4 + \varepsilon x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon x^2 + \varepsilon x^3 = (x - 1)^2$$

I. Λύσεις πεπερασμένες όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F(\varepsilon, 0) = \varepsilon x^4 + \varepsilon x^3 - (x - 1)^2 \Rightarrow x = 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

Ανάλυση (ξεδίπλωμα της διπλής ρίζας): Θέτουμε  $v := \varepsilon^{\frac{1}{2}}q$  (Διότι παρατηρούμε ότι για  $v \sim 0$  έχουμε  $\varepsilon \sim v^2$ ). Αντικατάσταση δίνει

$$\varepsilon(1 + \varepsilon)^4 + (1 + \varepsilon)^3 - v^2 = 0. \quad \text{Με απλοποίηση:}$$

$$F(\varepsilon, q) = (1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^4 + \varepsilon(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q)^3 - q^2 = 0$$

$$F(0, q) = 2 - q = 0 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$F_q(0, \pm\sqrt{2}) \neq 0$ . Κατά συνέπεια παίρνουμε 2 λύσεις:

$$v_{\pm}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon), \quad q_{\pm}(0) = \sqrt{2} \Rightarrow x_{\pm}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon)$$

II. Λύσεις μη πεπερασμένες όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$

Εισάγουμε το μετασχηματισμό  $x =: \frac{1}{w}$  ( $x \approx \infty \Leftrightarrow w \approx 0$ ), οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$w^4 - 2w^3 + w^2 - \varepsilon w - \varepsilon = 0. \quad \text{Συνεχίστε όπως παλιά.} \quad (113)$$

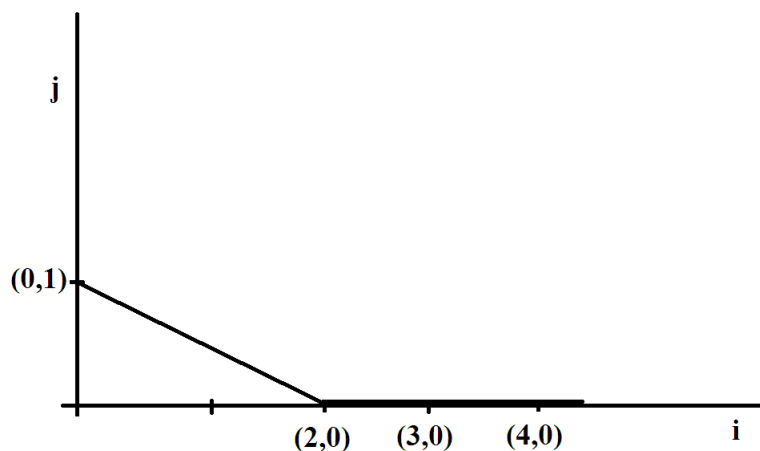
Καινούρια πληροφορία παίρνουμε μόνο για  $w \approx 0$  (γιατί;).

Απάντηση:  $x_{\pm}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_{\pm}(\varepsilon)$ ,  $q_{\pm}(0) = \pm\sqrt{2}$

$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} + \dots, \quad x_4(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{2}{3} - \dots$$

Λεπτομέρειες ( $F(z, w) = w^4 - 2w^3 + w^2 - zw - z = 0$ )

Το πολύγωνο του Νεύτωνα έχει ως εξής:



Έχουμε λοιπόν 2 λύσεις  $z^{\frac{1}{2}}v_+(\cdot)$ ,  $z^{\frac{1}{2}}v_-(\cdot)$ . Αντικατάσταση απλοποίηση δίνει  $zv^4 - 2z^{\frac{1}{2}}v^3 + v^2 - z^{\frac{1}{2}}v - 1 = 0$ . Κατά συνέπεια  $v_{\pm} = v_{\pm}(z^{\frac{1}{2}})$ . Θέτουμε:  $s := z^{\frac{1}{2}}$ . Τότε

$$F(s, v) = s^2v^4 - 2sv^3 + v^2 - sv - 1 = 0,$$

$$F(0, v) = v^2 - 1, \quad \Rightarrow \quad v_{\pm}(0) = \pm 1.$$

$F_s(0, \pm 1) = \pm 2 \neq 0 \Rightarrow v_{\pm}(s)$  ορίζονται. Υπολογίζουμε τον επόμενο όρο

$$\frac{d}{ds} \left( s^2v^4(s) - 2sv^3(s) + v^2(s) - sv(s) - 1 \right) = 0,$$

κατά συνέπεια για  $s = 0$  παίρνουμε  $v'(s) = \frac{2v^2(0) + 1}{2} = \frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{v_{\pm}(\sqrt{\varepsilon})} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{v_{\pm}(0)} - \frac{1}{(v_{\pm}(0))^2} v'_{\pm}(0) \sqrt{\varepsilon} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \pm 1 - \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon} + \dots \right] = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

### Λύση άσκησης

A.  $\phi(x, \varepsilon) = 0 \Rightarrow x = x(\varepsilon)$ ,  $x(\varepsilon) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2$ ,  $\phi(x_0, 0) = 0$ .

$$\frac{d}{d\varepsilon} \phi(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \Rightarrow \phi_x + d_{\varepsilon} = 0 \Rightarrow x'(0) = -\frac{\phi(x_0, 0)}{\phi_x(x_0, 0)}$$

Συνθήκη:  $\phi_x(x_0, 0) \neq 0$ .

