Μιχάλης Α. Συκιώτης

# *Ομάδες και Τοπολογία*

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Αθήνα 2023

# Ομάδες και Τοπολογία

Μιχάλης Α. Συκιώτης

2023

***Συγγραφή***

Μιχάλης Α. Συκιώτης

Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών

Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

***Συντελεστές έκδοσης***

Γλωσσική επιμέλεια: Αναστασία Τσιαδήμου

Τεχνική επεξεργασία: Ιωάννης Παπαβασιλείου



ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9

15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

**ISBN**: 978-618-5726-94-2

Βιβλιογραφική Αναφορά: Συκιώτης, Μ. (2023). *Ομάδες και Τοπολογία* [Μεταπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-242

*Αφιερώνεται στη μνήμη των γονέων μου,*
*Αθανασίου και Ελένης Συκιώτη*

# Πρόλογος

Το παρόν σύγγραμμα, που αποτελείται επί της ουσίας από δύο μέρη, έχει ως σκοπό να αποτελέσει μια εισαγωγή σε δύο κεντρικές περιοχές των μαθηματικών, τη Γεωμετρική-Συνδυαστική Θεωρία Ομάδων και την Αλγεβρική Τοπολογία. Φιλοδοξεί επίσης να παρουσιάσει τη σχέση μεταξύ αυτών των δύο περιοχών των οποίων ο ισχυρότερος συνδετικός κρίκος είναι το θεώρημα των Seifert-Van Kampen. Στο πρώτο μέρος, το ομαδοθεωρητικό, που περιλαμβάνει τα τέσσερα πρώτα κεφάλαια, εισάγονται (και γενικεύονται) οι έννοιες των ελευθέρων ομάδων, ελευθέρων γινομένων, ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα και HNN επεκτάσεων, μελετώνται οι κύριες ιδιότητές τους και παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές. Στο δεύτερο μέρος, το αλγεβροτοπολογικό, που αποτελείται από τα υπόλοιπα έξι κεφάλαια, ορίζονται και δίνονται οι βασικές ιδιότητες των χώρων πηλίκων, της θεμελιώδους ομάδας, των χώρων επικάλυψης και των ομάδων ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η μελέτη της θεμελιώδους ομάδας ενός τοπολογικού χώρου, ανάγεται, μέσω του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen, στη μελέτη ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα και HNN επεκτάσεων. Συνεπώς, η καλή γνώση του πρώτου μέρους, συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση του δευτέρου (και αντιστρόφως, όπως θα παρατηρήσει ο προσεκτικός αναγνώστης).

Η ύλη που καλύπτεται διαμορφώθηκε, ως επί το πλείστον, κατά τη διδασκαλία από τον Συγγραφέα, των μεταπτυχιακών μαθημάτων Άλγεβρα Ι, Θεωρία Ομάδων και Αλγεβρική Τοπολογία τα προηγούμενα 10 έτη στο Τμήμα Μαθηματικών του Παν/μίου Αθηνών. Πρέπει να τονισθεί ότι το βιβλίο αυτό δεν γράφτηκε για να αποτελέσει έναν πλήρη οδηγό για τις δύο αυτές περιοχές, αλλά είναι εισαγωγικού χαρακτήρα και γράφτηκε για να καλύψει τις ανάγκες των δύο προαναφερθέντων μεταπτυχιακών μαθημάτων Θεωρίας Ομάδων και Αλγεβρικής Τοπολογίας. Ως εκ τούτου στις προαπαιτούμενες από τον αναγνώστη γνώσεις, περιλαμβάνονται αυτές ενός προπτυχιακού μαθήματος Θεωρίας Ομάδων (δράσεις ομάδων, ευθέα και ημιευθέα γινόμενα κτλ.) και αυτές ενός προπτυχιακού μαθήματος Συνολοθεωρητικής Τοπολογίας (όπως συνεκτικότητα και συμπάγεια). Με την ευκαιρία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές αυτής της δεκαετίας, ιδιαιτέρως τον κ. Ιωάννη Παπαβασιλείου, που παρακολούθησαν τις διαλέξεις μου και των οποίων οι ερωτήσεις και η κριτική συνέβαλαν στην τελική διαμόρφωση και παρουσίαση της ύλης.

Το βιβλίο απευθύνεται επίσης και σε «προχωρημένους» προπτυχιακούς φοιτητές που θέλουν να κάνουν τη μετάβαση από τη Συνολοθεωρητική στην Αλγεβρική Τοπολογία ή θέλουν να εμβαθύνουν τις γνώσεις τους στις άπειρες ομάδες και στη χρήση γεωμετρικών μεθόδων για τη μελέτη τους. Η διάρθρωση της ύλης έχει σχεδιαστεί με τέτοιον τρόπο, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η διδασκαλία κάθε μέρους ανεξάρτητα από το άλλο (στον μέγιστο βαθμό που αυτό είναι εφικτό). Αν και έχει καταβληθεί μεγάλη προσπάθεια για την εξάλειψη των λαθών, θεωρώ δεδομένο τον μη εντοπισμό αρκετών από αυτά, ευελπιστώ στον δραστικό περιορισμό τους και ζητώ την κατανόηση των αναγνωστών.

Μιχάλης Α. Συκιώτης<br>Αθήνα, Ιούλιος 2022

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Ελεύθερες Ομάδες και Ελεύθερα Γινόμενα

### Περιεχόμενα



Εισάγουμε πρώτα την έννοια του ελευθέρου γινομένου ομάδων, μετά ως ειδική περίπτωση των ελευθέρων γινομένων ορίζουμε τις ελεύθερες ομάδες, μέσω των οποίων εισάγεται η έννοια της παράστασης μιας ομάδας και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες. Στη συνέχεια, μελετάμε προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες, οι οποίες αποτελούν μια πλούσια κλάση ομάδων με πολύ σημαντικές ιδιότητες.

## 1.1 Ελεύθερα Γινόμενα

Έστω $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ μια οικογένεια ομάδων. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε μια νέα ομάδα (το ελεύθερο γινόμενο), η οποία να περιέχει κάθε ομάδα $G_\lambda$ (ακριβέστερα αντίτυπο αυτής), να παράγεται από τις $G_\lambda$ και οι $G_\lambda$ να είναι «ανεξάρτητες» εντός αυτής, υπό την έννοια ότι δεν παρατηρούνται μη-τετριμμένες «σχέσεις» μεταξύ στοιχείων που ανήκουν σε διαφορετικές $G_\lambda$.

Μια **λέξη** μήκους $n$ στο αλφάβητο $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία της μορφής $(g_1,\dots,g_n)$, όπου $g_i \in \sqcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ για κάθε $i=1,\dots,n$ (εδώ με $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ συμβολίζουμε την ξένη ένωση των $G_\lambda$). Μια λέξη $(g_1,\dots,g_n)$ όπως πριν με $g_i \in G_{\lambda_i}$ λέγεται **ανηγμένη**, αν διαδοχικά στοιχεία ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες, δηλαδή $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ και $g_i \neq 1_{G_{\lambda_i}}$ για κάθε $i$. Η **κενή λέξη** $\emptyset$ θεωρείται ως (η μοναδική) ανηγμένη λέξη μήκους μηδέν. Αν $w=(g_1,\dots,g_i,g_{i+1},\dots,g_n)$, όπου $g_i,g_{i+1}\in G_\lambda$, τότε λέμε ότι η λέξη $w'=(g_1,\dots,g_i\cdot g_{i+1},\dots,g_n)$ προκύπτει από την $w$ με μια **στοιχειώδη αναγωγή**. Στην περίπτωση που $w=(g_1,\dots,g_{i-1},1_{G_{\lambda_i}},g_{i+1},\dots,g_n)$, λέμε επίσης ότι η λέξη $w'=(g_1,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots,g_n)$ προκύπτει από την $w$ με μια **στοιχειώδη αναγωγή**. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχειώδης αναγωγή μας δίνει λέξη μικροτέρου μήκους από την αρχική και συνεπώς από κάθε λέξη προκύπτει μια ανηγμένη με στοιχειώδεις αναγωγές.

Έστω $W$ το σύνολο των ανηγμένων λέξεων επί του $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ και $S_W$ η ομάδα μεταθέσεων επί του $W$. Για κάθε $\lambda\in\Lambda$ και κάθε $g\in G_\Lambda$ ορίζουμε μια μετάθεση $L_g^\lambda \in S_W$ ως εξής:

- Αν $g\neq 1_{G_\lambda}$, τότε για $w=(g_1,\dots,g_n)\in W$, όπου $g_i\in G_{\lambda_i}$, ορίζουμε

$$L_g^\lambda(w)=\begin{cases}(g,g_1,\dots,g_n), & \text{αν } \lambda\neq\lambda_1\\ (gg_1,\dots,g_n), & \text{αν } \lambda=\lambda_1 \text{ και } gg_1\neq 1_{G_\lambda}\\ (g_2,\dots,g_n), & \text{αν } \lambda=\lambda_1 \text{ και } gg_1=1_{G_\lambda}\end{cases}$$

  και $L_g^\lambda(\emptyset)=(g)$.

- Αν $g=1_{G_\lambda}$, ορίζουμε $L_g^\lambda=1_{S_W}=\mathrm{Id}_W$.

Διακρίνοντας τις αντίστοιχες περιπτώσεις, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$L_{gg'}^\lambda = L_g^\lambda \circ L_{g'}^\lambda \tag{1.1}$$

για κάθε ζεύγος στοιχείων $g,g'\in G_\lambda$. Έπεται, λοιπόν, ότι $L_g^\lambda\circ L_{g^{-1}}^\lambda = L_{g^{-1}}^\lambda\circ L_g^\lambda=\mathrm{Id}_W$, που αποδεικνύει ότι η $L_g^\lambda$ είναι πράγματι μετάθεση, δηλαδή, 1-1 και επί, αφού επιδέχεται δεξιό και αριστερό αντίστροφο.

Η απεικόνιση $i_\lambda : G_\lambda\to S_W$ με $i_\lambda(g)=L_g^\lambda$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Πράγματι, από τη σχέση 1.1 είναι ομομορφισμός, ενώ για $g\neq 1_{G_\lambda}$ έχουμε $L_g^\lambda(\emptyset)=(g)\neq\emptyset$ που σημαίνει ότι $L_g^\lambda\neq\mathrm{Id}_W$.

**Ορισμός 1.1.1.** Το **ελεύθερο γινόμενο** των ομάδων $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ορίζεται ως η υποομάδα της $S_W$ που παράγεται από τις εικόνες $i_\lambda(G_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, και συμβολίζεται με $*_\lambda G_\lambda$. Δηλαδή,

$$*_\lambda G_\lambda = \langle i_\lambda(G_\lambda),\, \lambda \in \Lambda \rangle \leq S_W.$$

Οι ομάδες $G_\lambda$ αναφέρονται ως (ελεύθεροι) **παράγοντες** του ελεύθερου γινομένου. Αν $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$, τότε συμβολίζουμε, επίσης, με $G_1 * \cdots * G_n$.

Οι πρώτες βασικές ιδιότητες παρουσιάζονται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 1.1.2.** *Έστω $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ μια οικογένεια ομάδων και $G = *_\lambda G_\lambda$ το ελεύθερό τους γινόμενο.*

1. *Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει μονομορφισμός $i_\lambda : G_\lambda \to G$ (μέσω του οποίου μπορούμε να θεωρούμε τους παράγοντες ως υποομάδες του ελευθέρου γινομένου).*

2. $G = \langle i_\lambda(G_\lambda),\, \lambda \in \Lambda \rangle$.

3. *Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο στοιχείων των εικόνων $i_\lambda(G_\lambda)$ σε **ανηγμένη μορφή**, που σημαίνει ότι*

$$g = i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n),$$

*όπου $g_i \in G_{\lambda_i}$, $g_i \neq 1_{G_{\lambda_i}}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ (δηλαδή κάθε $g_i$ είναι μη τετριμμένο και διαδοχικά $g_i$ ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες).*

4. $i_\lambda(G_\lambda) \cap \langle i_\mu(G_\mu),\, \mu \in \Lambda,\, \mu \neq \lambda \rangle = \{1\}$.

*Απόδειξη.* Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί έπονται από τον ορισμό του ελευθέρου γινομένου και τα σχόλια πριν από αυτόν.
3. Εφόσον το ελεύθερο γινόμενο $*_\lambda G_\lambda$ παράγεται από τις εικόνες $i_\lambda(G_\Lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται ως γινόμενο στοιχείων αυτών των εικόνων. Δηλαδή,

$$g = i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_k}(g_k) = L_{g_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ L_{g_k}^{\lambda_k},$$

όπου $g_i \in G_{\lambda_i}$. Αν δύο διαδοχικά στοιχεία $g_i$ και $g_{i+1}$ ανήκουν στον ίδιο παράγοντα (δηλαδή $\lambda_i = \lambda_{i+1}$), τότε το γινόμενο $i_{\lambda_i}(g_i) \cdot i_{\lambda_{i+1}}(g_{i+1})$ στην παραπάνω έκφραση, μπορεί να αντικατασταθεί λόγω της 1.1 από το στοιχείο $i_{\lambda i}(g_i g_{i+1})$. Επίσης, αν $g_i = 1_{G_{\lambda_i}}$ για κάποιο

$i$, τότε ο παράγοντας $i_{\lambda_i}(g_i)$ παραλείπεται. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, αν χρειαστεί, συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο του ελευθέρου γινομένου μπορεί να εκφρασθεί ως γινόμενο στοιχείων των εικόνων $i_\lambda(G_\lambda)$ σε ανηγμένη μορφή η οποία δεν αντιστοιχεί στην κενή λέξη, αν το στοιχείο είναι μη τετριμμένο. Επιπλέον, η παραπάνω ανηγμένη μορφή είναι μοναδική: αν

$$g = i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n) = i_{\mu_1}(x_1) \cdots i_{\mu_m}(x_m)$$

είναι δύο ανηγμένες μορφές του ιδίου μη τετριμμένου στοιχείου $g$, τότε από τη μια μορφή έχουμε

$$g(\emptyset) = L_{g_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ L_{g_n}^{\lambda_n}(\emptyset) = (g_1, \ldots, g_n),$$

ενώ από την άλλη

$$g(\emptyset) = L_{x_1}^{\mu_1} \circ \cdots \circ L_{x_m}^{\mu_m}(\emptyset) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Αφού οι ανηγμένες λέξεις στο δεξιό μέρος των δύο παραπάνω ισοτήτων είναι ίσες μεταξύ τους, έπεται ότι $n = m$ και $g_i = x_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
4. Αν $1 \neq g \in \langle i_\mu(G_\mu),\, \mu \in \Lambda,\, \mu \neq \lambda \rangle$, τότε στην ανηγμένη μορφή του $g$ δεν θα εμφανίζονται στοιχεία από τον παράγοντα $G_\lambda$. Αν υποθέσουμε ότι $g = g_\lambda \in G_\lambda$, τότε η ανηγμένη μορφή του $g$, που προκύπτει από τη δράση του $g$ στην κενή λέξη, θα είναι $g(\emptyset) = g_\lambda(\emptyset) = (g_\lambda)$, άτοπο. □

**Παρατήρηση 1.1.3.** Κάθε στοιχείο $g \in G$ του οποίου η ανηγμένη μορφή έχει θετικό μήκος είναι μη τετριμμένο. Πράγματι, αν $g = i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n)$ είναι η ανηγμένη μορφή του $g$, όπου $n > 0$, τότε

$$g(\emptyset) = L_{g_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ L_{g_n}^{\lambda_n}(\emptyset) = (g_1, \ldots, g_n) \neq \emptyset.$$

Άρα $g \neq 1$, αφού το $g$ δεν δρα όπως η ταυτοτική στο $W$.

**Παρατήρηση 1.1.4.** Αν το στοιχείο $i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n)$ είναι σε ανηγμένη μορφή, τότε από τη δράση του στην κενή λέξη $\emptyset$ προκύπτει η ανηγμένη λέξη $(g_1, \ldots, g_n)$. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\varphi : *_\lambda G_\lambda \to W$$

με $\varphi\big(i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n)\big) = (g_1 \ldots, g_n)$ και $\varphi(1) = \emptyset$, είναι 1-1 και επί. Επιπροσθέτως, το γινόμενο $\big(i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n)\big) \cdot \big(i_{\mu_1}(x_1) \cdots i_{\mu_m}(x_m)\big)$ αντιστοιχεί στην ανηγμένη λέξη που προκύπτει από την $(g_1, \ldots, g_n, x_1, \ldots, x_m)$ με στοιχειώδεις αναγωγές. Μέσω αυτής της αντιστοιχίας μπορούμε να σκεφτόμαστε το ελεύθερο γινόμενο $*_\lambda G_\lambda$ ως το σύνολο $W$ των ανηγμένων λέξεων στο $\sqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, όπου το γινόμενο δύο (ανηγμένων) λέξεων λαμβάνεται παραθέτοντας πρώτα αυτές τη μια μετά την άλλη και στη συνέχεια εφαρμόζουμε στοιχειώδεις αναγωγές μέχρι να καταλήξουμε σε ανηγμένη λέξη. Η κενή λέξη $\emptyset$ αντιστοιχεί στο $1_G$, ενώ για το αντίστροφο μιας ανηγμένης λέξης έχουμε $(g_1, \ldots, g_n)^{-1} = (g_n^{-1}, \ldots, g_1^{-1})$.

**Πόρισμα 1.1.5.** *Έστω $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, μια οικογένεια ομάδων και $G = *_\lambda G_\lambda$ το ελεύθερό τους γινόμενο. Υποθέτουμε ότι κάθε παράγοντας $G_\lambda$ είναι μη τετριμμένη ομάδα και ότι $|\Lambda| \geq 2$. Τότε:*

1. *Το κέντρο $Z(G)$ της $G$ είναι τετριμμένο.*

2. *Η $G$ περιέχει στοιχεία απείρου τάξης. Ιδιαιτέρως, είναι άπειρη.*

*Απόδειξη.* 1. Ας υποθέσουμε ότι $Z(G) \neq 1$ και έστω $1 \neq g \in Z(G)$. Θεωρούμε την ανηγμένη μορφή $g = g_1 \cdots g_n$ του $g$, όπου $g_i \in G_{\lambda_i}$. Εφόσον το πλήθος των παραγόντων είναι τουλάχιστον 2 και κάθε παράγοντας είναι μη τετριμμένος, μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο $g_{n+1} \neq 1$ σε διαφορετικό παράγοντα $G_{\lambda_{n+1}}$ από αυτόν του $g_n$. Τότε, αφού το $g$ ανήκει στο κέντρο της $G$, έχουμε

$$g \cdot g_{n+1} = g_{n+1} \cdot g, \text{ ισοδύναμα, } g_1 \cdots g_n \cdot g_{n+1} = g_{n+1} \cdot g_1 \cdots g_n.$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι σε ανηγμένη μορφή μήκους $n + 1$. Αν και το δεξιό είναι επίσης σε ανηγμένη μορφή, τότε, από μοναδικότητα, θα έχουμε ότι $g_{n+1} = g_n$, άτοπο. Αν το δεξιό μέλος δεν είναι σε ανηγμένη μορφή, τότε η ανηγμένη μορφή που θα προκύψει από αυτό με στοιχειώδεις αναγωγές, θα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του $n$ και έτσι καταλήγουμε πάλι σε αντίφαση.

2. Όπως πριν, αφού υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη τετριμμένοι παράγοντες $G_{\lambda_1}$ και $G_{\lambda_2}$, επιλέγουμε στοιχεία $1 \neq g_1 \in G_{\lambda_1}$ και $1 \neq g_2 \in G_{\lambda_2}$. Τότε το γινόμενό τους $g = g_1 \cdot g_2$ είναι απείρου τάξης, γιατί για κάθε θετικό ακέραιο $n$, $g^n = g_1 \cdot g_2 \cdots g_1 \cdot g_2 \neq 1$ ως ανηγμένη θετικού μήκους. □

Έστω $g \in *_\lambda G_\lambda$, $g \neq 1$ και $g = g_1 \cdots g_n$, $n > 0$, $g_i \in G_{\lambda_i}$, η ανηγμένη μορφή του $g$. Θα λέμε ότι η ανηγμένη μορφή $g_1 \cdots g_n$ είναι **κυκλικά ανηγμένη** (ή ότι το $g$ είναι κυκλικά ανηγμένο), αν $n = 1$ ή $\lambda_1 \neq \lambda_n$ (δηλαδή, τα $g_1$ και $g_n$ ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες). Χρησιμοποιούμε, επίσης, την έκφραση ότι η λέξη $g_1 \cdots g_n$ είναι κυκλικά ανηγμένη.

