Ασκηση

Θεωρειστε την van der Pol

$$(1) \quad \ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x}(1-x^2), \quad x(0)=\alpha, \quad \dot{x}(0)=0$$

α) Εφαρμοζοντας την Μεθοδο Μεσων Ορων (Averaging, Θεωρημα σ 8) δειξτε οτι η λυση του ΠΑΤ (1) ειναι της μορφης

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1-Ae^{-\varepsilon t}}} \cos(t+\theta_0) + O(\varepsilon),$$

για $0 \le t \le C/\varepsilon$, C καταλληλη σταθερα

οπου $A = 1 - \frac{4}{\alpha^2}$, $\theta_0 = 0$

β) Συγκρινατε με την μεθοδο της Διαλεξης 3.
Ειδικα απαντησατε στο κατω ποσον ειναι δυνατον η Μεθ. Μεσων Ορων να δωσει την υπαρξη περιοδικης λυσης της (1) για καταλληλο α.

#

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Παραδειγμα

$$(2) \quad \varepsilon y'' + (1+\varepsilon)y' + y = 0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$$
$$y = y(x), \quad 0 \le x \le 1$$

Στοχος: Κατασκευη προσεγγισεων $\hat{y}_\varepsilon(x)$ ομοιομορφων στο $[0,1]$:

$$\max_{[0,1]} |y_\varepsilon(x) - \hat{y}_\varepsilon(x)| \le C\varepsilon$$

Ιδιόμορφη Διαταραχή

Ο τελεστής $L_{\varepsilon} y = \varepsilon y'' + (1+\varepsilon) y' + y \Big|_{\varepsilon=0}$

$= y' + y$ (Οριακός Τελεστής εξωτερικός)

δεν είναι αντιστρέψιμος:

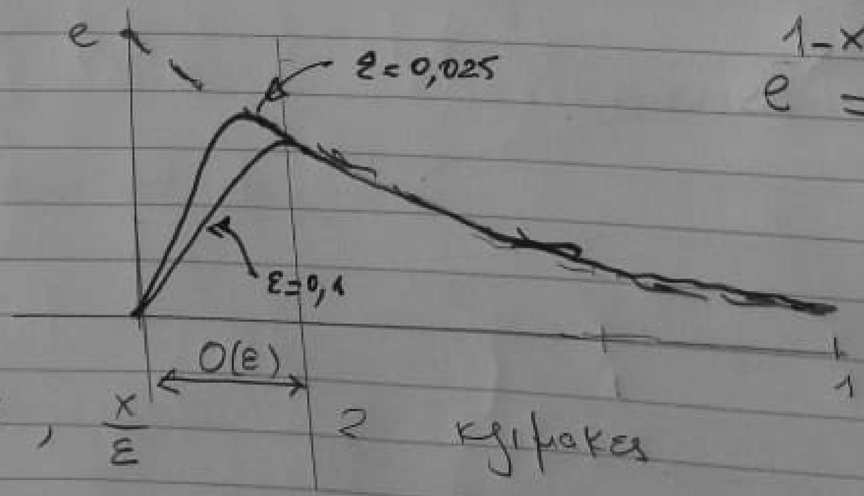
(3) $y' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1.$

δεν έχει λύση (2 Σ.Σ., 1ης τάξης)

Παρατήρηση (Συνύπαρξη 2 κλιμάκων σε μια λύση)

Η λύση της (2) είναι

(4) $$y_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$



e^{1-x} = - - -

$x, \; \frac{x}{\varepsilon}$ 2 κλίμακες

η = διαστατική μεταβλητή $= \frac{x}{\varepsilon}$ (stretched variable, blow-up variable)

(στο $x=0$, γενικότερα $\eta = \frac{x - x_0}{\varepsilon}$)

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{1}{\varepsilon}\quad,\quad\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dy^2}\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$y_\varepsilon(x)=y_\varepsilon(\varepsilon y)=:Y_\varepsilon(y),\qquad 0\le y\le\frac{1}{\varepsilon}$$