Επόμενος όρος:  $\frac{d}{d\varepsilon} [\phi_x(x(\varepsilon), \varepsilon)x'(\varepsilon) + \phi_{\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)] = 0 \Rightarrow$

$$(\phi_{xx}x' + \phi_{x\varepsilon})x' + \phi_x x'' + \phi_{\varepsilon\varepsilon} = 0$$

$$x''(0) = \frac{-\phi_{\varepsilon\varepsilon}(x_0, 0) - x'_0 \{ \phi_{xx}(x_0, 0)x'(0) + 2\phi_{\varepsilon x}(x_0, 0) \}}{\phi_x(x_0, 0)}$$

$$x_1 = x'(0), \quad x_2 = \frac{x''(0)}{2!}$$

Εφαρμογή:  $\phi(x, \varepsilon) = e^{\varepsilon x} - (x^2 - 1)$ ,  $x_0 = \pm\sqrt{2}$ .

□

Οι επόμενες ασκήσεις είναι επάνω στη θεωρία διακλάδωσης. Υπενθυμίζουμε τις ασκήσεις στις μελετάται η εξίσωση:

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{114}$$

ως προς  $x$  με  $\lambda$  παράμετρο στο  $\mathbb{R}$ . Εκεί εισάγουμε το σημείο διακλάδωσης  $(x_0, \lambda_0)$  στην περιοχή του οποίου ο αριθμός των πραγματικών λύσεων της

(114)  $n(\lambda)$  αλλάζει σε περιοχή του  $\lambda = \lambda_0$ . Παρατηρήσαμε ότι η αναγκαία συνθήκη ώστε το  $(x_0, \lambda_0)$  να είναι σημείο διακλάδωσης είναι:  $F(x_0, \lambda_0) = 0$ ,  $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$ . Στις επόμενες ασκήσεις θεωρούμε το γενικότερο πρόβλημα όπου έχουμε περισσότερες παραμέτρους.

Εάν  $\lambda = (b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$  τότε μας ενδιαφέρει η μελέτη της επιφάνειας διακλάδωσης, δηλαδή της ταυτόχρονης επίλυσης των εξισώσεων

$$F(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0, \quad b \in \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}$$

$$F_x(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0$$

2 εξισώσεων  $k+1$  μεταβλητών αφαιρούν 2 βαθμούς ελευθερίας και κατά συνέπεια το σύνολο των λύσεων είναι  $(k+1) - 2 = k - 1$  διαστάσεων. Εάν  $k=2$  έχουμε καμπύλη και γενικότερα εάν  $k > 2$  έχουμε υπερεπιφάνεια  $k-1$  διαστάσεων.

Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει η πολυωνυμική περίπτωση

$$F(x, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}) = x^k - (b_0 + b_1x + \dots + b_{k-2}x^{k-2}) = 0 \quad (115)$$

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να δείξει ότι ο συντελεστής το  $x^{k-1}$  μπορεί να επιλεγεί ίσος με το μηδέν - μέσω μιας μεταφοράς).

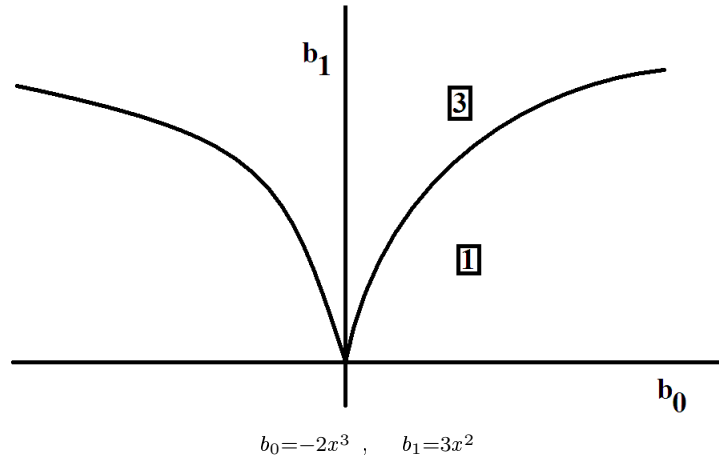
**Παράδειγμα 4.8** ( $k=3$ )

$$(1) \quad x^3 - (b_0 + b_1x) = 0$$

$$(2) \quad 3x^3 - b_1 = 0$$

(2)  $\Rightarrow b_1 = 3x^2$ . Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$x^3 - (b_0 + 3x^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -2x^3.$$