**Λήμμα 1.1.6.** *Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g \in *_\lambda G_\lambda$ είναι συζυγές με κυκλικά ανηγμένη λέξη.*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του μήκους της ανηγμένης μορφής που αναπαριστά το στοιχείο $g$. Έστω $g = g_1 \cdots g_n$, η ανηγμένη μορφή του $g$. Αν $n = 1$, τότε εξ ορισμού η ανηγμένη μορφή είναι κυκλικά ανηγμένη. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $n > 1$. Αν τα $g_1$ και $g_n$ είναι σε διαφορετικούς παράγοντες, τότε πάλι η ανηγμένη μορφή του $g$ είναι κυκλικά ανηγμένη. Αν τα $g_1$ και $g_n$ ανήκουν στον ίδιο παράγοντα, τότε το μήκος της ανηγμένης μορφής του στοιχείου

$$g_n g g_n^{-1} = (g_n \cdot g_1) \cdot g_2 \cdots g_{n-1}$$

είναι μικρότερο του $n$ και άρα από την επαγωγική υπόθεση $g_n g g_n^{-1} = x\omega x^{-1}$, όπου $\omega$ κυκλικά ανηγμένο. Τελικά, $g = (g_n^{-1}x) \cdot \omega \cdot (g_n^{-1}x)^{-1}$. □

**Πόρισμα 1.1.7.** *Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης σε ένα ελεύθερο γινόμενο $*_\lambda G_\lambda$ περιέχεται σε συζυγές ενός ελευθέρου παράγοντα $G_\lambda$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο λήμμα, αφού ένα στοιχείο που αναπαρίσταται από μια κυκλικά ανηγμένη λέξη μήκους $\geq 2$ έχει άπειρη τάξη. □

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνουμε την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων.

**Θεώρημα 1.1.8.** *Έστω $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, μια οικογένεια ομάδων και $G = *_\lambda G_\lambda$ το ελεύθερό τους γινόμενο. Για κάθε ομάδα $H$ και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\varphi_\lambda : G_\lambda \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : *_\lambda G_\lambda \to H$, έτσι ώστε $\varphi \circ i_\lambda = \varphi_\lambda$. Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $\lambda \in \Lambda$.*

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"'] & *_\lambda G_\lambda \arrow[d, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Ταυτίζοντας τους παράγοντες $G_\lambda$ με τις εικόνες τους, εκφράζουμε την παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi$ που επεκτείνει τις $\varphi_\lambda$.

*Απόδειξη.* Η μεταθετικότητα του διαγράμματος και το γεγονός ότι οι εικόνες $i_\lambda(G_\lambda)$ παράγουν το ελεύθερο γινόμενο καθορίζουν πλήρως την $\varphi$. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε

$\varphi(1) = 1$, ενώ για ένα μη τετριμμένο στοιχείο $g \in *_\lambda G_\lambda$ με ανηγμένη μορφή $g = i_{\lambda_1}(g_1) \cdots i_{\lambda_n}(g_n)$ με $g_i \in G_{\lambda_i}$, ορίζουμε $\varphi(g) = \varphi_{\lambda_1}(g_1) \cdots \varphi_{\lambda_n}(g_n)$. Εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση $\varphi$ που ορίσαμε είναι ομομορφισμός. Η μοναδικότητα είναι συνέπεια του γεγονότος ότι οι παράγοντες του ελευθέρου γινομένου το παράγουν. $\square$

Όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα, η καθολική ιδιότητα χαρακτηρίζει τα ελεύθερα γινόμενα ως προς ισομορφισμό, γι' αυτό αναφέρεται, επίσης, και ως χαρακτηριστική ιδιότητα.

**Θεώρημα 1.1.9.** *Έστω $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$, μια οικογένεια ομάδων και $\Gamma$ μια ομάδα η οποία ικανοποιεί μια καθολική συνθήκη όπως πριν. Δηλαδή, υπάρχει οικογένεια ομομορφισμών $j_\lambda : G_\lambda \to \Gamma$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ομάδα $H$ και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\varphi_\lambda : G_\lambda \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : \Gamma \to H$ με $\varphi \circ j_\lambda = \varphi_\lambda$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε η ομάδα $\Gamma$ είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενο $*_\lambda G_\lambda$.*

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "j_\lambda"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"'] & \Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & *_\lambda G_\lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[dr, "j_\lambda"'] & *_\lambda G_\lambda \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & \Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, hook, "i_\lambda"] \arrow[dr, hook, "i_\lambda"'] & *_\lambda G_\lambda \arrow[d, dashed, shift right, "\mathrm{Id}"'] \arrow[d, dashed, shift left, "\varphi\circ\psi"] \\ & *_\lambda G_\lambda \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Η καθολική ιδιότητα που ικανοποιεί η ομάδα $\Gamma$, εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικού ομομορφισμού $\varphi : \Gamma \to *_\lambda G_\lambda$ με $\varphi \circ j_\lambda = i_\lambda$ για κάθε $\lambda$. Ομοίως, από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων, εξασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικού ομομορφισμού $\psi : *_\lambda G_\lambda \to \Gamma$, έτσι ώστε $\psi \circ i_\lambda = j_\lambda$ για κάθε $\lambda$. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi \circ \psi \circ i_\lambda = \varphi \circ j_\lambda = i_\lambda = \mathrm{Id}_{*_\lambda G_\lambda} \circ i_\lambda,$$

για κάθε $\lambda$. Αυτό σημαίνει (λόγω μοναδικότητας) ότι $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{*_\lambda G_\lambda}$. Ομοίως προκύπτει ότι $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_\Gamma$ και έτσι η $\varphi$ είναι ισομορφισμός με $\varphi^{-1} = \psi$. $\square$

Η κατασκευή του ελευθέρου γινομένου είναι μια «εξωτερική» κατασκευή, δηλαδή ο ορισμός του δεν προϋποθέτει ότι οι παράγοντες περιέχονται σε μια μεγαλύτερη ομάδα (εργασθήκαμε με την ξένη ένωσή τους). Η επόμενη πρόταση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να δώσουμε έναν «εσωτερικό» ορισμό του τι σημαίνει μια ομάδα να είναι το ελεύθερο γινόμενο μιας οικογένειας υποομάδων της.

**Πρόταση 1.1.10.** *Έστω $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$, μια οικογένεια υποομάδων μιας ομάδας $G$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Κάθε στοιχείο $1 \neq g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $g = g_1 \cdots g_n$, $n > 0$, όπου $1 \neq g_i \in G_{\lambda_i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $G_{\lambda_i} \neq G_{\lambda_{i+1}}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.*

2. *Η ομάδα $G$ παράγεται από τις υποομάδες της $G_\lambda$ και το $1$ δεν μπορεί να γραφεί όπως πριν, δηλαδή ως γινόμενο $g_1 \cdots g_n$, όπου $n > 0$, $1 \neq g_i \in G_{\lambda_i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $G_{\lambda_i} \neq G_{\lambda_{i+1}}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.*

*Επιπλέον, αν ισχύει η μία από τις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε*

$$G \cong *_\lambda G_\lambda.$$

Για ευνόητους λόγους, μια έκφραση ενός στοιχείου $g$, όπως στον πρώτο ισχυρισμό, θα λέγεται ανηγμένη.

*Απόδειξη.* Αν υποθέσουμε ότι ισχύει το πρώτο, τότε είναι άμεσο ότι οι υποομάδες $G_\lambda$ παράγουν την $G$. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι μια ανηγμένη έκφραση μας δίνει το τετριμμένο στοιχείο, $g_1 \cdots g_n = 1$, τότε $g_1^{-1} = g_2 \cdots g_n$ που αντιφάσκει στη μοναδικότητα της γραφής.

Αντίστροφα, αφού η $G$ παράγεται από τις υποομάδες της $G_\lambda$, κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της $G$ έχει μια ανηγμένη γραφή, όπως στο 1. Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε πως έχουμε ισότητα δύο διαφορετικών ανηγμένων εκφράσεων $g_1 \cdots g_n = x_1 \cdots x_m$, ισοδύναμα, $x_m^{-1} \cdots x_1^{-1} \cdot g_1 \cdots g_n = 1$. Η ανηγμένη έκφραση που προκύπτει από το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας με «στοιχειώδεις αναγωγές» έχει θετικό μήκος (αφού οι αρχικές ανηγμένες εκφράσεις είναι διαφορετικές) και μας δίνει το τετριμμένο στοιχείο. Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ισχυρισμών.

Συμβολίζουμε με $j_\lambda : G_\lambda \hookrightarrow G$ την ένθεση της υποομάδας στην ομάδα. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : *_\lambda G_\lambda \to G$ με $\varphi \circ i_\lambda = j_\lambda$, για κάθε $\lambda$.

$$\begin{tikzcd}
G_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[dr, hook, "j_\lambda"'] & *_\lambda G_\lambda \arrow[d, "\varphi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Εφόσον η $G$ παράγεται από τις $G_\lambda$, η $\varphi$ είναι επιμορφισμός. Αν $i_{\lambda_1}(g_1)\cdots i_{\lambda_n}(g_n)$ είναι η ανηγμένη μορφή ενός μη τετριμμένου στοιχείου του πυρήνα της $\varphi$, τότε

$$1 = \varphi\big(i_{\lambda_1}(g_1)\cdots i_{\lambda_n}(g_n)\big) = \varphi\big(i_{\lambda_1}(g_1)\big)\cdots\varphi\big(i_{\lambda_n}(g_n)\big) = j_{\lambda_1}(g_1)\cdots j_{\lambda_n}(g_n) = g_1\cdots g_n,$$

άτοπο από τον δεύτερο ισχυρισμό. Άρα, η $\varphi$ είναι και $1-1$ και τελικά ισομορφισμός. $\square$

Υπενθυμίζουμε την **καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο** που θα χρησιμοποιηθεί αρκετές φορές στη συνέχεια. Έστω $N$ μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας $G$, $G/N$ η αντίστοιχη ομάδα πηλίκο και $\pi : G \to G/N$ ο φυσικός επιμορφισμός. Τότε, για κάθε ομάδα $H$ και ομομορφισμό $\varphi : G \to H$ με $N \subseteq \ker\varphi$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\widetilde{\varphi} : G/N \to H$ τέτοιος, ώστε $\widetilde{\varphi}\circ\pi = \varphi$. Για την απόδειξη, αρκεί να ορίσουμε $\widetilde{\varphi}(gN) = \varphi(g)$ και να παρατηρήσουμε ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη (τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/N \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Με άλλα λόγια, κάθε ομομορφισμός $\varphi$, όπως πριν, παραγοντοποιείται μέσω της ομάδας πηλίκο $G/N$, αρκεί η $N$ να περιέχεται στον πυρήνα του.

Η μικρότερη κανονική υποομάδα που παράγεται από ένα υποσύνολο $X$ (ή που περιέχει το $X$) μιας ομάδας $G$ (διαφορετικά κανονική κλειστότητα) είναι η τομή όλων των κανονικών υποομάδων της $G$ που περιέχουν το $X$.

**Πρόταση 1.1.11.** *Έστω $G = G_1 * G_2$ και $N_j \lhd G_j$, για $j = 1,2$. Αν $N$ είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της $G$ που περιέχει τις $N_1$ και $N_2$, τότε*

$$G/N \cong \big(G_1/N_1\big) * \big(G_2/N_2\big).$$

*Απόδειξη.* Αν $i_1$ και $i_2$ είναι οι εμφυτεύσεις των παραγόντων $G_1$ και $G_2$ στο ελεύθερο γινόμενο $G_1 * G_2$, τότε ταυτίζοντας κάθε παράγοντα με την εικόνα του, μπορούμε να θεωρούμε τους παράγοντες ως υποομάδες του ελευθέρου γινομένου και έτσι έχει νόημα να θεωρούμε την κανονική κλειστότητα $N$ των $N_1$ και $N_2$ εντός της $G$. Συμβολίζουμε με $\pi : G \to G/N$ και με $\pi_j : G_j \to G_j/N_j$, $j = 1,2$, τους φυσικούς επιμορφισμούς στις αντίστοιχες ομάδες πηλίκο. Εφόσον $N_j \subseteq N = \ker\pi$, για κάθε $j = 1,2$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\xi_j : G_j/N_j \to G/N$ με $\xi_j \circ \pi_j = \pi$.

Θα δείξουμε ότι η τριάδα $(G/N, G_j/N_j, \xi_j)$ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του ελευθέρου γινομένου $G_1/N_1 * G_2/N_2$, από όπου έπεται ότι οι ομάδες $G/N$ και $G_1/N_1 * G_2/N_2$ είναι ισόμορφες (Θεώρημα 1.1.9). Έστω $H$ μια τυχαία ομάδα και $\varphi_j : G_j/N_j \to H$, $j = 1, 2$, ομομορφισμοί.

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi"'] & G_j/N_j \arrow[d, "\xi_j"] \\ & G/N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_j \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi_j \circ \pi_j"'] & G_1 * G_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1 * G_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/N \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τη σύνθεση $G_j \xrightarrow{\pi_j} G_j/N_j \xrightarrow{\varphi_j} H$. Από την καθολική ιδιότητα του ελευθέρου γινομένου υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : G_1 * G_2 \to H$ που επεκτείνει τις $\varphi_j \circ \pi_j$, δηλαδή $\varphi|_{G_j} = \varphi_j \circ \pi_j$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(x_j) = \varphi_j \circ \pi_j(x) = 1$ για κάθε $x_j \in N_j$. Άρα, καθεμία από τις $N_j$ περιέχεται στον πυρήνα του $\varphi$ και, ως εκ τούτου, ο πυρήνας ker$\varphi$ (ως κανονική υποομάδα) περιέχει την κανονική υποομάδα $N$ που αυτές παράγουν. Από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\widetilde{\varphi} : G/N \to H$ τέτοιος, ώστε $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Δείχνουμε πρώτα ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό και, στη συνέχεια, τη μοναδικότητα του $\widetilde{\varphi}$ ως προς τη μεταθετικότητα του διαγράμματος.

$$\begin{tikzcd} G_j/N_j \arrow[r, "\xi_j"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & G/N \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Για κάθε $g_j \in G_j$ έχουμε:

$$\widetilde{\varphi} \circ \xi_j(g_jN_j) = \widetilde{\varphi} \circ \xi_j \circ \pi_j(g_j) = \widetilde{\varphi} \circ \pi(g_j) = \varphi(g_j) = \varphi_j \circ \pi_j(g_j) = \varphi_j(g_jN_j).$$

Άρα, πράγματι $\widetilde{\varphi} \circ \xi_j = \varphi_j$. Έστω $\psi : G/N \to H$ ένας ομομορφισμός με $\psi \circ \xi_j = \varphi_j$. Αρκεί να δειχθεί η ισότητα $\widetilde{\varphi} = \psi$ σε ένα σύνολο γεννητόρων της $G/N$ και πιο συγκεκριμένα στο $\{gN,\ g \in G_1 \cup G_2\}$. Έστω, λοιπόν, $g_j \in G_j$. Τότε

$$\widetilde{\varphi}(g_jN) = \widetilde{\varphi} \circ \pi(g_j) = \varphi(g_j) = \varphi_j \circ \pi_j(g_j) = \psi \circ \xi_j \circ \pi_j(g_j) = \psi \circ \pi(g_j) = \psi(g_jN).$$

$\square$

**Παρατήρηση 1.1.12.** Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η ακόλουθη γενίκευση. Έστω $G_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ μια οικογένεια ομάδων. Υποθέτουμε ότι για κάθε ομάδα $G_\lambda$ μας δίνεται μια κανονική υποομάδα $N_\lambda \lhd G_\lambda$. Αν $N$ είναι η κανονική υποομάδα της $G = *_\lambda G_\lambda$ που παράγεται από την ένωση $\cup_\lambda N_\lambda$, τότε

$$G/N \cong *_\lambda\big(G_\lambda/N_\lambda\big).$$

**Πόρισμα 1.1.13.** *Έστω $G = G_1 * G_2$ και $N$ η κανονική υποομάδα της $G$ που παράγεται από τον παράγοντα $G_2$. Τότε $G/N \cong G_1$.*

## 1.2 Ελεύθερες Ομάδες

Όπως θα δούμε ευθύς αμέσως, οι ελεύθερες ομάδες είναι ειδικές περιπτώσεις των ελευθέρων γινομένων.

**Ορισμός 1.2.1.** Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο. Για κάθε στοιχείο $x$ του $X$ θεωρούμε την άπειρη κυκλική ομάδα $\langle x\rangle$ που παράγεται από το $x$. Πιο συγκεκριμένα, $\langle x\rangle = \{(x,n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ με γινόμενο $(x,n)\cdot(x,m) = (x,n+m)$. Η **ελεύθερη ομάδα** επί του $X$ είναι το ελεύθερο γινόμενο

$$F(X) = *_{x\in X}\langle x\rangle.$$

Δηλαδή, η ομάδα $F(X)$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο $*_x\mathbb{Z}$ αντιτύπων της άπειρης κυκλικής $\mathbb{Z}$, ένα αντίτυπο για κάθε στοιχείο του $x$. Στην περίπτωση που το $X$ είναι κενό, ορίζουμε $F(\emptyset) = \{1\}$, αν και στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι το $X$ είναι μη κενό. Το σύνολο $X$ λέγεται **βάση** ή **ελεύθερο σύνολο γεννητόρων** και η ισχύς $|X|$ του $X$ **τάξη** της $F(X)$, την οποία συμβολίζουμε με $\operatorname{rank}\big(F(X)\big)$. Όπως θα δούμε, η τάξη μιας ελεύθερης ομάδας δεν εξαρτάται από τη βάση $X$.

**Παρατήρηση 1.2.2.** Αν $X \neq \emptyset$, τότε κάθε στοιχείο της $F(X)$ διαφορετικό από το $1$ έχει άπειρη τάξη, αφού η $F(X)$ είναι ελεύθερο γινόμενο ομάδων που δεν περιέχουν μη τετριμμένα στοιχεία πεπερασμένης τάξης (βλέπε Λήμμα 1.1.7).

**Παρατήρηση 1.2.3.** Κάθε ελεύθερη ομάδα, εκτός από την άπειρη κυκλική, έχει τετριμμένο κέντρο. Πράγματι, αν $|X| \geq 2$, τότε η $F(X)$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο με τουλάχιστον δύο μη τετριμμένους παράγοντες και έτσι $Z\big(F(x)\big) = \{1\}$.

Οι ελεύθερες ομάδες, ως ελεύθερα γινόμενα, κληρονομούν τις ανάλογες ιδιότητες.