Η (2) παιρνει την μορφη

$$(5)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{d^2Y_\varepsilon}{dy^2}+\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right)\dfrac{dY_\varepsilon}{dy}+Y_\varepsilon=0\\[2mm] Y_\varepsilon(0)=0,\qquad Y_\varepsilon\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad L_{\varepsilon\sigma}Y=\frac{d^2Y}{dy^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\frac{dY}{dy}+\varepsilon Y\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{dY}{dy}\qquad,\quad y\in[0,\infty)$$

(Οριακος Εσωτερικος Τελεστης)

δεν ειναι αντιστρεψιμος:

$$(6)\qquad Y_{yy}+Y_y=F\quad,\ Y(0)=0,\quad Y(\infty)=1$$

εχει πυρηνα $(1-e^{-y})$ $(F=0.)$.

Το Προβλημα δεν λυνεται με μια αλλαγη μεταβλητων, $x\to y$ - Χρειαζονται και οι δυο μεταβλητες.

$$\frac{e^{-x}-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{e^{-x}}{e^{-1}} = e^{1-x} =: y_{\varepsilon\xi}(x)$$

$$\frac{e^{-\varepsilon\eta}-e^{-\eta}}{e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e-e^{1-\eta} =: Y_{\varepsilon\sigma}(\eta)$$

Παρατηρηση

Απο Σχημα μεταβολη γρηγορη Κοντα στο 0

$\Rightarrow y''$ μεγαλη εντος των οριακων.

Μεταβολη Αργη Μακρια απο το $x=0$

$\Rightarrow y''$ αμελητεα εκτος των οριακων.

Μεθοδος

1. Εσωτερικο Αναπτυγμα.
2. Εξωτερικο Αναπτυγμα.
3. Συναρμογη (Ταιριασμα)

$$\begin{cases} y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x} \longrightarrow e, & x\to 0 \\ Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = e-e^{1-\eta} \longrightarrow e, & \eta\to\infty \end{cases}$$

Κατασκευη Προσεγγισης Ομοιομορφης

$$y_{o\mu}(x) = y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \text{Κοινο Οριο}$$

$$= e^{1-x} + e - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e$$

$$= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Παρατηρηση

$$\left| \text{Ακριβης Λυση} - \text{Ομοιομορφη Προσεγγιση} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} - \left(e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1}\left(1 - e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}\right)} - \frac{\left(e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)}{e^{-1}} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1}} \right| \left| \frac{1}{1 - e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} - 1 \right| \leq e^{2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq C_k \varepsilon^{k}$$

$\forall k$!

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \qquad , \; y_{\varepsilon\xi}(1) = 1$$

στην (2) :

$$(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)'' + (1+\varepsilon)(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)' + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0$$

ε^0 $$y_0' + y_0 = 0 \quad , \quad y_0(1) = 1$$

ε^1 $$y_1' + y_1 = -y_0'' - y_0' \quad , \quad y_1(1) = 0$$

$\vdots$

ε^n $$y_n' + y_n = -y_n'' - y_n' \quad , \quad y_n(1) = 0$$

$\vdots$

$$y_0(x) = e^{1-x} \quad , \quad y_1(x) \equiv 0 \quad , \dots , \quad y_n(x) \equiv 0 \quad , \dots$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + \dots \qquad , \; Y_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 .$$

στην (2) σε η- μεταβλητές

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\frac{dY}{d\eta} + \varepsilon Y = 0 \quad , \quad Y(0) = 0$$

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0 \quad , \quad Y_0(0) = 0$$

$\vdots$

$$Y_0(\eta) = A_0(1-e^{-\eta})$$

$$Y_n(\eta) = \int_0^{\eta} [A_n e^{-z} - Y_{n-1}(z)]\,dz \quad , n \geq 1$$

Συναρμογή 1ων όρων:

$$y_0(x) = e^{1-x} \quad , \lim_{x \to 0} y_0(x) = e$$

$$Y_0(\eta) = A_0(1-e^{-\eta}) \quad , \lim_{\eta \to \infty} Y_0(\eta) = A_0$$

$$A_0 = e$$

∴

1^{η} προσέγγιση:

$$y_{o\mu}(x) = e^{1-x} + e(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) - e.$$

□