Στο σχήμα έχουμε ότι η επιφάνεια διακλάδωσης είναι μια αιχμή που προκύπτει από την απαλοιφή του  $x$ . Στο χώρο των παραμέτρων  $b_0, b_1$  διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: από επάνω από την αιχμή έχουμε 3 λύσεις ενώ από κάτω έχουμε 1 λύση. Αυτή η πληροφορία για τον αριθμό των λύσεων προκύπτει ως εξής: Φιξάρουμε το  $b_0$  και μετβάλλουμε το  $b_1$ . Είναι σαφές ότι η εξίσωση

$$x^3 - (b_0 + b_1 x) = x^3 - b_1 \left( \frac{b_0}{b_1} + x \right) = 0$$

για  $b_1 \gg 1$  προσεγγίζεται από την  $x^3 - b_1 x = 0$ , η οποία έχει 3 λύσεις. Εφόσον ο αριθμός των λύσεων αλλάζει μόνο εάν διασχίσουμε την επιφάνεια διακλάδωσης καταλήγουμε ότι από επάνω έχουμε 3 λύσεις. Παρόμοια επιχειρηματολογούμε για  $b_1 \ll -1$  και έτσι καταλήγουμε στο παραπάνω σχήμα.

Στις επόμενες ασκήσεις μελετάμε την εξίσωση

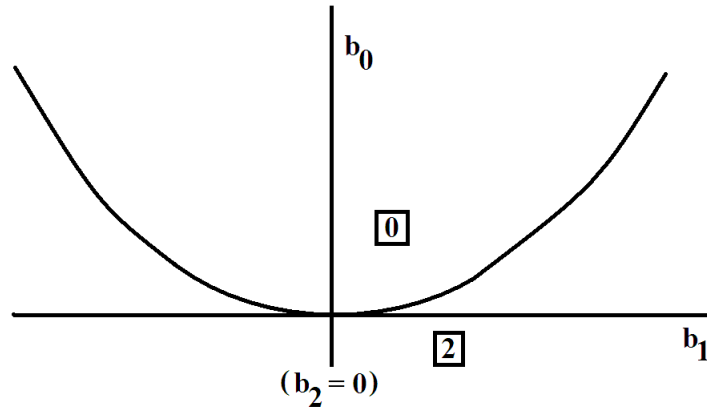
$$(1) \quad P(x, b_0, b_1, b_2) = x^4 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0.$$

Η επιφάνεια διακλάδωσης δίνεται από την ταυτόχρονη επίλυση της (1) και της

$$(2) \quad \frac{\partial P(x, b_0, b_1, b_2)}{\partial x} = 4x^3 + 2b_2 x + b_1 = 0.$$

Έχουμε  $4-2=2$  βαθμούς ελευθερίας. Κατά συνέπεια στο χώρο των παραμέτρων  $(b_0, b_1, b_2)$  η επιφάνεια διακλάδωσης είναι πραγματική επιφάνεια. Στις επόμενες ασκήσεις μελετάμε κάποιες τομές αυτής της επιφάνειας.