**Θεώρημα 1.2.4** (Καθολική Ιδιότητα των Ελευθέρων Ομάδων). *Έστω $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου $X$. Για κάθε ομάδα $H$ και κάθε απεικόνιση $\varphi : X \to H$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\widetilde{\varphi} : F(X) \to H$ που επεκτείνει την $\varphi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(X) \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Η απεικόνιση $\varphi : X \to H$ επάγει μια οικογένεια ομομορφισμών $\varphi_x : \langle x \rangle \to H$. Το ζητούμενο έπεται από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων. □

**Πρόταση 1.2.5.** *Οι ομάδες $F(X_1)$ και $F(X_2)$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν $|X_1| = |X_2|$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι $|X_1| = |X_2|$ και έστω $\varphi : X_1 \to X_2$ μια $1-1$ και επί απεικόνιση με αντίστροφη $\psi$. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων, η απεικόνιση $\varphi$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\widetilde{\varphi} : F(X_1) \to F(X_2)$, ενώ η $\psi$ σε ομομορφισμό $\widetilde{\psi} : F(X_2) \to F(X_1)$. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$ επεκτείνει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{X_2}$ όπως και ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\mathrm{Id}_{F(X_2)}$. Συνεπώς, λόγω μοναδικότητας, $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi} = \mathrm{Id}_{F(X_2)}$. Ομοίως προκύπτει ότι $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{Id}_{F(X_1)}$ και άρα η $\widetilde{\varphi} : F(X_1) \to F(X_2)$ είναι ισομορφισμός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι ελεύθερες ομάδες $F(X_1)$ και $F(X_2)$ είναι ισόμορφες. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων, έπεται ότι το πλήθος των ομομορφισμών $F(X) \to \mathbb{Z}_2$, από μια ελεύθερη $F(X)$ στην κυκλική τάξεως δύο, ισούται με το πλήθος των απεικονίσεων από το $X$ στο $\mathbb{Z}_2$, δηλαδή με $2^{|X|}$. Εφόσον οι $F(X_1)$ και $F(X_2)$ είναι ισόμορφες, προκύπτει ότι $2^{|X_1|} = 2^{|X_2|}$ και έτσι το $X_1$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν το $X_2$ είναι. Συνεπώς, αν είναι πεπερασμένα, τότε $|X_1| = |X_2|$. Αν είναι άπειρα, τότε $|F(X_i)| = |X_i|$, $i = 1, 2$, αφού η $F(X_i)$ είναι αριθμήσιμη ένωση $\cup_n A_n$, όπου το $A_n$ είναι το σύνολο των γινομένων στοιχείων από το $X_i \cup X_i^{-1}$ μήκους το πολύ $n$ και το $X_i$ περιέχεται (εμφυτεύεται) στην $F(X_i)$. Οπότε, και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $|X_1| = |F(X_1)| = |F(X_2)| = |X_2|$. □

Η ίδια απόδειξη δείχνει το ακόλουθο:

**Πόρισμα 1.2.6.** *Αν το $S$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της ελεύθερης ομάδας $F(X)$ επί του συνόλου $X$, τότε $|S| \geq |X|$.*

Αν $|X| = n$, τότε η ομάδα $F(X)$ συμβολίζεται με $F_n$ και αναφέρεται ως η **ελεύθερη ομάδα τάξεως** $n$.

**Πρόταση 1.2.7.** *Έστω $X$ ένα υποσύνολο μιας ομάδας $G$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η ομάδα $G$ είναι ισόμορφη με την ελεύθερη $F(X)$ με βάση το $X$.*

2. *Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g$ της $G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, όπου $n > 0$, $x_{i_j} \in X$, $0 \neq \varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$.*

3. *Η ομάδα $G$ παράγεται από το $X$ και το $1$ δεν μπορεί να γραφεί όπως πριν, δηλαδή ως γινόμενο $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, όπου $n > 0$, $x_{i_j} \in X$, $0 \neq \varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει με τον ίδιο τρόπο, όπως η αντίστοιχη Πρόταση 1.1.10 για ελεύθερα γινόμενα. □

Το ακόλουθο κριτήριο αποτελεί ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία στην προσπάθειά μας να αποδείξουμε ότι μια δοθείσα ομάδα αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο.

**Λήμμα 1.2.8** (ping-pong)**.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα επί ενός συνόλου $S$ και έστω $H_1$, $H_2$ δύο υποομάδες της $G$ με $|H_1| \geq 3$ και $|H_2| \geq 2$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο μη κενά υποσύνολα $S_1$ και $S_2$ του $S$, έτσι ώστε:*

- *Το $S_2$ δεν περιέχεται στο $S_1$.*
- *$\alpha \cdot S_2 \subseteq S_1$, για κάθε $\alpha \in H_1$, $\alpha \neq 1$.*
- *$\beta \cdot S_1 \subseteq S_2$, για κάθε $\beta \in H_2$, $\beta \neq 1$.*

*Τότε η υποομάδα $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ της $G$ που παράγεται από τις $H_1$ και $H_2$ είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενο $H_1 * H_2$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε εναλλασσόμενο γινόμενο ως προς $H_1$ και $H_2$ είναι διάφορο του 1. Θεωρούμε πρώτα γινόμενα περιττού μήκους της μορφής

$$\omega = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \beta_{n-1}\alpha_n, \text{ όπου } \alpha_i \in H_1 - \{1\} \text{ και } \beta_i \in H_2 - \{1\}.$$

Τότε

$$\omega \cdot S_2 = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \beta_{n-1}\alpha_n S_2 \subseteq \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_{n-1}\beta_{n-1} S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_1.$$

Καθώς $S_2 \nsubseteq S_1$, το στοιχείο $\omega$ δρα μη τετριμμένα και συνεπώς $\omega \neq 1$.

Αν $\omega = \beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, όπου $\alpha_i \in H_1 - \{1\}$ και $\beta_i \in H_2 - \{1\}$, τότε επιλέγουμε $\alpha_n \in H_1 - \{1\}$ και παρατηρούμε ότι το συζυγές $\alpha_n^{-1}\omega\alpha_n = \alpha_n^{-1}\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_{n-1}\beta_{n-1}\alpha_n$ έχει τη μορφή της πρώτης περίπτωσης. Άρα $\alpha_n^{-1}\omega\alpha_n \neq 1$ και έτσι $\omega \neq 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ένα στοιχείο που δίνεται από μια λέξη αρτίου μήκους της μορφής $\omega = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n$ (όπου τα $\alpha_i, \beta_i$ είναι όπως πριν). Εφόσον η $H_1$ έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, μπορούμε να επιλέξουμε $\alpha \in H_1 - \{1, \alpha_1\}$. Τότε $\alpha^{-1}\omega\alpha = \alpha^{-1}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n\alpha$ και πάλι από την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\alpha^{-1}\omega\alpha \neq 1$ και άρα $\omega \neq 1$. Ανάλογα αντιμετωπίζεται η περίπτωση που $\omega = \beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}$. □

**Παράδειγμα 1.2.9.** Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ παράγουν μια ελεύθερη ομάδα τάξεως 2 στην $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, την ομάδα των $2 \times 2$ πινάκων με στοιχεία ακέραιους και ορίζουσα 1. Πράγματι, θεωρούμε τη φυσική δράση της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ στο επίπεδο και έστω $H_1 = \langle A \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$ και $H_2 = \langle B \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$ οι υποομάδες της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ που παράγονται από τους πίνακες $A$ και $B$, αντίστοιχα, καθεμία από τις οποίες είναι άπειρη κυκλική, αφού παράγεται από ένα στοιχείο απείρου τάξης. Θεωρούμε τα υποσύνολα του επιπέδου $S_1$ και $S_2$ που ορίζονται ως εξής:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| > \|y\| \right\} \text{ και } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| < \|y\| \right\}.$$

Είναι άμεσο ότι $S_2 \nsubseteq S_1$. Για κάθε $m \neq 0$, έχουμε

$$A^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2my \\ y \end{pmatrix} \in S_1, \text{ για κάθε } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_2,$$

αφού σε αυτήν την περίπτωση $\|x + 2my\| \geq \|2my\| - \|x\| \geq 2\|y\| - \|x\| > \|y\|$. Δηλαδή, $A^m S_2 \subseteq S_1$, για κάθε $m \neq 0$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $B^m S_1 \subseteq S_2$, για κάθε $m \neq 0$. Ικανοποιούνται, λοιπόν, οι υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος και συνεπώς $\langle A, B \rangle \cong \langle A \rangle * \langle B \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$.

Το προηγούμενο παράδειγμα δεν αποτελεί την εξαίρεση στον κανόνα, όπως διαπιστώνουμε από το ακόλουθο θεώρημα του Tits: κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $\mathrm{GL}_n(F)$, όπου $n \geq 2$ και $F$ σώμα, είτε περιέχει ελεύθερη υποομάδα τάξεως 2 είτε περιέχει επιλύσιμη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.

## 1.3 Παραστάσεις Ομάδων

Η έννοια της παράστασης μιας ομάδας εισήχθη στις αρχές του εικοστού αιώνα από τον Max Dehn και εμφανίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο, όταν υπολογίζουμε θεμελιώδεις ομάδες συμπλεγμάτων κελιών. Ένα από τα κύρια προβλήματα της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων είναι η άντληση (αλγεβρικών) πληροφοριών από την παράσταση μιας ομάδας.

Αν το $R$ είναι ένα υποσύνολο μιας ομάδας $G$, τότε συμβολίζουμε με $\langle\langle R\rangle\rangle$ την **κανονική θήκη** (ή κανονική κλειστότητα) του $R$, που ορίζεται ως η τομή όλων των κανονικών υποομάδων της $G$ που περιέχουν το $R$, δηλαδή

$$\langle\langle R\rangle\rangle = \bigcap \big\{N \lhd G \,:\, R \subseteq N\big\}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\langle\langle R\rangle\rangle$ είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της $G$ που περιέχει το $R$ και αποτελείται από γινόμενα συζυγών στοιχείων του $R^{\pm 1}$.

**Ορισμός 1.3.1.** Μια **παράσταση** μιας ομάδας $G$ είναι ένα ζεύγος $(X, R)$, όπου το $X$ είναι ένα σύνολο και το $R$ ένα υποσύνολο της ελεύθερης ομάδας $F(X)$ επί του $X$, έτσι ώστε

$$G \cong F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle.$$

Λέμε, επίσης, ότι η $G$ δίνεται από την παράσταση $\langle X \mid R\rangle$ και συμβολίζουμε με $G \cong \langle X \mid R\rangle$ (ή και $G = \langle X \mid R\rangle$). Τα στοιχεία του $X$ αναφέρονται ως **γεννήτορες** της παράστασης, ενώ τα στοιχεία του $R$ θα αναφέρονται ως (ορίζουσες) **σχέσεις** της παράστασης.

Έπεται άμεσα από τον ορισμό ότι $F(X) = \langle X \mid \emptyset\rangle$.

**Πρόταση 1.3.2.** *Κάθε ομάδα $G$ επιδέχεται μια παράσταση. Ισοδύναμα, κάθε ομάδα είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης.*

*Απόδειξη.* Έστω $S = \{s_i, i \in I\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της $G$ και $X = \{x_i, i \in I\}$ ένα σύνολο με $|X| = |S|$. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων έχουμε ομομορφισμό $\varphi : F(X) \to G$ με $\varphi(x_i) = s_i$, ο οποίος είναι επί, αφού το $S$ παράγει την $G$ και περιέχεται στην εικόνα του $\varphi$. Έτσι

$$G \cong F(X)/\ker\varphi$$

και άρα $G = \langle X \mid R\rangle$, όπου $R$ οποιοδήποτε υποσύνολο της $F(X)$ με $\langle\langle R\rangle\rangle = \ker\varphi$ (μπορούμε ως $R$ να επιλέξουμε όλη την $\ker\varphi$). $\square$

Η ελευθερία στον τρόπο επιλογής των $X$ και $R$ στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι μια ομάδα έχει πολλές διαφορετικές παραστάσεις.

Η ακόλουθη παρατήρηση που καταγράφεται ως πρόταση, είναι θεμελιώδης.

**Πρόταση 1.3.3.** *Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ και $H$ δύο ομάδες, και $\varphi : X \to H$ μια απεικόνιση την οποία επεκτείνουμε στο $X^{\pm 1}$ ορίζοντας $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, για κάθε $x \in X$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $r = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k} \in R$, όπου $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ και $x_i \in X$, έχουμε ότι $\varphi(x_1^{\varepsilon_1}) \cdots \varphi(x_k^{\varepsilon_k}) = 1$. Τότε η $\varphi$ επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε ομομορφισμό $\widetilde{\varphi} : G \to H$.*

*Απόδειξη.* Αν η $\varphi$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό, τότε η επέκταση είναι μοναδική, αφού καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες στους γεννήτορες. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων, η $\varphi$ επάγει ομομορφισμό από την $F(X)$ στην $H$ του οποίου ο πυρήνας (από υπόθεση) περιέχει την κανονική υποομάδα $\langle\langle R \rangle\rangle$. Η καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Παράδειγμα 1.3.4.** Εφόσον η κυκλική $\mathbb{Z}_n$ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, προκύπτει εύκολα ότι $\mathbb{Z}_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$.

**Παράδειγμα 1.3.5.** Η ελεύθερη αβελιανή $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle$ τάξεως 2 έχει παράσταση της μορφής $\langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$, όπου $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ είναι ο μεταθέτης των $x, y$. Έστω $F = F(x, y)$ και $N = \langle\langle [x, y] \rangle\rangle$. Εφόσον η $\mathbb{Z}^2$ είναι αβελιανή, από την Πρόταση 1.3.3 υπάρχει επιμορφισμός $\varphi : F/N \to \mathbb{Z}^2$ με $\varphi(x) = \alpha$ και $\varphi(y) = \beta$. Όμως οι γεννήτορες $xN$ και $yN$ της ομάδας πηλίκο $F/N$ μετατίθενται, αφού η $N$ περιέχει τον μεταθέτη $[x, y]$, που σημαίνει ότι η $F/N$ είναι, επίσης, αβελιανή. Συνεπώς, κάθε στοιχείο $gN$ της $F/N$ έχει τη μορφή $gN = x^k N \cdot y^m N$. Αν $gN \in \ker\varphi$, τότε $\alpha^k \cdot \beta^m = 1$ και άρα $k = m = 0$. Έτσι $gN = 1$, δηλαδή, $\ker\varphi = \{1\}$ και η $\varphi$ είναι ισομορφισμός.

**Παράδειγμα 1.3.6.** $D_n \cong \langle x, y \mid x^2 = 1, y^n = 1, x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η τάξη της διεδρικής $D_n$ ισούται με $2n$ και ότι παράγεται από μια στροφή $\beta$ τάξεως $n$, μια ανάκλαση $\alpha$ και ικανοποιούνται οι σχέσεις $\alpha^2 = 1$, $\beta^n = 1$ και $\beta\alpha = \alpha\beta^{-1}$. Έστω $F = F(x, y)$ και $N$ η κανονική θήκη του $R = \{x^2, y^n, x^{-1}yxy\}$. Από την Πρόταση 1.3.3 έχουμε επιμορφισμό $\varphi : F/N \to D_n$ με $\varphi(x) = \alpha$ και $\varphi(y) = \beta$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας πηλίκο $F/N$ γράφεται ως $xy^\nu N$ ή $y^\nu N$, $0 \leq \nu \leq n-1$. Έπεται ότι $|F/N| \leq 2n = |D_n|$ και άρα η $\varphi$ είναι ισομορφισμός.

**Παράδειγμα 1.3.7.** Η ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι ρητοί $m_1/n_1, \ldots, m_k/n_k$, όπου $m_i \in \mathbb{Z}$ και κάθε $n_i$ είναι θετικός ακέραιος, παράγουν την ομάδα, τότε ο παρονομαστής κάθε ρητού θα ήταν μικρότερος ή ίσος από το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $n_1, \ldots, n_k$, το οποίο δεν ισχύει. Είναι άμεσο όμως ότι η $(\mathbb{Q}, +)$ παράγεται από το σύνολο $\{1/n,\ \mathbb{Z} \ni n > 0\}$ καθώς και από το $\{1/n!,\ \mathbb{Z} \ni n > 0\}$, αφού

$$\frac{m}{n} = m(n-1)! \cdot \frac{1}{n!}.$$

Έστω $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ και $G = \langle X \mid x_n^n = x_{n-1}, n > 1 \rangle$ για την οποία χρησιμοποιούμε τον συνήθη πολλαπλασιαστικό συμβολισμό. Από την Πρόταση 1.3.3, η απεικόνιση $x_n \mapsto 1/n!$ επεκτείνεται σε επιμορφισμό $\varphi : G \to (\mathbb{Q}, +)$. Θα αποδείξουμε ότι $\ker \varphi = \{1\}$. Για κάθε ζεύγος γεννητόρων $x_n, x_m$ της $G$ με $n > m$, ο $x_m$ είναι δύναμη του $x_n$ και άρα οι γεννήτορες $x_n$ και $x_m$ μετατίθενται. Αυτό σημαίνει ότι η $G$ είναι αβελιανή και συνεπώς κάθε στοιχείο $g$ της $G$ έχει τη μορφή $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ για κάποιους ακέραιους $n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Υποθέτουμε ότι $g \in \ker \varphi$ και επιλέγουμε μια έκφραση $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ όπως πριν, ελαχίστου μήκους $n$ (ιδιαιτέρως $\varepsilon_n \neq 0$ αν $n > 1$). Αντικαθιστώντας τη δύναμη $x_n^n$ με το στοιχείο $x_{n-1}$ και το $g$ με το αντίστροφό του, αν χρειασθεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon_n < n$. Εφόσον

$$0 = \varphi(g) = \frac{\varepsilon_1}{1!} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{n!},$$

έχουμε ότι

$$(n-1)! \cdot \left( \frac{\varepsilon_1}{1!} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(n-1)!} \right) + \frac{\varepsilon_n}{n} = \nu + \frac{\varepsilon_n}{n} = 0, \text{ όπου } \nu \in \mathbb{Z}.$$

Όμως, αν $n > 1$, ο ρητός $\varepsilon_n/n$ δεν μπορεί να είναι ακέραιος, καθώς $0 < \varepsilon_n < n$. Έπεται ότι $n = 1$, δηλαδή $g = x_1^{\varepsilon_1}$ και $\varepsilon_1 = 0$. Άρα $g = 1$ και έτσι $\ker \varphi = \{1\}$.

Τελικά, αφού η $\varphi$ είναι ισομορφισμός έχουμε την ακόλουθη παράσταση για την προσθετική ομάδα των ρητών:

$$(\mathbb{Q}, +) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \mid x_n^n = x_{n-1},\ n > 1 \rangle.$$

Μια ομάδα $G$ λέγεται **πεπερασμένα παριστώμενη**, αν έχει μια παράσταση $\langle X \mid R \rangle$ με $X$ και $R$ πεπερασμένα σύνολα. Η έννοια της πεπερασμένης παράστασης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος συμπάγειας, γιατί μια ομάδα είναι πεπερασμένα παριστώμενη αν και μόνο αν είναι η θεμελιώδης ομάδα ενός συμπαγούς συμπλέγματος κελιών, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 8.

Η πρόταση που ακολουθεί λέει ότι το να είναι μια ομάδα πεπερασμένα παριστώμενη δεν εξαρτάται από την επιλογή της παράστασης.