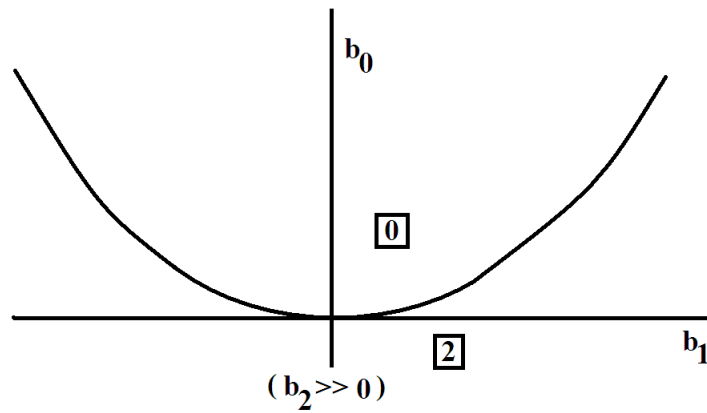
**Άσκηση 4.9**



$$b_0 = 3 \left( \frac{b_1}{4} \right)^{\frac{4}{3}}$$

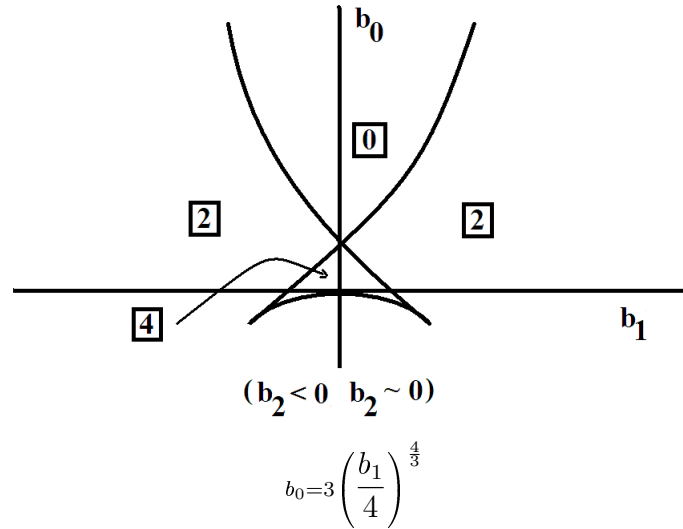
Δείξτε την παραπάνω τομή,  $b_2 = 0$ , φιξαρισμένο.

**Άσκηση 4.10**

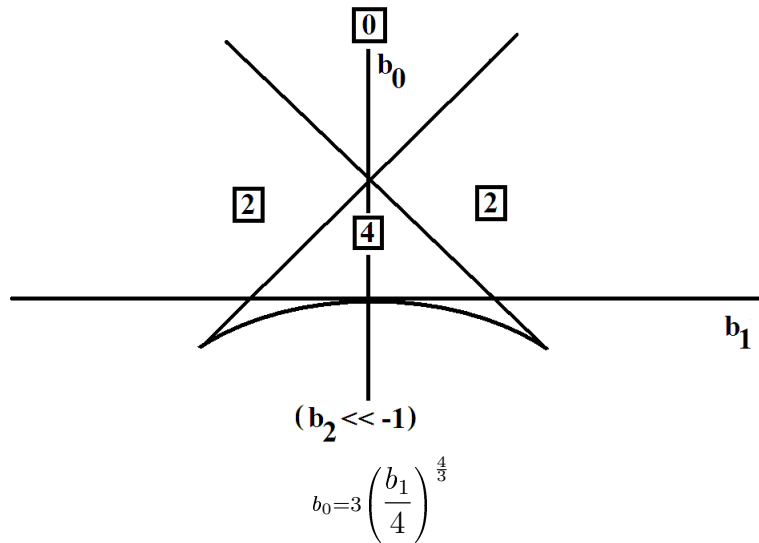


$$b_0 \sim k b_1^2$$

Άσκηση 4.11 (Ουρά χελιδονιού I)



Άσκηση 4.12 (Ουρά χελιδονιού II)



Υποδείξεις για τις ασκήσεις (Γεωμετρική λύση)

θέσατε:  $p_1(x) = x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$

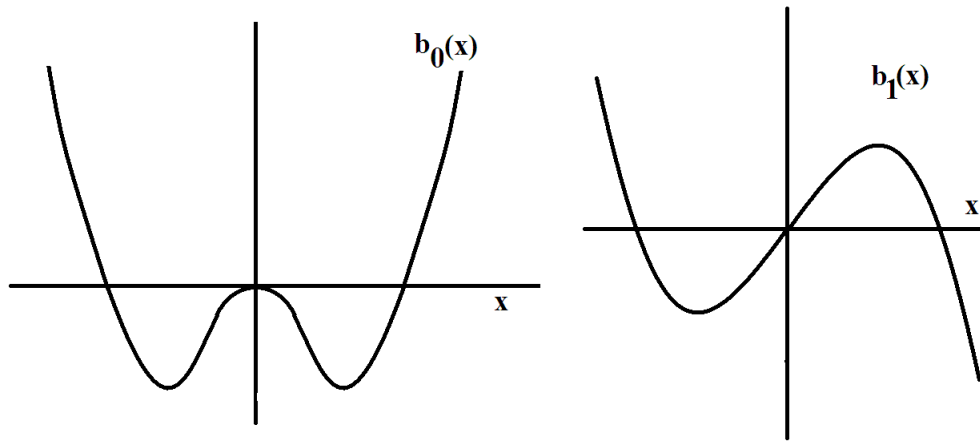
$p_2(x) = 4x^3 + 2b_2x + b_1 = 0, \quad b_2 < 0$



$$p_1(x) = p_2(x) = 0 \Leftrightarrow p_1(x) - xp_2(x) = p_2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b_0 = 3x^4 + b_2x^2 \\ b_1 = -4x^3 - 2b_2x \end{cases} \quad (116)$$

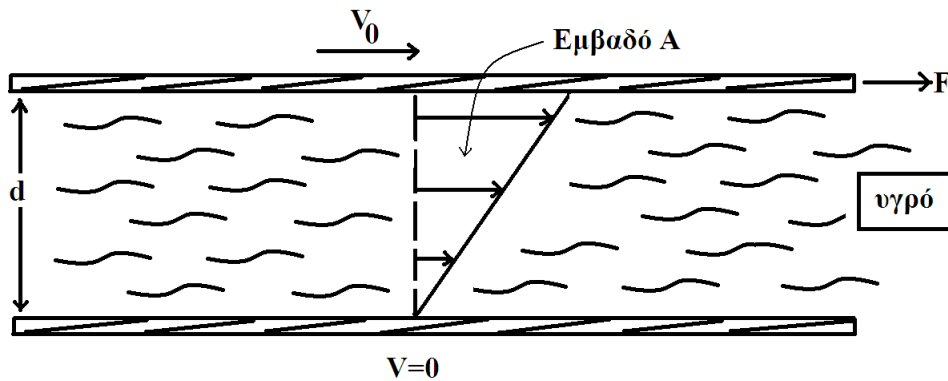
Οι εξισώσεις (116) είναι παραμετρική μορφή της καμπύλης  $(b_0, b_1)$ . Είναι χρήσιμα τα κάτω γραφήματα στην ανάλυση του προβλήματος.



□

Σχόλια για τη φυσική σημασία του ιξώδους και του αριθμού Reynolds.

a) Θεωρείστε το εξής πείραμα. Έχουμε δύο στερεές επίπεδες ζυφάνειες με υγρό ενδιάμεσα όπως στο σχήμα

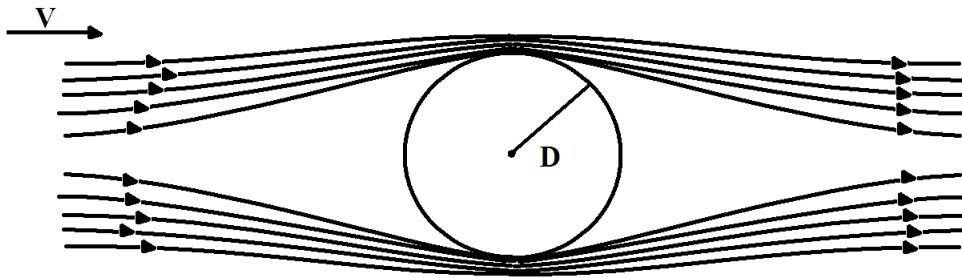


Κρατάμε την κάτω επιφάνεια ακίνητη ενώ κινούμε την από πάνω με μια μικρή ταχύτητα  $v_0$ . Η δύναμη που χρειάζεται για να συντηρήσει αυτή την κίνηση είναι ανάλογη του εμβαδού των επιφανειών και του  $\frac{v_0}{d}$ , όπου  $d$  η απόσταση μεταξύ των επιφανειών. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v_0}{d}$$

Η σταθερά αναλογίας εδώ δεν είναι τίποτα άλλο από το συντελεστή ιξώδους που επιλέγαμε στην σχετική παράγραφο.

b) Θεωρείστε τώρα ένα άλλο πείραμα: την ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού ταχύτητας  $V$  μακριά γύρω από έναν κύλινδρο,



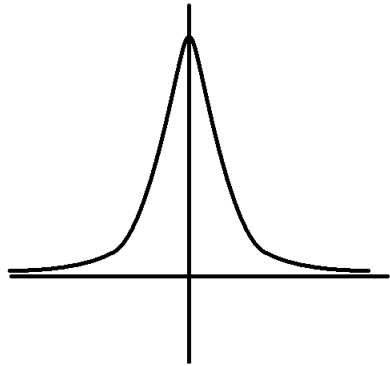
Έχουμε 4 παραμέτρους στο πρόβλημα:  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $D$ , και  $V$ . Το αναμενόμενο είναι ότι για να προσδιοριστεί η ροή θα χρειαστεί να γνωρίζουμε τις τιμές όλων αυτών των παραμέτρων. Είναι εντυπωσιακό ότι για να προσδιοριστεί η ροή χρειάζεται μια μόνο παράμετρος που ορίζει τον αριθμό Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

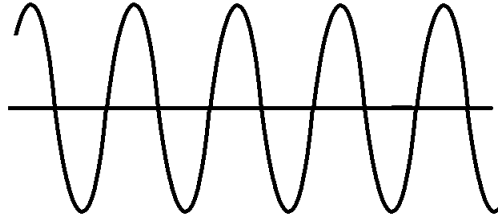
□

## 5 Ο Μετασχηματισμός του Liouville - Η Μέθοδος WKB

Στα προβλήματα ιδιόμορφων διαταραχών έχουμε χονδρικά δύο ειδών φαινόμενα:



(I) Φαινόμενα Συγκέντρωσης



(II) Φαινόμενα Ταλάντωσης

Το οριακό στρώμα είναι της κατηγορίας (I). Το απλό παράδειγμα

$$\varepsilon^2 y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (117)$$

που έχει λύση

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{2}} \left[ e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x-2}{\varepsilon}} \right]}$$