**Πρόταση 1.3.8.** *Έστω $\langle X \mid R\rangle$ και $\langle Y \mid S\rangle$ δύο παραστάσεις μιας ομάδας $G$, έτσι ώστε τα $X, R, Y$ είναι πεπερασμένα. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $S_0$ του $S$ τέτοιο, ώστε $G \cong \langle Y \mid S_0\rangle$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ και $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Θεωρούμε, επίσης, τους φυσικούς επιμορφισμούς

$$\pi_x : F(X) \to F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle \quad \text{και} \quad \pi_y : F(Y) \to F(Y)/\langle\langle S\rangle\rangle.$$

Εφόσον οι $\langle X \mid R\rangle$ και $\langle Y \mid S\rangle$ είναι παραστάσεις της ίδιας ομάδας, υπάρχει ισομορφισμός

$$\varphi : F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle \to F(Y)/\langle\langle S\rangle\rangle.$$

Γράφουμε κάθε στοιχείο $\varphi\big(\pi_x(x_i)\big)$ ως λέξη στους γεννήτορες $\pi_y(y_j)$ της πρώτης ομάδας πηλίκο και κάθε στοιχείο $\pi_y(y_j)$ ως λέξη στους γεννήτορες (μέσω του ισομορφισμού) της δεύτερης $\varphi\big(\pi_x(x_i)\big)$:

$$\varphi\big(\pi_x(x_i)\big) = w_i\big(\pi_y(y_1), \dots, \pi_y(y_k)\big),\ i = 1, \dots, n \ \text{ και}$$

$$\pi_y(y_j) = \lambda_j\big(\varphi(\pi_x(x_1)), \dots, \varphi(\pi_x(x_n))\big),\ j = 1, \dots, k.$$

Η απεικόνιση $x_i \mapsto w_i(y_1, \dots, y_k)$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $f : F(X) \to F(Y)$. Η σύνθεση $\pi_y \circ f$ απεινονίζει κάθε στοιχείο $y_j$ στο $\varphi \circ \pi_x(y_j)$ και άρα $\varphi \circ \pi_x = \pi_y \circ f$. Αντιστοίχως, η απεικόνιση $y_j \mapsto \lambda_j(x_1, \dots, x_n)$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $g : F(Y) \to F(X)$, έτσι ώστε $\varphi \circ \pi_x \circ g = \pi_y$. Έστω

$$S_1 = \Big\{f(r_1), \dots, f(r_m), y_1^{-1} f\big(g(y_1)\big), \dots, y_k^{-1} f\big(g(y_k)\big)\Big\} \subseteq F(Y)$$

και $N = \langle\langle S_1\rangle\rangle$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $S_1$ περιέχεται στον πυρήνα $\ker \pi_y$, άρα $N \subseteq \ker \pi_y$ και έχουμε φυσικό επιμορφισμό

$$\pi : F(Y)/N \to F(Y)/\langle\langle S\rangle\rangle.$$

Εφόσον $\pi \circ f(r) = 1$ για κάθε $r \in R$, έπεται ότι $\langle\langle R\rangle\rangle \subseteq \ker(\pi \circ f)$ και συνεπώς, από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο, η σύνθεση $\pi \circ f$ παραγοντοποιείται μέσω ενός ομομορφισμού $\psi : F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle \to F(Y)/N$, δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\pi_x"] \arrow[dr, "\pi\circ f"'] & F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle \arrow[d, "\psi"] \\ & F(Y)/N \end{tikzcd}$$

Σημειώνουμε ότι η $\psi$ είναι επιμορφισμός, γιατί η εικόνα της περιέχει κάθε γεννήτορα $y_jN$ της $F(Y)/N$, αφού $\psi\circ\pi_x\circ g(y_j) = \pi\circ f\circ g(y_j) = \pi(y_j) = y_jN$. Θεωρούμε τη σύνθεση

$$\varphi^{-1}\circ\pi\circ\psi : F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle \to F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle$$

και παρατηρούμε ότι απεικονίζει κάθε γεννήτορα $\pi_x(x_i)$ στον εαυτό του. Έπεται ότι η παραπάνω σύνθεση είναι η ταυτοτική απεικόνιση, άρα η $\pi\circ\psi$ είναι ισομορφισμός και συνεπώς η $\psi$ είναι $1-1$. Δηλαδή η $\psi$ είναι ισομορφισμός και ως εκ τούτου και η $\pi$ είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι $N = \langle\langle S_1\rangle\rangle = \langle\langle S\rangle\rangle$. Έπεται ότι κάθε στοιχείο $s_\nu$ του πεπερασμένου $S_1$ γράφεται ως γινόμενο συζυγών κάποιων στοιχείων (ή των αντιστρόφων τους) $s_1^\nu, \dots, s_{\lambda_\nu}^\nu$ του $S$. Τελικά, το πεπερασμένο υποσύνολο $S_0$ του $S$ για το οποίο $\langle\langle S_0\rangle\rangle = \langle\langle S\rangle\rangle$, είναι το $S_0 = \{s_1^\nu, \dots, s_{\lambda_\nu}^\nu,\ \nu = 1, \dots, m+k\}$. □

**Παράδειγμα 1.3.9.** Η ομάδα $G = \langle \alpha, \beta \,|\, [\alpha^{2n+1}\beta\alpha^{-(2n+1)}, \beta] = 1,\ n \in \mathbb{N}\rangle$ δεν είναι πεπερασμένα παριστώμενη. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε τους κύκλους $a = (1\,2\,\dots\,\nu)$ και $b = (1\,2\,3)$ στην εναλλάσσουσα ομάδα $A_\nu$ ($\nu$ περιττός), και παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $a^\mu ba^{-\mu}$, $b$ μετατίθενται αν $3 \le \mu \le \nu - 3$, ενώ δεν μετατίθενται αν $\mu = \nu - 2$.

Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : F_2 = F(\alpha, \beta) \to A_{2\kappa+3}$ με $\varphi(\alpha) = a$ και $\varphi(\beta) = b$. Αν $\gamma_n = [\alpha^{2n+1}\beta\alpha^{-(2n+1)}, \beta]$, τότε τα $\gamma_1, \dots, \gamma_{\kappa-1}$ απεικονίζονται μέσω της $\varphi$ στο 1, ενώ το $\gamma_\kappa$ όχι. Έπεται ότι το $\gamma_\kappa$ δεν ανήκει στην κανονική υποομάδα της $F_2$ που παράγουν τα $\gamma_1, \dots, \gamma_{\kappa-1}$ και έτσι από την προηγούμενη πρόταση η $G$ δεν είναι πεπερασμένα παριστώμενη.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι η κλάση των πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις.

**Πρόταση 1.3.10.** *Έστω $N$ μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας $G$. Αν οι ομάδες $N$ και $G/N$ είναι πεπερασμένα παριστώμενες, τότε και η $G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη.*

*Απόδειξη.* Έστω $N = \langle x_1, \dots, x_m \,|\, r_1, \dots, r_k\rangle$ και $G/N = \langle y_1N, \dots, y_nN \,|\, s_1, \dots, s_\lambda\rangle$ δύο πεπερασμένες παραστάσεις των $N$ και $G/N$, αντίστοιχα, όπου το $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι σύνολο γεννητόρων της $G$ (αφού $G/N$ πεπερασμένα παριστώμενη από την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο γεννητόρων $y_1N, \ldots, y_nN$ μπορεί να «συμπληρωθεί» σε μια πεπερασμένη παράσταση της $G/N$). Είναι άμεσο ότι η $G$ παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ (έτσι αποδεικνύεται ότι η κλάση των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις). Εφόσον κάθε $s_i$ είναι μια λέξη ως προς τα $y_jN$ που ανήκει στην κανονική υποομάδα $N$, συμπεραίνουμε ότι κάθε λέξη $s_\nu(y_1, \ldots, y_n)$ ανήκει στην $N$ και δίνεται από μια λέξη $t_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ ως προς τους γεννήτορες της $N$. Έτσι οι γεννήτορες $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ της $G$ ικανοποιούν σχέσεις της ακόλουθης μορφής:

$$r_\mu = r_\mu(x_1, \ldots, x_m) = 1,\ \mu = 1, \ldots, k,\ s_\nu(y_1, \ldots, y_n) = t_\nu(x_1, \ldots, x_m),\ \nu = 1, \ldots, \lambda,$$
$$y_j^{-1}x_iy_j = w_{ij}(x_1, \ldots, x_m), \quad y_jx_iy_j^{-1} = u_{ij}(x_1, \ldots, x_m),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Θεωρούμε την ομάδα $\overline{G}$ με γεννήτορες $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$ και τις προηγούμενες σχέσεις, αλλά στους νέους γεννήτορες $\overline{x}_i, \overline{y}_j$. Η απεικόνιση $\overline{x}_i \mapsto x_i$, $\overline{y}_j \mapsto y_j$ επάγει επιμορφισμό $\varphi : \overline{G} \to G$. Η υποομάδα $\overline{N} = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m\}$ της $\overline{G}$ είναι κανονική, καθώς $\overline{y}_j^{-1}\overline{x}_i\overline{y}_j$, $\overline{y}_j\overline{x}_i\overline{y}_j^{-1} \in \overline{N}$ εκ κατασκευής. Ο περιορισμός της $\varphi$ στην $\overline{N}$ είναι ισομορφισμός, αφού κάθε σχέση (δηλαδή $N \ni h = 1$) στην $N$ προκύπτει από τις ορίζουσες σχέσεις $r_\mu(x_1, \ldots, x_m) = 1$ των οποίων οι αντίστοιχες έχουν εισαχθεί στην $\overline{G}$ (και άρα $\overline{h} = 1$). Έτσι $\ker\varphi \cap \overline{N} = \{1\}$. Αφού $\varphi(\overline{N}) = N$, επάγεται, από τον $\varphi$, επιμορφισμός $\overline{G}/\overline{N} \to G/N$ ο οποίος είναι $1-1$. Από την άλλη, ο πυρήνας του είναι $(\ker\varphi)\overline{N}/\overline{N} \cong \ker\varphi/(\ker\varphi \cap \overline{N}) = \ker\varphi$. Έπεται ότι $\ker\varphi = \{1\}$, δηλαδή η $\varphi$ είναι ισομορφισμός και συνεπώς η $G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη, αφού η $\overline{G}$ είναι. $\square$

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι η ιδιότητα του να είναι πεπερασμένα παριστώμενη μια ομάδα είναι κληρονομική στις υποομάδες πεπερασμένου δείκτη. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο βασικό λήμμα:

**Λήμμα 1.3.11.** *Αν η $H$ είναι υποομάδα μιας ομάδας $G$ πεπερασμένου δείκτη $n$, τότε η $H$ περιέχει υποομάδα $N$ πεπερασμένου δείκτη και κανονική στην $G$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη φυσική δράση της $G$ στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων $G/H$ της $H$ στην $G$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά, $x * (gH) = xgH$, και τον επαγόμενο ομομορφισμό $\rho : G \to S_n$. Αν $N = \ker\rho$, τότε $H \supseteq N \lhd G$ και $[G : N] < \infty$. $\square$

**Πρόταση 1.3.12.** *Έστω $G$ μια ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$ πεπερασμένου δείκτη $n$.*

1. *Η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αν και μόνο αν η $H$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

2. *Η $G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη αν και μόνο αν η $H$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη.*

*Απόδειξη.* 1. Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν $\{h_1, \ldots, h_m\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της $H$ και $G = g_1H \sqcup \cdots \sqcup g_nH$, τότε τα στοιχεία του συνόλου $\{g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m\}$ παράγουν την $G$.

Για το αντίστροφο, έστω $X = \{x_1, \ldots, x_\nu\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $G$ και $T$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $H$ στην $G$ με $1 \in T$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{t_i x_j t_k^{-1} \in H \,:\, t_i, t_j \in T,\, x_j \in X^{\pm 1}\}.$$

Το $S$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων της $H$. Θα δείξουμε ότι την παράγει. Το τυχαίο $h \in H$, εκφράζεται ως $h = x_{i_1} \cdots x_{i_\mu}$, όπου $x_{i_j} \in X^{\pm 1}$. Το πρόβλημα όμως είναι ότι τα στοιχεία $x_{i_j}$ δεν ανήκουν απαραιτήτως στην υπομάδα $H$. Για το $x_{i_1}$, υπάρχει $h_1 \in H$ και $t_1 \in T$, έτσι ώστε $x_{i_1} = h_1 t_1$. Ομοίως για το στοιχείο $t_1 x_{i_2}$ υπάρχουν $h_2 \in H$ και $t_2 \in T$, έτσι ώστε $t_1 x_{i_2} = h_2 t_2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε $t_\lambda x_{i_{\lambda+1}} = h_{\lambda+1} t_{\lambda+1}$ με $h_{\lambda+1} \in H$, $t_{\lambda+1} \in T$, $\lambda \leq \mu - 1$. Καθένα από τα $h_{\lambda+1}$ ανήκει στο $S$, καθώς $h_{\lambda+1} = t_\lambda x_{i_{\lambda+1}} t_{\lambda+1}^{-1}$. Αντικαθιστώντας στην αρχική ανάλυση του $h$ κάθε $x_{i_j}$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις, προκύπτει ότι

$$h = x_{i_1} \cdots x_{i_\mu} = h_1 t_1 x_{i_2} \cdots x_{i_\mu} = h_1 h_2 t_2 x_{i_3} \cdots x_{i_\mu} = \cdots = \underbrace{h_1 \cdots h_\mu}_{\in H} t_\mu.$$

Εφόσον το $T$ είναι σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $H$ στην $G$ που περιέχει το 1, από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι $t_\mu = 1$, που σημαίνει ότι πράγματι το $S$ παράγει την $H$.

2. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη και θεωρούμε μια πεπερασμένη παράσταση $\langle x_1, \ldots, x_\nu \,|\, r_1, \ldots, r_\mu \rangle$ της $G$. Έτσι $G = F/N$, όπου $F = F(x_1, \ldots, x_\nu)$ και $N = \langle\langle r_1, \ldots, r_\mu \rangle\rangle$. Από το θεώρημα της αντιστοιχίας υπάρχει υποομάδα $F_H$ της $F$ δείκτου $n$ που περιέχει την $N$ τέτοια, ώστε $H = F_H/N$. Έστω $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $F_H$ στην $F$. Εφόσον η $N$ παράγεται από γινόμενα συζυγών $g r_i^{\pm 1} g^{-1}$, $g \in F$, και κάθε $g$ έχει τη μορφή $xt$, όπου $x \in F_H$ και $t \in T$, έπεται ότι η $N$ είναι η κανονική κλειστότητα του πεπερασμένου συνόλου $\{t r_i t^{-1} \,:\, t \in T,\, i = 1, \ldots, \mu\}$ που περιέχεται στην $F_H$ και ως εκ τούτου, η $H$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη. Το αντίστροφο έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και το προηγούμενο λήμμα. $\square$

**Παρατήρηση 1.3.13.** Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι πεπερασμένα παριστώμενη (κάτι που μπορεί επίσης να δει κανείς μελετώντας τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της ομάδας). Πράγματι, αν η $G$ είναι πεπερασμένη, τότε, όπως κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, η $G$ είναι επιμορφική εικόνα μιας ελεύθερης $F(X)$ πεπερασμένης τάξης. Αφού η $G$ είναι πεπερασμένη, ο πυρήνας $K$ του επιμορφισμού είναι πεπερασμένου δείκτη στην $F(X)$ και άρα πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Συνεπώς, αν το $S$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του πυρήνα, τότε $G \cong F(X)/\langle\langle S \rangle\rangle$ και έτσι η $G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη.

Το 1911 ο Max Dehn έθεσε τα ακόλουθα τρία θεμελιώδη προβλήματα της θεωρίας ομάδων:

- **Το πρόβλημα της λέξης:** Δοθείσης μιας πεπερασμένης παράστασης μιας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας $G$, υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται πότε μια τυχαία λέξη στους γεννήτορες της $G$ αναπαριστά ή όχι το τετριμμένο στοιχείο;

  Δίνουμε δύο παραδείγματα για να γίνει ευκολότερα αντιληπτό τι εννοούμε.

  **Παράδειγμα 1.3.14.** Σε μια ελεύθερη ομάδα $F(X) = \langle X \mid \emptyset \rangle$ πεπερασμένης τάξης, αν έχουμε μια λέξη $w$ στο $X$ θετικού μήκους, τότε ελέγχουμε για την ύπαρξη στοιχειώδους αναγωγής. Αν δεν υπάρχει, τότε $w \neq 1$. Αν υπάρχει, τότε θεωρούμε τη λέξη $w'$ που προκύπτει από την $w$ με την αντίστοιχη στοιχειώδη αναγωγή (και η οποία αναπαριστά το ίδιο στοιχείο της ομάδας) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Εφόσον το μήκος της λέξης που προκύπτει κάθε φορά έχει μικρότερο μήκος από το μήκος της προηγούμενης, η διαδικασία θα περατωθεί σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα. Αν καταλήξουμε στην κενή λέξη, τότε $w = 1$, διαφορετικά $w \neq 1$.

  **Παράδειγμα 1.3.15.** Στην ελεύθερη αβελιανή $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \alpha \rangle$ όπου $\alpha = (1, 0)$ και $\beta = (0, 1)$, το τυχαίο στοιχείο εκφράζεται ως λέξη στους γεννήτορες $\alpha, \beta$. Η άθροιση των εκθετών που αντιστοιχούν σε κάθε γεννήτορα απαιτεί πεπερασμένα το πλήθος βήματα και η λέξη αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο αν και μόνο αν το άθροισμα των εκθετών για κάθε γεννήτορα ισούται με $0$.

- **Το πρόβλημα της συζυγίας:** Δοθείσης μιας πεπερασμένης παράστασης μιας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας $G$, υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται για το αν δύο τυχαίες λέξεις στους γεννήτορες της $G$ αναπαριστούν ή όχι συζυγή στοιχεία της ομάδος;

- **Το πρόβλημα του ισομορφισμού:** Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται για το αν δύο τυχαίες πεπερασμένες παραστάσεις αναπαριστούν ισόμορφες ομάδες;

Αν η ομάδα $G$ προκύπτει ως θεμελιώδης ομάδα ενός πεπερασμένου συνεκτικού συμπλέγματος κελιών, τότε, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 8, μια πεπερασμένη παράσταση της $G$ μπορεί να προκύψει από την περιγραφή του συμπλέγματος και το πρώτο πρόβλημα μεταφράζεται στο αν μπορούμε να αποφανθούμε (μέσω μιας αλγοριθμικής διαδικασίας) για μια τυχαία θηλειά, αν είναι ομοτοπική με σημείο ή όχι, ενώ το περιεχόμενο του δευτέρου είναι κατά πόσο μπορούμε να αποφανθούμε για δύο θηλειές (σε διαφορετικά σημεία), αν είναι ελεύθερα ομοτοπικές ή όχι. Εφόσον ομοιομορφικοί χώροι έχουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες, μια καταφατική απάντηση στο τρίτο πρόβλημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να διαφοροποιήσουμε τοπολογικούς χώρους.

Ο Dehn οδηγήθηκε στη διατύπωση των προβλημάτων μελετώντας αρχικά θεμελιώδεις ομάδες επιφανειών, για τις οποίες μάλιστα έδωσε καταφατική απάντηση στα δύο πρώτα χρησιμοποιώντας μεθόδους υπερβολικής γεωμετρίας. Στην περαιτέρω μελέτη των προβλημάτων οδήγησε και το ακόλουθο αποτέλεσμα του Dehn: ένας κόμβος (knot) $K \subset S^3$ είναι τετριμμένος αν και μόνο αν $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι και τα τρία προβλήματα (λέξης, συζυγίας, ισομορφισμού) είναι επιλύσιμα στην κλάση των θεμελιωδών ομάδων των συνεκτικών, κλειστών προσανατολίσιμων πολλαπλοτήτων διάστασης 3 (βλ. [2]).

Γενικά η απάντηση είναι όχι για καθένα από τα παραπάνω προβλήματα, όπως προκύπτει από τη δουλειά των Novikov και (ανεξάρτητα) Boone κατά τη δεκαετία 1950-1960. Φυσικά, άλυτο πρόβλημα λέξης συνεπάγεται και άλυτο πρόβλημα συζυγίας. Οι πιο πρόσφατες αποδείξεις για την ύπαρξη πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας με μη επιλύσιμο το πρόβλημα της λέξης χρησιμοποιούν HNN επεκτάσεις. Για περισσότερα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [7, 10].

## 1.4 Προσεγγιστικά Πεπερασμένες Ομάδες

**Ορισμός 1.4.1.** Μια ομάδα $G$ λέγεται **προσεγγιστικά πεπερασμένη** (residually finite), αν για κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g \in G$ υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $K$ και ομομορφισμός $\varphi : G \to K$, έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.

Εναλλακτικοί ορισμοί της παραπάνω έννοιας δίνονται στο ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 1.4.2.** *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για μια ομάδα $G$.*

1. *Η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

2. *Για κάθε $1 \neq g \in G$, υπάρχει κανονική υποομάδα $N$ πεπερασμένου δείκτη στην $G$ με $g \notin N$.*

3. *Για κάθε $1 \neq g \in G$, υπάρχει υποομάδα $H$ πεπερασμένου δείκτη στην $G$ με $g \notin H$.*

4. *Η τομή όλων των υποομάδων της $G$ πεπερασμένου δείκτη είναι τετριμμένη.*

5. *Η τομή όλων των κανονικών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της $G$ είναι τετριμμένη.*

*Απόδειξη.* Για τη συνεπαγωγή $(1) \Rightarrow (2)$, αρκεί να θεωρήσουμε ως $N$ τον πυρήνα ομομορφισμού $\varphi : G \to K$, όπου $K$ πεπερασμένη ομάδα, με $\varphi(g) \neq 1$. Για τη συνεπαγωγή $(2) \Rightarrow (3)$, αρκεί να θέσουμε $H = N$. Η συνεπαγωγή $(3) \Rightarrow (4)$ είναι άμεση και η $(4) \Rightarrow (5)$ προκύπτει από την παρατήρηση ότι κάθε υποομάδα της $G$ πεπερασμένου δείκτη περιέχει κανονική στην $G$ πεπερασμένου δείκτη, από την οποία έπεται ότι η τομή των υποομάδων της $G$ πεπερασμένου δείκτη ισούται με την τομή των κανονικών υποομάδων της $G$ πεπερασμένου δείκτη. Τέλος, αν υποθέσουμε το $(5)$ και θεωρήσουμε ένα μη τετριμμένο στοιχείο $g \in G$, τότε υπάρχει μια κανονική υποομάδα $N$ της $G$ πεπερασμένου δείκτη που δεν περιέχει το $g$ και άρα $\pi(g) \neq 1$, όπου $\pi : G \to G/N$ ο φυσικός επιμορφισμός. □

Συνεχίζουμε με κάποιες πρώτες ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων.

**Πρόταση 1.4.3.**

1. *Αν η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε κάθε υποομάδα $H$ της $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

2. *Αν η $H$ είναι μια υποομάδα πεπερασμένου δείκτη σε μια ομάδα $G$ και η $H$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε και η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

3. *Το ευθύ γινόμενο $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα.*

*Απόδειξη.* 1. Προκύπτει άμεσα θεωρώντας τον περιορισμό του ομομορφισμού, όπως στον Ορισμό 1.4.1, στην υποομάδα. Για το 2), θεωρούμε $1 \neq g \in G$. Αφού η $H$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, περιέχει υποομάδα $H_1$ πεπερασμένου δείκτη (άρα πεπερασμένου δείκτη και στην $G$) με $g \notin H_1$ (αν $g \notin H$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ως $H_1$ την $H$) και εφαρμόζεται το 3) του προηγούμενου λήμματος.

3. Έστω $1 \neq g \in G$. Τότε $g = g_1 \cdots g_n$, όπου $g_i \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $m \in \{1, \ldots, n\}$ για τον οποίο $g_m \neq 1$ (καθώς $g \neq 1$). Αφού η $G_m$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $K$ και ομομορφισμός $\varphi : G_m \to K$ με $\varphi(g_k) \neq 1$. Θεωρούμε την προβολή $\pi_m : G \to G_m$, τη σύνθεση $\varphi \circ \pi_m : G \to K$ και παρατηρούμε ότι $\varphi \circ \pi_m(g) = \varphi(g_m) \neq 1$. □

**Παράδειγμα 1.4.4.** Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

**Παράδειγμα 1.4.5.** Η άπειρη κυκλική $(\mathbb{Z}, +)$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη: αν $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ και επιλέξουμε πρώτο $p$ που να μην διαιρεί τον $n$, τότε ο $n$ δεν περιέχεται στην υποομάδα $p\mathbb{Z}$ που είναι πεπερασμένου δείκτη στη $\mathbb{Z}$.

**Παράδειγμα 1.4.6.** Από την προηγούμενη πρόταση και τα δύο προηγούμενα παραδείγματα, έπεται ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, αφού είναι το ευθύ γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος κυκλικών $\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_\nu}$.

**Παράδειγμα 1.4.7.** Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, αφού κάθε ομομορφισμός $\varphi : \mathbb{Q} \to K$, όπου $K$ πεπερασμένη ομάδα, είναι ο τετριμμένος (ισοδύναμα η $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει γνήσιες υποομάδες πεπερασμένου δείκτη). Πράγματι, αν $n$ είναι η τάξη της $K$, τότε για κάθε ρητό $x$ έχουμε $\varphi(x)^n = 1$. Συνεπώς, $\varphi(q) = \varphi(n \cdot q/n) = \varphi(q/n)^n = 1$, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε παράδειγμα πεπερασμένα παριστώμενης μη προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας.

**Πρόταση 1.4.8.** *Η ομάδα $GL_n(\mathbb{Z})$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Απόδειξη.* Έστω $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ ένα μη τετριμμένο στοιχείο και $m$ θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε $m > max|a_{ij}|$, όπου $A = (a_{ij})$. Ο φυσικός επιμορφισμός δακτυλίων $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ επάγει ομομορφισμό $\widetilde{\varphi} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_m)$, έτσι ώστε $\widetilde{\varphi}(A) \neq 1 = I_n$, από την επιλογή του $m$. Όμως η ομάδα $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_m)$ είναι πεπερασμένη. □

Η προηγούμενη πρόταση γενικεύεται ως ακολούθως:

**Θεώρημα 1.4.9** (Malcev)**.** *Έστω $R$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ακέραια περιοχή. Τότε η ομάδα $GL_n(R)$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Σχέδιο απόδειξης.* Η απόδειξη είναι στην ουσία ίδια με την προηγούμενη αλλά σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Αφού ο $R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος μεταθετικός δακτύλιος, η τομή $\mathcal{M}$ όλων των μεγιστικών ιδεωδών του $R$ ισούται με το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων του $R$ το οποίο με τη σειρά του είναι το $\{0\}$, γιατί ο $R$ είναι ακέραια περιοχή. Έτσι $\mathcal{M} = \{0\}$.

Αν το $\mathfrak{m}$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες του $R$, τότε ο αντίστοιχος δακτύλιος πηλίκο $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα. Από την άλλη, ο $R/\mathfrak{m}$ ως αβελιανή ομάδα είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Αν ήταν άπειρη, τότε θα περιείχε αντίτυπο του $\mathbb{Z}$ και έτσι του $\mathbb{Q}$. Όμως κάθε υποομάδα μιας πεπερασμένα παραγόμενης αβελιανής είναι πεπερασμένα παραγόμενη, ενώ η προσθετική ομάδα του $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Συνεπώς, ο δακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι πεπερασμένο σώμα και άρα η ομάδα $\mathrm{GL}_n(R/\mathfrak{m})$ είναι πεπερασμένη.

Έστω τώρα $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ ένα μη τετριμμένο στοιχείο. Εφόσον το $g$ είναι διαφορετικό από τον ταυτοτικό πίνακα $I_n$, υπάρχει στοιχείο $r \in R$ της διαφοράς $g - I_n$ που είναι μη μηδενικό. Για το στοιχείο $r$, υπάρχει μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ που δεν το περιέχει, αφού $\mathcal{M} = \{0\}$. Ο φυσικός επιμορφισμός δακτυλίων $R \to R/\mathfrak{m}$ επάγει ομομορφισμό $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(R/\mathfrak{m})$. Από την επιλογή του $r$ και του $\mathfrak{m}$ ($r \notin \mathfrak{m}$) έπεται ότι $\varphi(g - I_n) \neq 0$, ισοδύναμα, $\varphi(g) \neq I_n$. □

**Θεώρημα 1.4.10.** *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα $H$ της $GL_n(F)$, όπου $F$ σώμα, είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Απόδειξη.* Έστω $g_1, \dots, g_m$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $H$. Θεωρούμε τον υποδακτύλιο $R$ του $F$ που παράγεται από τα στοιχεία των πινάκων $g_i$, $i = 1, \dots, m$ μαζί με τα αντίστροφά τους (άρα και τη μονάδα). Τότε $R$ πεπερασμένα παραγόμενη ακέραια περιοχή, $H \leq \mathrm{GL}_n(R)$ και το προηγούμενο θεώρημα ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πόρισμα 1.4.11.** *Η θεμελιώδης ομάδα μιας κλειστής (συμπαγούς χωρίς σύνορο), συνεκτικής, υπερβολικής πολλαπλότητας $M$ διάστασης $n$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Σχέδιο απόδειξης.* Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(M)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη (λόγω συμπάγειας) και δρώντας στον αντίστοιχο καθολικό χώρο επικάλυψης, που είναι ο υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^n$, εμφυτεύεται στην ομάδα ισομετριών $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, η οποία με τη σειρά της περιέχεται στην $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$. □

Το προηγούμενο πόρισμα, σε συνδυασμό με τις βασικές ιδιότητες που ήδη έχουμε δει, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι η θεμελιώδης ομάδα κάθε επιφάνειας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Αξίζει, επίσης, να αναφερθεί το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο είναι ένα επακόλουθο δουλειάς του Hempel και της λύσης του Perelman της εικασίας της γεωμετρικοποίησης του Thurston (για περισσότερα παραπέμπουμε στο [2]).

**Θεώρημα 1.4.12.** *Η θεμελιώδης ομάδα κάθε συνεκτικής, συμπαγούς και προσανατολίσιμης πολλαπλότητας διάστασης* $3$ *είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

**Θεώρημα 1.4.13.** *Κάθε ελεύθερη ομάδα* $F(X)$ *είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Απόδειξη.* Από την Άσκηση 17 και το Παράδειγμα 1.2.9, έπεται ότι η $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ περιέχει ισομορφικό αντίτυπο κάθε ελεύθερης αριθμήσιμης τάξης. Συνεπώς, η $F(X)$, όπου το $X$ είναι αριθμήσιμο, είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ως υποομάδα της προσεγγιστικά πεπερασμένης $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (Πρόταση 1.4.8).

Αν το $X$ είναι υπεραριθμήσιμο και $1 \neq g \in F(X)$, τότε σημειώνουμε ότι το $g$ εκφράζεται ως γινόμενο στο οποίο εμπλέκονται πεπερασμένοι το πλήθος γεννήτορες $x_1, \ldots, x_n$ και έχουμε επιμορφισμό

$$\pi : F(X) = F(x_1, \ldots, x_n) * F(X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \to F(x_1, \ldots, x_n) \cong F_n$$

με $\pi(g) \neq 1$ (Πόρισμα 1.1.13). Αφού η $F_n$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $K$ και ομομορφισμός $\varphi : F_n \to K$ τέτοιος, ώστε $\varphi(\pi(g)) \neq 1$. Δηλαδή, για τη σύνθεση $\varphi \circ \pi : F(X) \to K$ έχουμε $(\varphi \circ \pi)(g) \neq 1$. □

**Πρόταση 1.4.14.** *Το ελεύθερο γινόμενο* $G = G_1 * \cdots * G_k$ *πεπερασμένων το πλήθος πεπερασμένων ομάδων* $G_1, \ldots, G_k$ *είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα.*

*Απόδειξη.* Έστω $g$ ένα μη τετριμμένο στοιχείο της $G$ και $g = g_1 \cdots g_n$, $1_{G_{\lambda_i}} \neq g_i \in G_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i \in \{1, \ldots, k\}$, η ανηγμένη του μορφή. Όπως στην απόδειξη της ύπαρξης των ελευθέρων γινομένων, θεωρούμε το σύνολο $W$ των ανηγμένων λέξεων στο αλφάβητο $\sqcup_{i=1}^{k} G_i$ και το υποσύνολό του $W_n$ που αποτελείται από τις ανηγμένες λέξεις μήκους $\leq n$. Το $W_n$ είναι πεπερασμένο, αφού κάθε παράγοντας $G_\lambda$ είναι πεπερασμένος. Για κάθε παράγοντα $G_\lambda$ ορίζουμε ομομορφισμό $\varphi_\lambda : G_\lambda \to S_{W_n}$ από τον παράγοντα αυτόν στην ομάδα μεταθέσεων επί του $W_n$, ως εξής: $\varphi_\lambda(1) = \mathrm{Id}_{W_n}$ ενώ για $1 \neq g_\lambda \in G_\lambda$ και $w = (x_1, \ldots, x_m) \in W_n$ ορίζουμε $\varphi_\lambda(g_\lambda)(w)$ να είναι η ανηγμένη λέξη που προκύπτει από την $(g_\lambda, x_1, \ldots, x_m)$, αν το μήκος αυτής είναι μικρότερο ή ίσο του $n$ και $\varphi_\lambda(g_\lambda)(w) =$

$w$ διαφορετικά (δηλαδή, αν $m = n$ και $g_\lambda$, $x_1$ σε διαφορετικούς παράγοντες). Από την καθολική ιδιότητα του ελευθέρου γινομένου οι $\varphi_\lambda$ επεκτείνονται σε ομομορφισμό $\varphi : G \to S_{W_n}$, έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$, αφού $\varphi(g)(\emptyset) = (g_1, \ldots, g_n)$. □

Η ιδέα της προηγούμενης απόδειξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε και με έναν άλλο τρόπο ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Συνεχίζουμε με μια ακόμη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των πεπερασμένα παραγόμενων προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων, για την απόδειξη της οποίας χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 1.4.15.** *Για κάθε θετικό ακέραιο $n$, το πλήθος των υποομάδων δείκτου $n$ σε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G$ είναι πεπερασμένο.*

*Απόδειξη.* Για κάθε υποομάδα $H$ πεπερασμένου δείκτη $n$ στην $G$, η φυσική δράση της $G$ στα αριστερά σύμπλοκα της $H$ (που δίνεται με πολλαπλασιασμό από αριστερά) αντιστοιχεί σε ομομορφισμό $\rho_H : G \to S_n$. Επιπροσθέτως, αφού η $H$ είναι η σταθεροποιούσα του συμπλόκου $H$, συμπεραίνουμε ότι $\rho_H \neq \rho_K$ για κάθε ζεύγος $H, K$ διαφορετικών υποομάδων της $G$ δείκτου $n$. Εφόσον η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και η $S_n$ πεπερασμένη, υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος ομομορφισμοί από την $G$ στην $S_n$ και άρα το πλήθος των υποομάδων της $G$ πεπερασμένου δείκτη $n$ είναι, επίσης, πεπερασμένο. □

Υπενθυμίζουμε ότι μια υποομάδα $K$ μιας ομάδας $G$ λέγεται **χαρακτηριστική**, αν $\varphi(K) = K$ για κάθε αυτομορφισμό $\varphi$ της $G$.

**Πόρισμα 1.4.16.** *Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Τότε κάθε υποομάδα $H$ πεπερασμένου δείκτη στην $G$ περιέχει χαρακτηριστική υποομάδα $K$ στην $G$ πεπερασμένου δείκτη.*

*Απόδειξη.* Για κάθε αυτομορφισμό $\varphi$ της $G$, ο δείκτης της υποομάδας $\varphi(H)$ ισούται με τον δείκτη της $H$. Αυτή η παρατήρηση, σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση, συνεπάγεται ότι η οικογένεια υποομάδων $\{\varphi(H) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}$, που αποτελείται από υποομάδες της $G$ δείκτου $n$, είναι πεπερασμένη και συνεπώς, η τομή τους

$$K = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Aut}(G)} \varphi(H)$$

είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην $G$ η οποία περιέχεται στην $H$. Από τον ορισμό της $K$ έπεται άμεσα ότι $\psi(K) = K$ για κάθε $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, δηλαδή, η υποομάδα $K$ είναι χαρακτηριστική. □

**Θεώρημα 1.4.17** (Baumslag). *Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(G)$ της $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Απόδειξη.* Έστω $f \in \mathrm{Aut}(G)$ με $f \neq 1 = \mathrm{Id}_G$. Τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο, ώστε $f(g) \neq g$, ισοδύναμα, $f(g)g^{-1} \neq 1$. Εφόσον η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην $G$ που δεν περιέχει το $f(g)g^{-1}$. Επιπλέον, αφού η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, το προηγούμενο πόρισμα εξασφαλίζει την ύπαρξη χαρακτηριστικής υποομάδας $K$ της $G$ πεπερασμένου δείκτη, έτσι ώστε $f(g)g^{-1} \notin K$.

Αφού η $K$ είναι χαρακτηριστική στην $G$, κάθε αυτομορφισμός $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ επάγει αυτομορφισμό $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G/K)$, ο οποίος δίνεται από τον τύπο $\widetilde{\varphi}(gK) = \varphi(g)K$. Σημειώνουμε ότι η ομάδα $\mathrm{Aut}(G/K)$ είναι πεπερασμένη, αφού η $G/K$ είναι πεπερασμένη. Έτσι προκύπτει ομομορφισμός $\psi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G/K)$ με $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$. Παρατηρούμε ότι $\psi(f)(gK) = \widetilde{f}(gK) = f(g)K \neq gK$, από την επιλογή της $K$, που σημαίνει ότι $\psi(f) \neq 1$. □

Πολλές εικασίες στη θεωρία ομάδων έχουν καταφατική απάντηση, αν περιοριστεί κανείς στην κλάση των προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων. Ιδιαιτέρως, η ιδιότητα αυτή, όταν ικανοποιείται από μια ομάδα, παίζει καταλυτικό ρόλο στην επίλυση διάφορων αλγοριθμικών προβλημάτων. Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μία τέτοια εφαρμογή.

**Θεώρημα 1.4.18.** *Το πρόβλημα της λέξης είναι επιλύσιμο για πεπερασμένα παριστώμενες προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.*

*Απόδειξη.* Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ μια πεπερασμένη παράσταση μιας προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας $G$. Αν μας δοθεί μια λέξη $w$ στο $X$, τότε, αφού το $R$ είναι πεπερασμένο σύνολο, υπάρχει ένας αλγόριθμος που ελέγχει όλα τα στοιχεία του $\langle\langle R \rangle\rangle$ ένα προς ένα ψάχνοντας για τη λέξη $w$: αρκεί να βάλουμε σε μια σειρά όλα τα δυνατά γινόμενα της μορφής $(x_1 r_{i_1}^{\varepsilon_1} x_1^{-1})(x_2 r_{i_2}^{\varepsilon_2} x_2^{-1}) \cdots (x_k r_{i_k}^{\varepsilon_k} x_k^{-1})$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $r_{i_j} \in R$. Η παραπάνω λίστα περιέχει όλες τις λέξεις που μας δίνουν το $1$ στην $G$. Έτσι, αν η λέξη $w$ αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο στην $G$, τότε ο αλγόριθμος θα τερματίσει ανιχνεύοντάς την. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο αλγόριθμος δεν θα τερματίσει αν $w \neq 1$. Για αυτόν τον λόγο, «τρέχουμε» ταυτόχρονα (παράλληλα) και τον ακόλουθο, ο οποίος τερματίζει όταν $w \neq 1$.

Για κάθε θετικό ακέραιο $n$, θεωρούμε όλους τους δυνατούς πίνακες πολλαπλασιασμού (multiplication tables) σε $n$ το πλήθος σύμβολα $\{g_1, \ldots, g_n\}$ (οι οποίοι έχουν πεπερασμένο πλήθος) και προσδιορίζουμε για ποιους από αυτούς το $\{g_1, \dots, g_n\}$ γίνεται ομάδα (ελέγχοντας σε ποιους από αυτούς ικανοποιούνται τα αξιώματα του ορισμού της ομάδας). Έτσι μπορούμε να έχουμε μια απαρίθμηση $K_1, K_2, \dots, K_\nu, K_{\nu+1}, \dots$ όλων των πεπερασμένων ομάδων. Για κάθε τέτοια ομάδα $K_\nu$ θεωρούμε όλες τις απεικονίσεις (το πλήθος τους είναι πεπερασμένο) από το $X$ στην $K_\nu$ και για καθεμία από αυτές προσδιορίζουμε αν το υποσύνολο $R$ απεικονίζεται στο $1$ ή όχι. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων, κάθε ομομορφισμός $F(X) \to K_\nu$ προκύπτει από μια απεικόνιση του $X$ στην $K_\nu$. Εκείνες οι απεικονίσεις από το $X$ στην $K_\nu$, που απεικονίζουν το $R$ στο $1$, μας δίνουν όλους τους ομομορφισμούς από την $G$ στην $K_\nu$. Ελέγχουμε αν μεταξύ αυτών υπάρχει ομομορφισμός που δεν απεικονίζει το $w$ στο $1$. Αν υπάρχει, τότε σταματάμε τη διαδικασία. Αν όχι, τότε επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με την επόμενη ομάδα $K_{\nu+1}$. Αν $w \neq 1$, τότε, αφού η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει πεπερασμένη ομάδα $K_m$ και ομομορφισμός $\varphi : G \to K_m$ με $\varphi(w) \neq 1$. Συνεπώς, ο δεύτερος αλγόριθμος θα τερματίσει αν $w \neq 1$.