αντιπροσωπεύει την (I). Παρατηρούμε ότι η (117) μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση τείνει στην  $\delta$  του Dirac:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x) \chi_{[0,1]}(x) = \delta(x)$$

( $\chi_{[0,1]}$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $[0,1]$ )

Απλό παράδειγμα ταλάντωσης (κατηγορία (II)) παρέχεται από το πρόβλημα

$$\varepsilon y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (118)$$

που έχει λύση αν  $\varepsilon \neq (n\pi)^{-2}$

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\sin\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (119)$$

Φυσικά είναι δυνατόν να συνυπάρχουν και τα δύο φαινόμενα. Η εξίσωση του Airy προσφέρει ένα τέτοιο παράδειγμα,

$$\varepsilon^2 y'' - xy = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (120)$$

Πράγματι για  $x \in [-1, 0]$  η (120) συμπεριφέρεται σαν την (118), ενώ για  $x \in (0, 1]$  σαν την (119).

Ορμώμενοι από την εμφάνιση των εκθετικών (πραγματικών ή φανταστικών) τουλάχιστον στην περίπτωση τελεστών με σταθερούς συντελεστές, ο Liouville προτείνει τον μετασχηματισμό

$$y(x) = e^{\frac{S(x)}{\delta}}$$

για τη μελέτη του

$$\varepsilon^2 y'' = Q(x)y,$$

όπου  $\delta = \delta(\varepsilon)$  υπό προσδιορισμό.

### Παράδειγμα 5.1 (Εξίσωση του Schrödinger)

$$\varepsilon y'' = Q(x)y, \quad Q(x) \neq 0$$

Αντικαθιστούμε

$$y(x) = e^{\frac{1}{\delta} S(x)} \sim e^{\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)} \sim e^{\frac{1}{\delta} (S_0(x) + \delta S_1(x) + \dots)}$$

Έχουμε

$$y' \sim \left( \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S'_n \right) \exp \left( \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n \right)$$

$$y'' \sim \left[ \left( \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S''_n \right) + \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S''_n \right] \exp \left( \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n \right)$$

Αντικατάσταση δίνει

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'' + \frac{2\varepsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_0'' + \dots = Q(x)$$

Ο μεγαλύτερος όρος στο 1ο μέλος είναι  $\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}$  που πρέπει να εξισορροπήσει το 2ο μέλος.

Κατά συνέπεια  $\delta \sim \varepsilon$  και παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} S_0'^2 = Q \\ 2S_0'S_1' + s_0'' = 0 \\ 2S_0'S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{\infty} S_j'S_{n-j}' = 0, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (121)$$

Η (121)(i) λέγεται εξίσωση της εικόνας, ορολογία που προέρχεται από τη γεωμετρική οπτική. Η λύση της είναι

$$S_0(x) = \pm \int_a^b \sqrt{Q(t)} dt \quad (122)$$

Η (121)(ii) λέγεται εξίσωση μεταφοράς. Η λύση της προκύπτει ως εξής:

$$2S_0'S_1' + S_0'' = 0 \Rightarrow S_1' = -\frac{1}{2} \frac{S_0''}{S_0'}$$

από όπου ολοκληρώνοντας, modulo κάποια σταθερά, παίρνουμε

$$S_1 = -\frac{1}{2} \ln S_0' \stackrel{(122)}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{Q(x)} = \ln [Q(x)]^{-\frac{1}{4}}$$

Κατά συνέπεια λαμβάνοντας υπόψη τους δύο μόνο όρους έχουμε μια προσέγγιση

$$\begin{aligned} y_{WKB}(x) \sim c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[ \frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt \right] + \\ + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt \right] \end{aligned} \quad (123)$$

όπως το  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$c_1, c_2$  σταθερές και  $a$  κάποιο σημείο.

Εφαρμογές της (123)

$$a) \quad \varepsilon^2 y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

εδώ  $Q(x) = -1$ ,  $S_0(x) = \pm ix$ ,  $S_1(x) \equiv 0$ ,  $y \sim e^{\pm \frac{1}{\varepsilon} ix}$ , άρα η γενική λύση είναι

$$y_{WKB} = c_1 \sin \frac{x}{\varepsilon} + c_2 \sim \frac{x}{\varepsilon},$$

από όπου με χρήση των συνοριακών συνθηκών παίρνουμε την (119).

Είναι εντυπωσιακό ότι παίρνοντας μόνο έναν όρο η WKB προσέγγιση σε αυτή την περίπτωση δίνει την ακριβή λύση!

Εξαγωγή της προσέγγισης του οριακού στρώματος

$$(*) \quad \varepsilon y'' + a(x) + y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = A, \quad y(1) = B$$

Υπόθεση:  $a(x) > 0$  στο  $[0,1]$ .