Τελικά, αν τερματίσει ο πρώτος αλγόριθμος, τότε η $w$ αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο, ενώ αν τερματίσει ο δεύτερος, όχι. $\square$

## Ασκήσεις

1.1 Έστω $G = G_1 * G_2$ και $N_1$ η κανονική υποομάδα της $G$ που παράγεται από τον παράγοντα $G_1$. Να δειχθεί ότι $N_1 \cap G_2 = \{1\}$.

1.2 Κάθε πεπερασμένη υποομάδα ενός ελευθέρου γινομένου περιέχεται σε συζυγές ενός ελευθέρου παράγοντα.

1.3 Αν $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ και κάθε παράγοντας $G_\lambda$ αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο $G_\lambda = *_\mu H_{\lambda\mu}$, τότε η $G$ είναι το ελεύθερο γινόμενο όλων των $H_{\lambda\mu}$ (ονομάζεται **επιλέπτυνση** του αρχικού).

1.4 Αν $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ έχουμε μια υποομάδα $H_\lambda \leq G_\lambda$, τότε η υποομάδα που παράγεται από τις $H_\lambda$ είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλαδή $\langle H_\lambda, \lambda \in \Lambda\rangle = *_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$.

1.5 Έστω $F = F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου $X$ και $N = \langle g^2 : g \in F\rangle$ η υποομάδα της $F$ που παράγεται από τα τετράγωνα όλων των στοιχείων της. Αποδείξτε ότι η $N$ είναι κανονική υποομάδα της $F$ και ότι η ομάδα πηλίκο $F/N$ είναι αβελιανή της οποίας κάθε μη τετριμμένο στοιχείο έχει τάξη ίση με $2$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα δώστε μια δεύτερη απόδειξη της μιας κατεύθυνσης της Προτάσεως 1.2.5: ισόμορφες ελεύθερες ομάδες έχουν την ίδια τάξη [Υπόδειξη: Μια αβελιανή ομάδα της οποίας κάθε μη τετριμμένο στοιχείο έχει τάξη έναν πρώτο $p$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Z}_p$. Βρείτε μια βάση στην περίπτωσή μας].

1.6 (Καθολική ιδιότητα των ευθέων αθροισμάτων αβελιανών ομάδων). Έστω $G$ μια αβελιανή ομάδα και $G_\alpha$, $\alpha \in A$, μια οικογένεια αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών $i_\alpha : G_\alpha \to G$. Τότε η $G$ είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα $\oplus_\alpha G_\alpha$ των $G_\alpha$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η ακόλουθη καθολική συνθήκη: Για κάθε αβελιανή ομάδα $H$ και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : G \to H$ με $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha$, για κάθε $\alpha \in A$.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & G \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

1.7 Έστω $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ένα ελεύθερο γινόμενο. Αν $G'$ είναι η παράγωγος υποομάδα της $G$, τότε $G/G' \cong \oplus_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda/G'_\lambda)$ [Υπόδειξη: η αβελιανοποίηση $G/G'$ ικανοποιεί την καθολική συνθήκη του προηγούμενου ευθέως αθροίσματος].

1.8 Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε και με έναν τρίτο τρόπο ότι ισόμορφες ελεύθερες ομάδες έχουν την ίδια τάξη.

1.9 Έστω $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, όπου κάθε παράγοντας $G_\lambda$ είναι μη τετριμμένος. Αν η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε το σύνολο δεικτών $\Lambda$ είναι πεπερασμένο.

1.10 Κάθε ομάδα που επιδέχεται παράσταση με $n$ γεννήτορες και $m$ σχέσεις, όπου $n > m$, περιέχει στοιχείο άπειρης τάξης.

1.11 Μια ελεύθερη ομάδα τάξης $> 1$ δεν είναι επιλύσιμη.

1.12 Έστω $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$ μια οικογένεια ομάδων με παραστάσεις $G_\lambda = \langle X_\lambda | R_\lambda \rangle$. Δείξτε ότι $*_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \langle \sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda | \sqcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \rangle$ [Υπόδειξη: η ομάδα που ορίζεται από την τελευταία παράσταση ικανοποιεί την καθολική συνθήκη του αντίστοιχου ελευθέρου γινομένου].

1.13 Έστω $G$ μια ομάδα και μια κανονική υποομάδα της $G$. Αν η ομάδα πηλίκο $G/N$ είναι ελεύθερη, τότε υπάρχει υποομάδα $H$ της $G$ με $G = HN$ και $H \cap N = 1$.

1.14 Έστω $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ και $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ δύο στοιχεία της $G$. Αν $|\alpha|, |\beta| \geq 2$, τότε τα $g_1$ και $g_2$ παράγουν μια ελεύθερη υποομάδα της $G$ διάστασης 2.

1.15 Μια ανηγμένη λέξη $w \in F(X)$ λέγεται **κυκλικά ανηγμένη**, αν η λέξη $ww$ είναι ανηγμένη.

(i) Κάθε στοιχείο της $F(X)$ είναι συζυγές με μια κυκλικά ανηγμένη λέξη.

(ii) Αν $g, x \in F(X)$ και $g^n = x^n$, για κάποιο θετικό ακέραιο $n$, τότε $g = x$.

(iii) Δύο στοιχεία της $F(X)$ που μετατίθενται είναι δυνάμεις ενός τρίτου στοιχείου.

(iv) Δύο ανηγμένες λέξεις $w$ και $v$ αναπαριστούν συζυγή στοιχεία στην $F(X)$ αν και μόνο αν είναι της μορφής $w = w_0abw_0^{-1}$ και $v = v_0bav_0^{-1}$, όπου οι $ab$ και $ba$ είναι κυκλικά ανηγμένες λέξεις.

(v) Το πρόβλημα της συζυγίας είναι επιλύσιμο στις ελεύθερες ομάδες.

1.16 Έστω $F$ μια ελεύθερη ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $F$ πεπερασμένου δείκτη. Αν η $K$ είναι μη τετριμμένη υποομάδα της $F$, τότε $K \cap H \neq 1$.

1.17 Αποδείξτε ότι η ελεύθερη ομάδα $F_2$ τάξεως 2 περιέχει ελεύθερη υποομάδα:

(i) Τάξεως $k$ για κάθε φυσικό $k$. [Υπόδειξη: Αν $\{\alpha, \beta\}$ βάση της $F_2$, τότε θεωρήστε την υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $\alpha, \beta^{-1}\alpha\beta, \ldots, \beta^{-(k-1)}\alpha\beta^{k-1}$ και παρατηρήστε ότι κάθε ανηγμένη λέξη θετικού μήκους ως προς αυτά είναι διαφορετική από το 1.]

(ii) Αριθμήσιμης τάξης.

1.18 Μια ομάδα $K$ είναι επιμορφική εικόνα της ομάδος $G = \langle X \mid R \rangle$ αν και μόνο αν $K \cong \langle X \mid R \cup S \rangle$.

1.19 Αποδείξτε ότι η παράσταση $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-2} = \beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-2} = 1 \rangle$ αναπαριστά την τετριμμένη ομάδα.

1.20 Αποδείξτε ότι η ομάδα με παράσταση $\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta\alpha = 1 \rangle$ είναι άπειρη αβελιανή.

1.21 Αποδείξτε ότι $S_3 \cong \langle x, y \mid x^3 = y^2 = yxyx = 1\rangle$.

1.22 Έστω $H$ και $N$ δύο ομάδες, $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ένας ομομορφισμός και $N \rtimes_\phi H$ το αντίστοιχο ημιευθύ τους γινόμενο. Αν $H = \langle X \mid R\rangle$ και $N = \langle Y \mid S\rangle$, όπου $X = \{x_i, i \in I\}$ και $Y = \{y_j, j \in J\}$, τότε

$$N \rtimes_\phi H \cong \langle X \sqcup Y \mid R, S, y_j x_i y_j^{-1} = \varphi(x_i)(y_j),\, i \in I, j \in J\rangle.$$

1.23 Έστω $F_n$ η ελεύθερη ομάδα σε $n$ το πλήθος γεννήτορες $\{x_1, \dots, x_n\}$ και $G = F_n \times \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ άπειρη κυκλική με γεννήτορα $t$. Θεωρούμε την υποομάδα $H$ της $G$ που παράγεται από τα στοιχεία $x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n$. Να δειχθεί ότι η $H \cap F_n$ είναι ελεύθερη επί του συνόλου $\{x_n^i x_j x_n^{-i} : 1 \le j < n, -\infty < i < \infty\}$. Ιδιαιτέρως, η $H \cap F_n$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη αν και είναι η τομή δύο πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων. [Υπόδειξη: ένα στοιχείο της $H$ γράφεται ως γινόμενο μιας «λέξης» των $x_i^{\pm 1}$ και μιας δύναμης $t^k$. Τι σχέση έχει ο εκθέτης $k$ με τις εμφανίσεις του στοιχείου $x_n$;]

1.24 Η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ των μη μηδενικών ρητών είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη [Υπόδειξη: θεωρήστε μια αρίθμηση $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ των πρώτων, εκφράστε κάθε θετικό ρητό ως γινόμενο πρώτων με θετικούς-αρνητικούς εκθέτες και γενικεύστε το 3) της Πρότασης 1.4.3].

1.25 Έστω $G = N \rtimes H$ το ημιευθύ γινόμενο δύο προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων. Αν η $N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε και το ημιευθύ γινόμενό τους $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα.

1.26 Το ελεύθερο γινόμενο $*_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ μιας οικογένειας προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα.

# Βιβλιογραφία

[1] Σ. Ανδρεαδάκης. Μαθήματα επί της Θεωρίας Ομάδων, Αθήνα, 1976.

[2] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti. Geometrisation of 3-manifolds, EMS Tracts in Mathematics, 13, European Mathematical Society, 2010.

[3] D. E. Cohen. Combinatorial Group Theory: A Topological Approach, London Mathematical Society Student Texts 14, Cambridge, 1989.

[4] D. L. Johnson. Presentations of Groups, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts 15, Cambridge, 1997.

[5] A. G. Kurosh. The Theory of Groups, 2nd ed., 2 volumes, translated from the Russian by K.A. Hirsch, Chelsea, 1956.

[6] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar. Combinatorial Group Theory, 2nd ed., Dover, 2004.

[7] C. F. Miller III. On group-theoretic decision problems and their classification, Annals of Mathematics Studies, vol. 68, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[8] D. J. S. Robinson. A course in the theory of groups, 2nd ed., Graduate texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, 1995.

[9] J. J. Rotman. An introduction to the theory of groups, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] J. Stillwell. Classical topology and combinatorial group theory, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 72, Springer-Verlag, New York, 1993.

# Κεφάλαιο 2

# Ελεύθερα Γινόμενα με Αμάλγαμα και HNN Επεκτάσεις

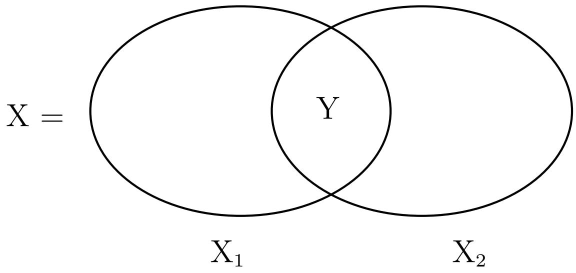
**Περιεχόμενα**



Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες του ελευθέρου γινομένου με αμάλγαμα και της HNN επέκτασης, αποδεικνύεται η ύπαρξή τους καθώς και η ύπαρξη κανονικών μορφών των στοιχείων τους. Δίνουμε, επίσης, διάφορες εφαρμογές μεταξύ των οποίων είναι η εμφύτευση κάθε αριθμήσιμης ομάδας σε ομάδα με δύο γεννήτορες, η ύπαρξη πεπερασμένα παριστώμενων μη προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων και η μη επιλυσιμότητα κάποιων ομαδοθεωρητικών προβλημάτων.

## 2.1 Ελεύθερα Γινόμενα με Αμάλγαμα

Πριν δώσουμε τον ορισμό, ας δούμε πώς προκύπτουν τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα κατά φυσιολογικό τρόπο ως θεμελιώδεις ομάδες τοπολογικών χώρων.




**Σχήμα 2.1:** *Η τοπολογική εικόνα του ελευθέρου γινομένου με αμάλγαμα.*

Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών κατά τόξα συνεκτικών υπόχωρών του $X_1$ και $X_2$ με μη κενή, κατά τόξα συνεκτική, τομή $Y = X_1 \cap X_2$. Επιλέγουμε σημείο αναφοράς $x_0$ στην τομή $X_1 \cap X_2$ και υποθέτουμε ότι οι ενθέσεις $Y \hookrightarrow X_1, Y \hookrightarrow X_2$ επάγουν μονομορφισμούς $\phi_i : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X_i, x_0)$, $i = 1, 2$, στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες. Τότε, από το θεώρημα Seifert-Van Kampen προκύπτει η ακόλουθη παράσταση (ως ομάδα πηλίκο) για τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου $X$ στο σημείο $x_0$:

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)/N,$$

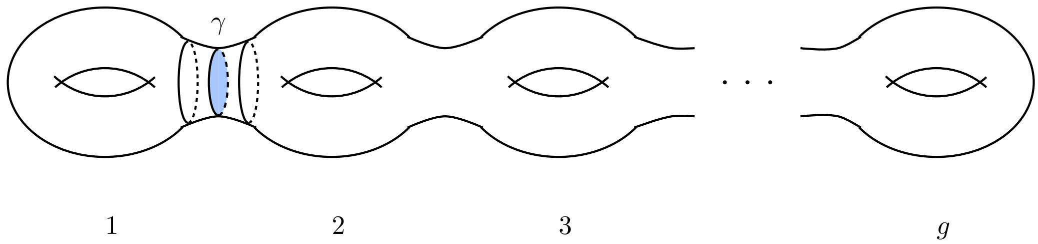
όπου $N$ είναι η κανονική υποομάδα του ελευθέρου γινομένου $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$ που παράγεται από τα στοιχεία $\phi_1(\gamma)^{-1}\phi_2(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(Y, x_0)$. Δηλαδή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $X$ στο σημείο $x_0$ είναι αυτό που λέμε ελεύθερο γινόμενο των $\pi_1(X_1, x_0)$ και $\pi_1(X_2, x_0)$ με αμαλγαματοποιημένη υποομάδα την $\pi_1(Y, x_0)$.

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω $G_i$, $i \in I$, μια οικογένεια ομάδων, $H$ μια ομάδα και $\phi_i : H \to G_i$, $i \in I$, μια οικογένεια μονομορφισμών. Το **ελεύθερο γινόμενο των ομάδων** $G_i$ **με αμαλγαματοποιημένη υποομάδα** $H$ (ή με αμάλγαμα $H$), το συμβολίζουμε με $*_H G_i$, είναι η ομάδα πηλίκο $*_{i\in I} G_i/N$ του ελευθέρου γινομένου $*_{i\in I} G_i$ προς την κανονική υποομάδα $N$ που παράγεται από το υποσύνολο $\{\phi_i(h)^{-1}\phi_j(h),\ h \in H,\ i, j \in I\}$.

Οι ομάδες $G_i$, ως συνήθως, λέγονται **παράγοντες** του γινομένου. Στην περίπτωση που έχουμε δύο παράγοντες $G_1$ και $G_2$, τότε συμβολίζουμε επίσης και με $G_1 *_H G_2$ ή ακριβέστερα με $G_1 *_{\phi_1(H)=\phi_2(H)} G_2$. Πρέπει να τονισθεί ότι το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα εξαρτάται από τους μονομορφισμούς. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε $H = G_1 = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}$, $G_2 = \langle \beta \rangle \cong \mathbb{Z}$, $\phi_1 : \alpha \mapsto \alpha$, $\phi_2 : \alpha \mapsto \beta^2$, $\psi_1 : \alpha \mapsto \alpha^3$ και $\psi_2 : \alpha \mapsto \beta^3$. Τότε τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα $G_1 *_{\phi_1(H)=\phi_2(H)} G_2$ και $G_1 *_{\psi_1(H)=\psi_2(H)} G_2$ δεν είναι ισόμορφα μεταξύ τους, αφού η πρώτη ομάδα είναι άπειρη κυκλική, ενώ η δεύτερη όχι (γιατί;).

**Παρατήρηση 2.1.2.** Έστω $\pi : *_{i \in I} G_i \to *_H G_i$ ο κανονικός επιμορφισμός. Η υπόθεση ότι κάθε $\phi_i : H \to G_i$ είναι μονομορφισμός εγγυάται ότι κάθε παράγοντας $G_i$ εμφυτεύεται κατά φυσιολογικό τρόπο (δηλαδή μέσω της $\pi$) στο αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα (βλ. Πόρισμα 2.1.9). Φυσικά, θα μπορούσε κανείς να διατυπώσει τον παραπάνω ορισμό χωρίς να υποθέτει ότι κάθε $\phi_i$ είναι μονομορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση όμως δεν είναι απαραίτητο οι παράγοντες να εμφυτεύονται (μέσω της $\pi$) στην $*_H G_i$, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης (θεωρήστε τον τετριμμένο ομομορφισμό $\phi_i$ για κάποιο $i$).

**Παράδειγμα 2.1.3.** Κάθε ελεύθερο γινόμενο είναι ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα στο οποίο η αμαλγαματοποιημένη υποομάδα είναι η τετριμμένη ομάδα $\{1\}$.




**Σχήμα 2.2:** *Η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g$.*

**Παράδειγμα 2.1.4.** Έστω $S_g$ η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g \geq 2$. Από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen προκύπτει ότι $\pi(S_g) = F_2 *_{\mathbb{Z}} F_{2(g-1)}$, όπου το αμάλγαμα είναι η άπειρη κυκλική που παράγεται από την κλάση ομοτοπίας της κλειστής καμπύλης $\gamma$ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Οι παράγοντες (η ελεύθερη τάξης 2 και η ελεύθερη τάξης $2(g-1)$) είναι οι θεμελιώδεις ομάδες των δύο συνιστωσών που προκύπτουν, αν αφαιρέσουμε από την $S_g$ μια «κυλινδρική» περιοχή της $\gamma$.

**Παράδειγμα 2.1.5.** Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_4$, όπου οι κυκλικές ομάδες τάξεως 6, 2 και 4 που εμφανίζονται στην ανωτέρω ανάλυση είναι αυτές που παράγονται από τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ με τάξεις 6, 2 και 4, αντίστοιχα.

Συνεχίζουμε προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα των κανονικών μορφών σε ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα.

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που έχουμε δύο παράγοντες, για τη διευκόλυνση του αναγνώστη όσον αφορά τη διατύπωση και τον συμβολισμό. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο χωρίς διαφοροποιήσεις και πρόσθετη δυσκολία.

Έστω, λοιπόν, δύο ομάδες $G_1$ και $G_2$ με μονομορφισμούς $\phi_i : H \to G_i,\ i = 1, 2$ από μια τρίτη ομάδα $H$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $H$ είναι υποομάδα της $G_1$, δηλαδή ότι η $\phi_1$ είναι η ένθεση της $H$ στην $G$, και να συμβολίσουμε τον δεύτερο μονομορφισμό με $\phi$. Πράγματι, χωρίς να επηρεασθεί το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα, η $H$ μπορεί να αντικατασταθεί από την εικόνα της $\phi_1(H)$ και θέτουμε $\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$.

Έτσι έχουμε $H \leq G_1$, μονομορφισμό $\phi : H \to G_2$ και το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $G_1 *_H G_2$. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2.$$

Εφόσον η ένωση $G_1 \cup G_2$ αποτελεί σύνολο γεννητόρων για το ελεύθερο γινόμενο $G_1 * G_2$ και η $\pi$ είναι επιμορφισμός, κάθε στοιχείο $g \in G_1 *_H G_2$ μπορεί να γραφεί ως $g = \pi(x_1) \cdots \pi(x_k)$, όπου $x_i \in G_1 \cup G_2$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Από όλες αυτές τις εκφράσεις του στοιχείου $g$ επιλέγουμε μια, έστω $g = \pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$, ελαχιστικού «μήκους». Τότε:

- Διαδοχικά στοιχεία $g_i$ ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες και η λέξη $g_1 \cdots g_n$ είναι ανηγμένη στο ελεύθερο γινόμενο $G_1 * G_2$.

- Επιπλέον, για κάθε $i$ έχουμε ότι $g_i \notin H \cup \phi(H)$, εκτός εάν $n = 1$ και $g \in \pi(H)$.

Έστω $T_1$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $H$ στην $G_1$ και $T_2$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $\phi(H)$ στην $G_2$ με $1_{G_1} \in T_1$ και $1_{G_2} \in T_2$.

Θεωρούμε στοιχείο $g \in G_1 *_H G_2$ με $g \notin \pi(H)$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε ότι $g = \pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$, όπου για κάθε $i$, $g_i \in G_1 \cup G_2$, $g_i \notin H \cup \phi(H)$ και διαδοχικά $g_i$ δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα $G_1$ ή $G_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $g_1 \in G_1$ και $g_n \in G_2$.

Γράφουμε το στοιχείο $g_n$ ως $g_n = \phi(h_n)\overline{g}_n$, όπου $h_n \in H$ και $\overline{g}_n \in T_2 - \{1_{G_2}\}$, το $g_{n-1}h_n$ ως $g_{n-1}h_n = h_{n-1}\overline{g}_{n-1}$, όπου $h_{n-1} \in H$ και $\overline{g}_{n-1} \in T_1 - \{1_{G_1}\}$ και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
g = &\ \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})\pi(g_n)\\
= &\ \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})\pi(\phi(h_n)\overline{g}_n)\\
= &\ \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})\pi(\phi(h_n))\pi(\overline{g}_n)\\
= &\ \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})\pi(h_n)\pi(\overline{g}_n),\ \text{αφού}\ \pi(\phi(h_n)) = \pi(h_n)\\
= &\ \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1}h_n)\pi(\overline{g}_n)\\
= &\ \pi(g_1)\cdots\pi(h_{n-1}\overline{g}_{n-1})\pi(\overline{g}_n)\\
\vdots &\\
= &\ \pi(g_0)\pi(\overline{g}_1)\cdots\pi(\overline{g}_{n-1})\pi(\overline{g}_n)
\end{aligned}$$

όπου $g_0 \in H, \overline{g}_1, \overline{g}_3, \ldots, \in T_1 - \{1_{G_1}\}$ και $\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_n \in T_2 - \{1_{G_2}\}$.

**Ορισμός 2.1.6.** Μια $H$**-κανονική μορφή** είναι μια ακολουθία $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 0$, έτσι ώστε:

1. $x_0 \in H$.
2. Για κάθε $i \geq 1$, $x_i \in T_1 - \{1_{G_1}\}$ ή $T_2 - \{1_{G_2}\}$ και διαδοχικοί όροι $x_i, x_{i+1}$ ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντιπροσώπων.

Ανάλογα ορίζεται και η έννοια της $\phi(H)$-κανονικής μορφής.

**Θεώρημα 2.1.7.** *Κάθε στοιχείο $g$ της ομάδος $G_1 *_H G_2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $g = \pi(x_0)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$, όπου η ακολουθία $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ αποτελεί $H$-κανονική μορφή.*

*Απόδειξη.* Η ύπαρξη της γραφής έπεται από την ανάλυση και τα σχόλια πριν από τον παραπάνω ορισμό. Συνεπώς, μένει να αποδειχθεί η μοναδικότητα.

Έστω $W_H$ το σύνολο των $H$-κανονικών μορφών και $W_{\phi(H)}$ το σύνολο των $\phi(H)$-κανονικών μορφών. Θεωρούμε την 1-1 και επί απεικόνιση $\phi_* : W_H \to W_{\phi(H)}$ που επάγεται από την $\phi$ και ορίζεται ως εξής:

$$(w_0, w_1, \ldots, w_n) \overset{\phi_*}{\longmapsto} (\phi(w_0), w_1, \ldots, w_n).$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι κάθε στοιχείο $x$ της $G_1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \underline{x} \cdot \overline{x}$, όπου $\underline{x} \in H$ και $\overline{x} \in T_1$.

Ορίζουμε δράση της $G_1$ στο σύνολο $W_H$ ως ακολούθως: Έστω $g \in G_1$ και $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \in W_H$ με $n \geq 1$. Τότε

$$gw = \begin{cases} (gw_0, w_1, \ldots, w_n), & \text{αν } g \in H \quad (1) \\ (\underline{gw_0}, \overline{gw_0}, \ldots, w_n), & \text{αν } g \notin H \text{ και } w_1 \in G_2 \quad (2) \\ (gw_0w_1, w_2, \ldots, w_n), & \text{αν } g \notin H,\ w_1 \in G_1 \text{ και } gw_0w_1 \in H \quad (3) \\ (\underline{gw_0w_1}, \overline{gw_0w_1}, w_2, \ldots, w_n), & \text{αν } g \notin H,\ w_1 \in G_1 \text{ και } gw_0w_1 \notin H \quad (4). \end{cases}$$

Ορίζουμε, επίσης, για $n = 0$, $g \cdot (w_0) = \begin{cases} (gw_0), & \text{αν } g \in H \quad (5) \\ (\underline{gw_0}, \overline{gw_0}), & \text{αν } g \notin H \quad (6). \end{cases}$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε, διακρίνοντας περιπτώσεις, ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα της δράσης.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ορίζουμε δράση της ομάδας $G_2$ στο σύνολο $W_{\phi(H)}$ από την οποία επάγεται δράση της $G_2$ στο $W_H$ μέσω της απεικονίσεως $\phi_*$. Πιο συγκεκριμένα, αν $g \in G_2$ και $w \in W_H$, τότε

$$g \cdot w = \phi_*^{-1}\big(g \cdot \phi_*(w)\big).$$

Γνωρίζουμε ότι η έννοια της δράσης μιας ομάδας επί ενός συνόλου είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ομομορφισμού από την ομάδα στην ομάδα μεταθέσεων του συνόλου. Συνεπώς, από την Καθολική Συνθήκη του ελευθέρου γινομένου οι δύο παραπάνω δράσεις των $G_1$ και $G_2$ στο $W_H$ επεκτείνονται σε δράση της $G_1 * G_2$ επί του $W_H$.

Από τις (1), (5) έπεται ότι $\phi(h) \cdot w = h \cdot w$, για κάθε $h \in H$ και $w \in W_H$. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία $h^{-1}\phi(h)$, $h \in H$ ανήκουν στον πυρήνα της δράσης (δηλαδή του αντίστοιχου ομομορφισμού) και συνεπώς επάγεται δράση (του πηλίκου) της $G = G_1 *_H G_2 = (G_1 * G_2)/N$ στο $W_H$ με

$$\pi(x) \cdot w = x \cdot w, \tag{7}$$

όπου $x \in G_1 * G_2$.

Έστω $g \in G_1 *_H G_2$ και $g = \pi(x_0)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$, όπου $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ είναι μια $H$-κανονική μορφή. Υπολογίζουμε την εικόνα της μορφής $(1) \in W_H$ μέσω της δράσης του στοιχείου $g$:

$$\begin{aligned} g \cdot (1) = & \ \pi(x_0)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)\cdot(1) \\ \overset{(7)}{=} & \ x_0 \cdot x_1 \cdots x_n \cdot (1) \\ \overset{(6)}{=} & \ x_0 \cdot x_1 \cdots x_{n-1} \cdot (1, x_n) \\ \overset{(2)}{=} & \ x_0 \cdot x_1 \cdots x_{n-2} \cdot (1, x_{n-1}, x_n) \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ = & \ x_0 \cdot (1, x_1, \ldots, x_n) \\ \overset{(1)}{=} & \ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν ότι η $H$-κανονική μορφή που αναπαριστά το τυχαίο $g \in G_1 *_H G_2$ καθορίζεται πλήρως από το αποτέλεσμα της δράσης του $g$ στο $(1)$ και συνεπώς είναι μοναδική. □

**Παρατήρηση 2.1.8.** Η ομάδα $G_1 *_H G_2$ εμφυτεύεται στην ομάδα μεταθέσεων $S_{W_H}$, μέσω του ομομορφισμού που αντιστοιχεί στη δράση που ορίσθηκε στην προηγούμενη απόδειξη. Πράγματι, αν $1 \neq g \in G_1 *_H G_2$ και $g = \pi(x_0)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$ η αναπαράστασή του από μια $H$-κανονική μορφή, τότε $x_i \neq 1$ για κάποιο $i$ και έτσι $g \cdot (1) \neq (1)$. Αυτό σημαίνει ότι ο πυρήνας του ομομορφισμού της δράσης είναι τετριμμένος.

**Πόρισμα 2.1.9.** *Ο κανονικός επιμορφισμός $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2 = G$ εμφυτεύει τους παράγοντες $G_1$ και $G_2$ στην $G$. Επιπλέον, η $G$ παράγεται από τις υποομάδες της $\pi(G_1)$ και $\pi(G_2)$ με $\pi(G_1) \cap \pi(G_2) = \pi(H) = \pi(\phi(H))$.*

*Απόδειξη.* Αν $N$ είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού $\pi$ και $g \in G_1 \cap N$, τότε γράφοντας $g = \underline{g}\overline{g}$, όπου $\underline{g} \in H$ και $\overline{g} \in T_1$, έχουμε ότι $\pi(g) = \pi(\underline{g}\overline{g}) = 1 = \pi(1)$. Από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών έπεται ότι $\underline{g} = \overline{g} = 1$. Δηλαδή $g = 1$ και έτσι $G_1 \cap N = 1$. Ομοίως, προκύπτει ότι και η τομή $G_2 \cap N$ είναι τετριμμένη, που σημαίνει ότι ο περιορισμός της $\pi$ σε κάθε παράγοντα είναι $1-1$.

Το ότι οι εικόνες $\pi(G_1)$ και $\pi(G_2)$ των παραγόντων παράγουν την $G$, έπεται από το γεγονός ότι οι $G_1$ και $G_2$ παράγουν το ελεύθερο γινόμενο $G_1 * G_2$ και ότι η $\pi$ είναι επί.

Τέλος, είναι άμεσο ότι $\pi(H) \subseteq \pi(G_1) \cap \pi(G_2)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε $g \in \pi(G_1) \cap \pi(G_2)$. Τότε $g = \pi(g_1) = \pi(g_2)$ για κάποια $g_1 \in G_1$ και $g_2 \in G_2$. Γράφουμε $g_1 = h_1\overline{g}_1$ και $g_2 = \phi(h_2)\overline{g}_2$, όπου $h_1, h_2 \in H$ και $\overline{g}_i \in T_i$, $i = 1, 2$, και παρατηρούμε ότι $\pi(h_1\overline{g}_1) = \pi(\phi(h_2)\overline{g}_2) = \pi(h_2\overline{g}_2)$. Πάλι από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών έπεται ότι $\overline{g}_1 = 1_{G_1}$ και $\overline{g}_2 = 1_{G_2}$. Δηλαδή $g_1 \in H$ και άρα $g \in \pi(H)$. □

**Παρατήρηση 2.1.10.** Συνοψίζοντας, ταυτίζοντας τις $G_1$, $G_2$ και $H$ με τις εικόνες τους $\pi(G_1)$, $\pi(G_2)$ και $\pi(H)$, αντίστοιχα, οι ομάδες $G_1$, $G_2$ και $H$ μπορούν να θεωρηθούν ως υποομάδες του ελευθέρου γινομένου με αμάλγαμα $G_1 *_H G_2$, έτσι ώστε:

- Οι $G_1$ και $G_2$ να το παράγουν
- $G_1 \cap G_2 = H$ και
- κάθε $g \in G_1 *_H G_2$ μπορεί να ταυτισθεί με την $H$-κανονική του μορφή $g = x_0 x_1 \cdots x_n$.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, δεν είναι δύσκολο να διατυπώσει κανείς τους σχετικούς ορισμούς και να αποδείξει τις ανάλογες προτάσεις στη γενική περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, έστω $H$ μια ομάδα, $G_i$, $i \in I$, μια οικογένεια ομάδων με μονομορφισμούς $\phi_i : H \to G_i$ και $G = *_H G_i$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε σύνολο αντιπροσώπων $T_i$ δεξιών συμπλόκων της $\phi_i(H)$ στην $G_i$, έτσι ώστε $1_{G_i} \in T_i$. Σταθεροποιούμε έναν δείκτη $i_0 \in I$ και συμβολίζουμε ως συνήθως με $\pi : *_{i \in I} G_i \to *_H G_i$ τον φυσικό επιμορφισμό. Μια **κανονική μορφή** είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 0$, έτσι ώστε $x_0 \in \phi_{i_0}(H)$, $x_i \in T_i - \{1_{G_i}\}$ και διαδοχικοί αντιπρόσωποι $x_i, x_{i+1}$, $i \geq 1$, ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντιπροσώπων.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες στη γενική περίπτωση. Η απόδειξή του είναι επί της ουσίας ίδια με αυτήν της περίπτωσης των δύο παραγόντων που έχει προηγηθεί και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

**Θεώρημα 2.1.11.** *Έστω $H$ μια ομάδα, $G_i$, $i \in I$, μια οικογένεια ομάδων με μονομορφισμούς $\phi_i : H \to G_i$ και $G = *_H G_i$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα.*

1. *Κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $g = \pi(\phi_{i_0}(x_0)) \cdot \pi(x_1) \cdots \pi(x_n)$, όπου $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ κανονική μορφή.*

2. *Ο περιορισμός του επιμορφισμού $\pi$ σε κάθε παράγοντα $G_i$ είναι 1-1. Δηλαδή, οι παράγοντες $G_i$ εμφυτεύονται μέσω της $\pi$ στην $G$.*

3. *Η $G$ παράγεται από τις εικόνες $\pi(G_i)$, $i \in I$, (αντίτυπα) των παραγόντων και επιπλέον $\pi(G_j) \cap \langle \pi(G_i) \mid i \in I, i \neq j \rangle = \pi(\phi_{i_0}(H))$, για κάθε $j \in I$.*

## 2.2 HNN Επεκτάσεις

Η περίπτωση των HNN επεκτάσεων παρουσιάζει πολλές αναλογίες με τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα, όπως ύπαρξη και μοναδικότητα κανονικών μορφών. Στην περίπτωση των ελευθέρων γινομένων δύο παραγόντων με αμάλγαμα έχουμε αντίτυπα μιας ομάδας (του αμαλγάματος) σε δύο διαφορετικές ομάδες. Στην περίπτωση των HNN επεκτάσεων έχουμε πάλι δύο ισομορφικά αντίτυπα μιας ομάδος στην ίδια όμως ομάδα.

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω $G$ μια ομάδα, $A,\ B$ δύο ισόμορφες υποομάδες της $G$ και $\phi : A \to B$ ένας ισομορφισμός. Έστω $\langle t\rangle$ η άπειρη κυκλική που παράγεται από ένα νέο «στοιχείο» $t$. Η **HNN επέκταση** της $G$ ως προς $A,\ B$ και $\phi$ είναι η ομάδα πηλίκο $G{*}_A$ του ελευθέρου γινομένου $G * \langle t\rangle$ προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από το υποσύνολο $\{t^{-1}at\phi(a)^{-1},\ a \in A\}$. Δηλαδή, είναι η ομάδα με παράσταση

$$G{*}_A = \langle G,\ t \,|\, t^{-1}at = \phi(a),\ a \in A\rangle.$$

Η ομάδα $G$ λέγεται **βάση της επέκτασης**, το $t$ **σταθερό γράμμα** και οι $A, B$ **προσεταιριζόμενες υποομάδες**.

**Παρατήρηση 2.2.2.** Έστω $A, B$ υποομάδες μιας ομάδας $G$ και $\phi : A \to B$ ένας ισομορφισμός. Γενικά, ο $\phi$ δεν επάγεται από αυτομορφισμό της $G$ (θεωρήστε $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 3\mathbb{Z}$ και $G = \mathbb{Z}$). Όμως, όπως θα δούμε στη συνέχεια (Πόρισμα 2.2.9), η προηγούμενη κατασκευή μας δίνει τη δυνατότητα να εμφυτεύσουμε την $G$ σε μια ομάδα $\Gamma$ (την αντίστοιχη HNN επέκταση), έτσι ώστε ο ισομορφισμός $\phi$ να επάγεται από εσωτερικό αυτομορφισμό της $\Gamma$, δηλαδή οι $A, B$ να είναι συζυγείς στην $\Gamma$.

**Παραδείγματα 2.2.3.**

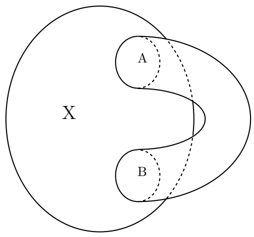
1. Η άπειρη κυκλική είναι HNN επέκταση με βάση και προσεταιριζόμενες υποομάδες την τετριμμένη ομάδα, δηλαδή $\mathbb{Z} = 1{*}_1$. Πράγματι, $1{*}_1 = \langle t\rangle/\langle 1\rangle = \langle t\rangle = \mathbb{Z}$.

2. Γενικότερα $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n-1}{*}_{\mathbb{Z}^{n-1}}$, όπου $\phi : \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}^{n-1}$ η ταυτοτική απεικόνιση. Για να το δούμε αυτό εφαρμόζουμε απευθείας τον ορισμό και έχουμε

$$\mathbb{Z}^{n-1}{*}_{\mathbb{Z}^{n-1}} = \mathbb{Z}^{n-1} * \mathbb{Z}/\langle t^{-1}at = a,\ a \in \mathbb{Z}^{n-1}\rangle = \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n.$$

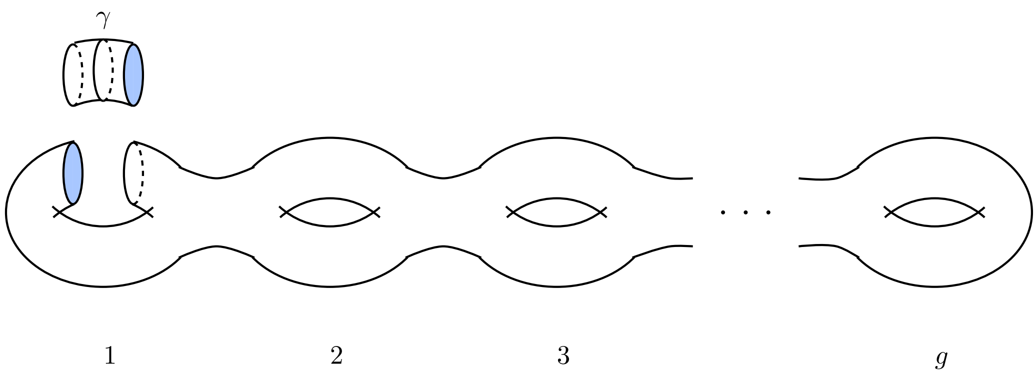
3. Πάλι απευθείας από τον ορισμό προκύπτει ότι $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}{*}_1$.

**Παράδειγμα 2.2.4.** Έστω $X$ ένας «καλός» τοπολογικός χώρος (δηλαδή ικανοποιούνται οι συνήθεις υποθέσεις συνεκτικότητας τοπικές και μη κτλ.) και $A, B$ ομοιομορφικοί υπόχωροι του $X$, έτσι ώστε η ένθεση του $A$ στον $X$ επάγει μονομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες (με κατάλληλα επιλεγμένο σημείο αναφοράς). Επισυνάπτουμε τον κύλινδρο $A \times [0,1]$ στον $X$, ταυτοποιώντας τα σημεία του κυλίνδρου $A \times \{0\}$ με τα αντίστοιχα του $A$ και τα σημεία της μορφής $A \times \{1\}$ με τα αντίστοιχα σημεία του $B$, χρησιμοποιώντας έναν ομοιομορφισμό από τον $A$ στον $B$. Ας συμβολίσουμε με $Y$ τον χώρο που προκύπτει, όπως στο Σχήμα 2.3. Τότε από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 8 προκύπτει ότι $\pi_1(Y) = \pi_1(X)*_{\pi_1(A)}$.