Επιλέγουμε 2 όρους του αναπτύγματος

$$y \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1}$$

$$y' \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)$$

$$y'' \sim e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} S_0'' + S_1'' \right]$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση και απλοποίηση των εκθετικών δίνει

$$0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} S_0'' + \frac{1}{\varepsilon^2} S_0'^2 + S_1'^2 + S_1' + \frac{2}{\varepsilon} S_0' S_1' \right] + a \left[ \frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right] + b$$

Οδηγούμαστε λοιπόν εξισώνοντας συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του  $\varepsilon$

$$(i) \quad \varepsilon^{-1} : \quad S_0' + a S_0' = 0$$

$$(ii) \quad \varepsilon^0 : \quad S_0'' + 2 S_0' S_1' + a S_1' + b = 0$$

$$(i) \Rightarrow S'_0 = 0, \quad S'_0 = -a$$

Η πρώτη επιλογή δίνει στην (ii)

$$aS'_1 + b = 0 \Rightarrow S_1 = - \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi$$

Η δεύτερη επιλογή δίνει

$$-a + 2(-a)S'_1 + aS'_1 + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$a' + aS'_1 = b \Leftrightarrow$$

$$S'_1 = \frac{b}{a} - \frac{a'}{a} \Leftrightarrow S_1 = \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \ln a(x).$$

Πάirnουμε τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$y_1(x) \sim e^{\frac{S_0+S_1}{\varepsilon}+S_1} = e^{S_1(x)} = e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}$$

$$y_2(x) \sim e^{\frac{S_0+S_1}{\varepsilon}+S_1} = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \ln a(\xi)}$$

$$= \frac{1}{a(x)} e^{\left[ \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi \right]}.$$

Κατά συνέπεια η γενική λύση είναι ο γραμμικός συνδυασμός

$$y(x) \sim c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Προσδιρίζουμε τις σταθερές  $c_1$  και  $c_2$ :

$$A = y(0) = c_1 + \frac{c_2}{a(0)} \tag{124}$$

$$B = c_1 e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{c_2}{a(1)} e^{\left[ \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi \right]}$$

Αγνοώντας τον αμελητέο όρο τάξης  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$  (η συνβιβαστότητα αυτή θα επιβεβαιωθεί εκ των υστέρων) έχουμε

$$B = c_1 e^{-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{c_2}{a(1)} \quad (125)$$

Από τις (124), (125) παίρνουμε

$$y_{WK_B}(x) = B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} + \frac{a(0)}{a(x)} \left[ A - B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} \right] e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi}$$

Ο 2ος όρος συνεισφέρει μόνο εάν  $x = O(\varepsilon)$ . Κατά συνέπεια έχουμε την απλοποιημένη προσέγγιση

$$y_{WK_B}(x) = B e^{\left[ \int_x^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi \right]} + \left[ A - B e^{\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} \right] e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}}$$

**Άσκηση 5.2** Δείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon = \delta \quad (\text{Dirac συνάρτηση,})$$

όπου  $y_\varepsilon$  όπως στην (117). Δηλαδή επαληθεύσατε ότι για κάθε  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχή συνάρτηση, έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x y_\varepsilon(x) \phi(x) dx = \phi(0).$$

$$\left( \text{Υπόδειξη: } \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x y_\varepsilon(x) dx \rightarrow 1 \text{ όπως το } \varepsilon \rightarrow 0 \right)$$

**Άσκηση 5.3** Τι συμβαίνει με την (118) στην περίπτωση όπου  $\varepsilon = (n\pi)^{-2}$ ; (Υπόδειξη: βλ. 9.4 στο [AK])

**Άσκηση 5.4** Θεωρείσατε το πρόβλημα (\*), εφαρμογή της (123). Θα υποθέσουμε τη λύση στη γενικότερη μορφή

$$y = e^{\frac{1}{\delta} S(x)}, \quad S(x) = S_0(x) + \delta S_1(x)$$

και κάνοντας χρήση της αρχής εξισορρόπησης θα δείξουμε ότι  $\delta = \varepsilon$ . Δείξτε ότι αντιατάσταση στην (\*) οδηγεί στην



$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} S_0'^2 + \frac{2\varepsilon}{de^2} S_0'^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} S_0'' + \frac{a(x)}{\delta} S_0' + a(x) S_1' + b(x) + \dots = 0$$

όπου οι ... υποδηλώνουν όρους αμελητέους. Από τους πρώτους 3 όρους ο μεγαλύτερος είναι ο  $\frac{\varepsilon}{\delta^2} S_0'^2$  που θα πρέπει να εξισορροπήσει τον μεγαλύτερο από τους υπόλοιπους 3 όρους:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \varepsilon \sim \delta$$

Χάρην απλότητας επιλέγουμε  $\varepsilon = \delta$ .

### Υποδείξεις για παρόμοιες ασκήσεις

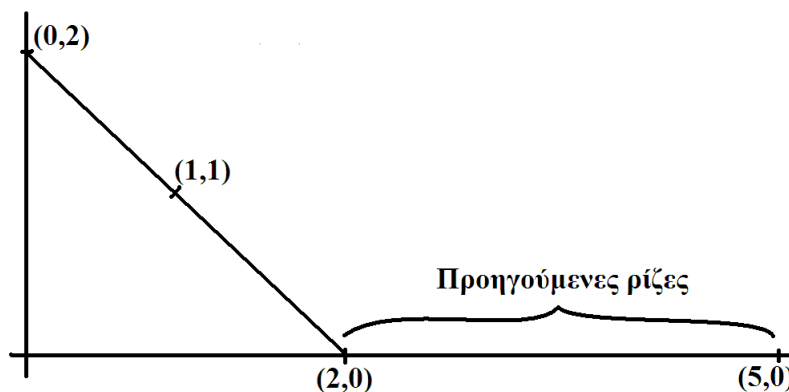
$$1. \varepsilon^2 x^5 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \Rightarrow \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 = x^3 - 8 \Rightarrow$$

$$I. F(\varepsilon, x) = \varepsilon x^5 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8) = 0. F(0, x) = 0 \Rightarrow x = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$F_x(0, x) \Big|_{x=2e^{\frac{2k\pi i}{3}}} \neq 0$$

$$\text{Πραγματική } x = 2 \Rightarrow x_1(\varepsilon) = 2 + 2\varepsilon + \dots$$

$$II. x = \frac{1}{w} \Rightarrow \varepsilon^2 \left(\frac{1}{w}\right)^5 - \varepsilon \left(\frac{1}{w}\right)^4 - \left(\frac{1}{w}\right)^3 + 8 \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon w - w^2 + 8w^5 = 0$$



$$L_1 = 1, n_1 = 1 \Rightarrow w = zv$$

$$F(z, v) = z^2 - z^2v - z^2v^2 + 8z^5v^5 = 0,$$

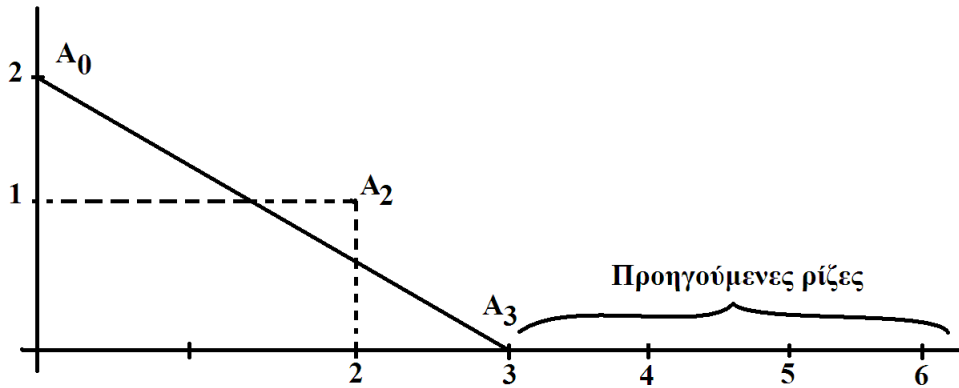
$$F(0, v) = 1 - v - v^2 = 0 \Rightarrow v_{1,2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$w = z \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + cz \right] \Rightarrow x = \frac{1}{\varepsilon \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + c\varepsilon \right]} = \frac{1}{A\varepsilon} - \frac{c}{A^2} + \dots$$

$$2. \quad \varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - (x^3 - 8), \quad F(0, x) = 0 \Rightarrow x = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\text{Πραγματική ρίζα } x = 2 \Rightarrow x_1(\varepsilon) = 2 - \frac{4\varepsilon}{3} + \dots$$

$$II. \quad x = \frac{1}{w} \Rightarrow 8w^6 - w^3 - \varepsilon w^2 + \varepsilon^2 = 0$$



$$L_1 = \frac{2}{3}, \quad n = 3.$$

$$A_0 = (0, 2), \quad A_2 = (2, 1), \quad A_3 = (3, 0), \quad A_6 = (6, 0)$$

## References

- [AK] Αλικάκος, Καλογερόπουλος, *Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική*, 2003
- [A] Arnold, *Ordinary differential equations*
- [BO] Bender & Orszag, *Asymptotic methods and perturbation theory*,
- [CH] Chow & Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer, 1982
- [E] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in advanced mathematics, AMS, 19
- [Fe] Feynman, *Lecture notes in physics*, Vol.2
- [F] Fife, *A gentle introduction to the physics and mathematics of incompressible flow*, Lecture notes (Utah preprint)
- [H] Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer Lecture notes, #840
- [HS] Hirsch & Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*
- [L] J. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, (Μετάφραση) 2002
- [N] Nishiura, *Dynamics of patterns*
- [W] Walker, *Algebraic curves*