**Σχήμα 2.3:** *Η τοπολογική εικόνα μιας HNN επέκτασης.*

**Παράδειγμα 2.2.5.** Έστω $S_g$ η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Θεωρούμε απλή κλειστή καμπύλη $\gamma$ στην $S_g$ και κυλινδρική περιοχή αυτής όπως στο Σχήμα 2.4. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, προκύπτει ότι $\pi_1(S_g) = F_{2g-1}*_{\mathbb{Z}}$, όπου οι προσεταιριζόμενες υποομάδες (άπειρες κυκλικές) παράγονται από τις κλάσεις ομοτοπίας των αντιτύπων της $\gamma$ στις πλευρές του κυλίνδρου και η βάση (η ελεύθερη διάστασης $2g-1$) είναι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου (της μιας συνιστώσας) που απομένει, αν αφαιρέσουμε την κυλινδρική περιοχή της $\gamma$ από την επιφάνεια.




**Σχήμα 2.4**

Επανερχόμαστε στη μελέτη των HNN επεκτάσεων, δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς και αποδείξεις σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα των κανονικών μορφών.

Έστω $A, B$ δύο υποομάδες μιας ομάδος $G$, $\phi : A \to B$ ένας ισομορφισμός και $G*_A = \langle G,\, t \,|\, t^{-1}at = \phi(a),\ a \in A\rangle$ η αντίστοιχη HNN επέκταση. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : G * \langle t\rangle \to G*_A$. Κάθε στοιχείο $g$ της $G*_A$ μπορεί να γραφεί ως

$$g = \pi(g_0) \cdot \pi(t)^{\varepsilon_1} \cdot \pi(g_1) \cdot \pi(t)^{\varepsilon_2} \cdot \pi(g_2) \cdots \pi(t)^{\varepsilon_n} \cdot \pi(g_n), \tag{8}$$

όπου $g_i \in G$, για $i = 0, \ldots, n$ (πιθανόν κάποια να είναι ίσα με 1) και $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$, για $j = 1, \ldots, n$. Μια τέτοια ακολουθία $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ λέγεται **ανηγμένη**, αν δεν περιέχει τμήματα της μορφής $t^{-1}, a, t$, όπου $a \in A$ ή $t, \beta, t^{-1}$, όπου $\beta \in B$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της $G*_A$ μπορεί να αναπαρασταθεί (με την έννοια της $(8)$) από μια ανηγμένη ακολουθία (αρκεί να επιλέξουμε μια ακολουθία ελαχίστου μήκους που το αναπαριστά).

Έστω $T_A$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $A$ στην $G$ και $T_B$ ένα σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $B$ στην $G$, έτσι ώστε $1 \in T_A$ και $1 \in T_B$.

**Ορισμός 2.2.6.** Μια **κανονική μορφή** είναι μια ανηγμένη ακολουθία $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$, έτσι ώστε:

1. Το $g_0$ είναι αυθαίρετο στοιχείο της $G$.
2. Αν $\varepsilon_i = -1$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, τότε $g_i \in T_A$.
3. Αν $\varepsilon_i = 1$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, τότε $g_i \in T_B$.

**Θεώρημα 2.2.7.** *Έστω $G*_A = \langle G,\, t \,|\, t^{-1}at = \phi(a),\ a \in A\rangle$ μια HNN επέκταση με βάση $G$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες $A$ και $B$ (και $T_A, T_B$ όπως πριν). Τότε κάθε στοιχείο $g$ της $G*_A$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $g = \pi(g_0)\cdot\pi(t)^{\varepsilon_1}\cdot\pi(g_1)\cdot\pi(t)^{\varepsilon_2}\cdot\pi(g_2)\cdots\pi(t)^{\varepsilon_n}\cdot \pi(g_n) = \pi(g_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot g_1 \cdot t^{\varepsilon_2} \cdot g_2 \cdots t^{\varepsilon_n} \cdot g_n)$, όπου $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ κανονική μορφή.*

*Απόδειξη.* Αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη. Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει, κάθε στοιχείο $g$ της $G*_A$ αναπαρίσταται από μια ανηγμένη «λέξη», δηλαδή $g = \pi(x_0)\cdot\pi(t)^{\varepsilon_1}\cdot\pi(x_1)\cdot \pi(t)^{\varepsilon_2}\cdot\pi(x_2)\cdots\pi(t)^{\varepsilon_n}\cdot\pi(x_n)$, όπου $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, t^{\varepsilon_2}, x_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ ανηγμένη ακολουθία. Σημειώνουμε ότι κάθε $x \in G*_A$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = a_x \cdot \overline{x} = \beta_x \cdot \tilde{x}$, όπου $a_x \in A$, $\overline{x} \in T_A$, $\beta_x \in B$ και $\tilde{x} \in T_B$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $\varepsilon_n = 1$, τότε γράφουμε $x_n = \beta_{x_n} \cdot \tilde{x}_n$ και έχουμε ότι

$$\pi(t^{\varepsilon_n} \cdot x_n) = \pi(t \cdot x_n) = \pi(t \cdot \beta_{x_n} \cdot \tilde{x}_n) = \pi(\phi^{-1}(\beta_{x_n}) \cdot t \cdot \tilde{x}_n),$$

όπου $\tilde{x}_n \in T_B$. Αν $\varepsilon_n = -1$, τότε $x_n = a_{x_n} \cdot \overline{x}_n$ και

$$\pi(t^{\varepsilon_n} \cdot x_n) = \pi(t^{-1} \cdot x_n) = \pi(t^{-1} \cdot a_{x_n} \cdot \overline{x}_n) = \pi(\phi(a_{x_n}) \cdot t^{-1} \cdot \overline{x}_n),$$

όπου $\overline{x}_n \in T$.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το στοιχείο $\pi(t^{\varepsilon_{n-1}} \cdot x_{n-1} \cdot \phi^{-1}(\beta_{x_n}))$ στην πρώτη περίπτωση και με το $\pi(t^{\varepsilon_{n-1}} \cdot x_{n-1} \cdot \phi(a_{x_n}))$ στη δεύτερη. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η κανονική μορφή του $g$.

Για τη μοναδικότητα, όπως στα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα, θα ορίσουμε δράση της ομάδος $G*_A$ στο σύνολο $W$ που αποτελείται από όλες τις κανονικές μορφές και θα υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της δράσης του στοιχείου $g$ στην κανονική μορφή (1).

Έστω $w = (w_0, t^{\varepsilon_1}, w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n)$ κανονική μορφή και $g \in G$. Μέσω του τύπου

$$g \cdot w = (gw_0, t^{\varepsilon_1}, w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n)$$

ορίζεται δράση της $G$ στο $W$. Στη συνέχεια, ορίζουμε δράση της άπειρης κυκλικής $\langle t \rangle$ στο $W$, ορίζοντας τη δράση του γεννήτορα:

$$t \cdot w = \begin{cases} (\phi^{-1}(w_0)w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n), & \text{αν } w_0 \in B \ \text{ και } \varepsilon_1 = -1 \\ (\phi^{-1}(\beta), t, \tilde{w}_0, t^{\varepsilon_1}, w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n), & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta$ στοιχείο της $B$ τέτοιο, ώστε $w_0 = \beta \cdot \tilde{w}_0$. Για να διαπιστώσουμε ότι το στοιχείο $t$ ορίζει (μέσω του παραπάνω τύπου) πράγματι μετάθεση του συνόλου $W$, αρκεί να παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο δρα το αντίστροφο $t^{-1}$:

$$t^{-1} \cdot w = \begin{cases} (\phi(w_0)w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n), & \text{αν } w_0 \in A \ \text{ και } \varepsilon_1 = 1 \\ (\phi(a), t^{-1}, \overline{w}_0, t^{\varepsilon_1}, w_1, t^{\varepsilon_2}, w_2, \ldots, t^{\varepsilon_n}, w_n), & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου το $a$ είναι στοιχείο της $A$ για το οποίο $w_0 = a \cdot \overline{w}_0$. Από την Καθολική Συνθήκη του ελευθέρου γινομένου έχουμε την επέκταση των παραπάνω δράσεων σε δράση της $G * \langle t \rangle$ επί του $W$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $t^{-1}at$ και $\phi(a)$, για $a \in A$, δρουν με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, τα στοιχεία $t^{-1}at\phi(a)^{-1}$, $a \in A$, δρουν τετριμμένα στο $W$. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική υποομάδα $N$ που παράγεται από αυτά περιέχεται στον πυρήνα του αντίστοιχου ομομορφισμού (της δράσης) και άρα επάγεται δράση της ομάδας πηλίκο $G * \langle t \rangle / N = G*_A$ στο $W$.

Τέλος, αν $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ είναι μια κανονική μορφή που αντιστοιχεί στο στοιχείο $g \in G*_A$, τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$g \cdot (1) = (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$$

από το οποίο έπεται η μοναδικότητα. □

Από τα προηγούμενα έπεται άμεσα αυτό που είναι γνωστό ως «Λήμμα του Britton»:

**Πόρισμα 2.2.8.** *Κάθε ανηγμένη ακολουθία $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, g_2, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ με $n > 0$ αναπαριστά μη τετριμμένο στοιχείο στην ομάδα $G*_A$.*

Ακριβώς όπως στην περίπτωση των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα αποδεικνύεται το ακόλουθο:

**Πόρισμα 2.2.9.** *Έστω $G*_A = \langle G, t \,|\, t^{-1}at = \phi(a),\ a \in A \rangle$ μια HNN επέκταση με βάση $G$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες $A$ και $B$. Ο κανονικός επιμορφισμός $\pi : G * \langle t \rangle \to G*_A$ επάγει (μέσω περιορισμού) εμφυτεύσεις των ομάδων $G$ και $\langle t \rangle$ στην $G*_A$. Επιπλέον, οι αντίστοιχες εικόνες είναι συζυγείς μέσω του στοιχείου $t$ και ο περιορισμός της συζυγίας στην εικόνα της $A$ ταυτίζεται με τον ισομορφισμό $\phi$.*

## 2.3 Εφαρμογές

Σε κάθε εισαγωγικό μάθημα θεωρίας ομάδων, αυτό που γίνεται καλά αντιληπτό από τους σπουδαστές είναι ότι μια ομάδα που παράγεται από ένα στοιχείο είναι κυκλική (άπειρη ή πεπερασμένη) και ως εκ τούτου έχουμε πλήρη γνώση αυτής. Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί κατά πόσο είναι εφικτή (και ίσως εύκολη) η ταξινόμηση των ομάδων με δύο γεννήτορες. Όμως, όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα, οι δύο αυτές περιπτώσεις κάθε άλλο παρά συγκρίσιμες είναι και η κλάση των ομάδων με δύο γεννήτορες είναι τεράστια.

**Θεώρημα 2.3.1.** *Κάθε αριθμήσιμη ομάδα $G$ μπορεί να εμφυτευθεί σε μια ομάδα με δύο γεννήτορες.*

*Απόδειξη.* Έστω $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ αριθμήσιμο σύνολο γεννητόρων της $G$ με $g_0 = 1$, όπου ενδέχεται να έχουμε επαναλήψεις, αν η $G$ είναι πεπερασμένη.

Θεωρούμε την ελεύθερη ομάδα $F = F(a,b)$ με βάση $\{a,b\}$. Παρατηρούμε ότι οι $\langle b^{-n}ab^n \,|\, n = 0,1,\dots\rangle$ και $\langle a^{-n}ba^n \,|\, n = 0,1,\dots\rangle$ αποτελούν ελεύθερες υποομάδες της $F$ αριθμησίμου τάξης με βάσεις τα δεδομένα στοιχεία που τις παράγουν. Η ταυτοτική απεικόνιση από την $F$ στην $F$ και η τετριμμένη από την $G$ στην $F$, επεκτείνονται σε ομομορφισμό $\phi : G * F \to F$ με $\phi(g_n a^{-n}ba^n) = a^{-n}ba^n$ για κάθε $n$. Εφόσον ο περιορισμός της $\phi$ στο σύνολο $\{g_n a^{-n}ba^n,\, n = 0,1,\dots\}$ είναι 1-1, έχουμε ότι η $B = \langle g_n a^{-n}ba^n,\, n = 0,1,\dots\rangle$ είναι ελεύθερη υποομάδα της $G * F$ αριθμήσιμης τάξης.

Έστω $\Gamma = \langle G * F,\, t \,|\, t^{-1}b^{-n}ab^n t = g_n a^{-n}ba^n\,,\, n = 0,1,\dots\rangle$, η HNN επέκταση με βάση το ελεύθερο γινόμενο $G * F$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες τις $A, B$. Τότε η $G$ εμφυτεύεται στη $\Gamma$, η οποία παράγεται από δύο στοιχεία. Πράγματι, για $n = 0$ από τις σχέσεις που ικανοποιούνται στη $\Gamma$, έχουμε ότι $t^{-1}at = b$ και παρατηρούμε, επίσης, ότι το στοιχείο $g_n$ εκφράζεται συναρτήσει των $a, b, t$. Συνεπώς, $\Gamma = \langle g_n, a, b, t \,|\, n = 0,1,\dots\rangle = \langle a,b,t\rangle = \langle a,t\rangle$. □

Στη συνέχεια, δίνουμε παράδειγμα μιας οικογένειας πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων οι οποίες δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Υπενθυμίζουμε ότι μια ομάδα $G$ λέγεται προσεγγιστικά πεπερασμένη (residually finite), αν κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της «επιβιώνει» σε κάποιο πεπερασμένο πηλίκο της ομάδας, ισοδύναμα, η τομή όλων των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της $G$ είναι η τετριμμένη υποομάδα. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, όπως ήδη έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο.

Μια ομάδα $G$ λέγεται **Hopfian**, αν κάθε επιμορφισμός $\phi : G \to G$ είναι αυτομορφισμός.

**Πρόταση 2.3.2.** *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη και προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα $G$ είναι Hopfian.*

*Απόδειξη.* Έστω $\phi : G \to G$ ένας επιμορφισμός, $K = \mathrm{Ker}\phi$ ο πυρήνας του $\phi$ και $H$ μια υποομάδα της $G$ δείκτου $n$. Εφόσον η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος υποομάδες της $G$ δείκτου $n$, έστω $H_1, \dots, H_\nu$. Από το Πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών οι ομάδες $G$ και $G/K$ είναι ισόμορφες. Αυτό σημαίνει ότι και το πλήθος των υποομάδων δείκτου $n$ στην $G/K$ είναι επίσης $\nu$. Από το θεώρημα της αντιστοιχίας, αυτές θα είναι της μορφής $M_1/K, \dots, M_\nu/K$, όπου οι $M_i$ είναι υποομάδες δείκτου $n$ της $G$ που περιέχουν την $K$.

Συνεπώς οι $M_1, \ldots, M_\nu$ είναι μια αναδιάταξη των $H_1, \ldots, H_\nu$. Δηλαδή, κάθε $H_i$ ισούται με κάποια $M_j$ (για κατάλληλες τιμές των δεικτών) και ως εκ τούτου περιέχει την $K$. Ιδιαιτέρως, η $H$ περιέχει την $K$.

Έπεται ότι η $K$ περιέχεται σε κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη της $G$, άρα και στην τομή τους, η οποία είναι τετριμμένη, αφού η $G$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Έτσι $K = 1$ και $\phi$ αυτομορφισμός. $\square$

**Θεώρημα 2.3.3** (Baumslag-Solitar 1962). *Για κάθε ζεύγος φυσικών $p \geq 2$ και $q \geq 2$ που είναι πρώτοι μεταξύ τους, η ομάδα $G_{p,q} = \langle \beta, t \,|\, t^{-1}\beta^p t = \beta^q \rangle$ δεν είναι Hopfian και άρα ούτε προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι η ομάδα $G_{p,q}$ είναι μια HNN-επέκταση με βάση την άπειρη κυκλική $\langle \beta \rangle$, προσεταιριζόμενες υποομάδες $A = \langle \beta^p \rangle$, $B = \langle \beta^q \rangle$ και ισομορφισμό $\phi : \beta^p \mapsto \beta^q$.

Ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση $\psi$ με $t \overset{\psi}{\mapsto} t$ και $\beta \overset{\psi}{\mapsto} \beta^p$ επάγει ομομορφισμό στην $G_{p,q}$. Πράγματι, από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων, η παραπάνω απεικόνιση επάγει ομομορφισμό στο ελεύθερο γινόμενο $\langle \beta \rangle * \langle t \rangle$, για τον οποίο διατηρούμε το ίδιο σύμβολο. Εφόσον

$$\psi(t^{-1}\beta^p t) = t^{-1}\psi(\beta)^p t = t^{-1}(\beta^p)^p t = (t^{-1}\beta^p t)^p = (\beta^q)^p = (\beta^p)^q = \psi(\beta)^q = \psi(\beta^q),$$

ο ισχυρισμός έπεται από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο και τον ορισμό της ομάδος $G_{p,q}$.

Τα στοιχεία $t, \beta^p$ και $\beta^q = t^{-1}\beta^p t$ (για την ακρίβεια οι εικόνες αυτών μέσω της φυσικής προβολής που όμως εμφυτεύει τους παράγοντες του παραπάνω ελευθέρου γινομένου) ανήκουν στην εικόνα του $\psi$. Το γεγονός ότι οι ακέραιοι είναι πρώτοι μεταξύ τους συνεπάγεται ότι τα στοιχεία $t$, $\beta$ ανήκουν στην εικόνα του $\psi$ και ως εκ τούτου ο $\psi$ είναι επιμορφισμός. Για να αποδείξουμε ότι η $G_{p,q}$ δεν είναι Hopfian, αρκεί να δείξουμε ότι $\ker\psi \neq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\psi(t^{-1}\beta t\beta^{-1})^p = (t^{-1}\beta^p t\beta^{-p})^p = (\beta^q\beta^{-p})^p = (\beta^p)^{q-p} = \psi(\beta)^{q-p} = \psi(\beta^{q-p}),$$

από όπου έπεται ότι το στοιχείο $(t^{-1}\beta t\beta^{-1})^p\beta^{p-q}$ ανήκει στον πυρήνα του ομομορφισμού $\psi$. Όμως $(t^{-1}\beta t\beta^{-1})^p\beta^{p-q} \neq 1$, από το λήμμα του Britton 2.2.8. $\square$

## Άπειρες απλές ομάδες

Σε αυτό το σημείο είναι εύκολο να δώσουμε παραδείγματα πεπερασμένα παραγόμενων άπειρων απλών ομάδων. Έστω $p \geq 2$ ένας φυσικός και $\Gamma = G_{p,p+1} = \langle \beta, t \,|\, t^{-1}\beta^p t = \beta^{p+1} \rangle$. Αποδείξαμε την ύπαρξη επιμορφισμού $\psi : \Gamma \to \Gamma$ με πυρήνα ο οποίος περιέχει το μη τετριμμένο στοιχείο $(t^{-1}\beta t\beta^{-1})^p\beta^{-1}$. Εφόσον ο πυρήνας του $\psi$ είναι κανονική υποομάδα, το στοιχείο $\gamma = \beta^{-1}(t^{-1}\beta t\beta^{-1})^p$ ανήκει, επίσης, στον πυρήνα και είναι μη τετριμμένο.

Ισχυριζόμαστε ότι το στοιχείο $\gamma$ δεν επιβιώνει σε καμία επιμορφική εικόνα $\pi : \Gamma \to F$, όπου $F$ πεπερασμένη ομάδα. Πράγματι, εφόσον κάθε δύναμη $\psi^n : \Gamma \to \Gamma$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\gamma_n \in \Gamma$ με $\psi^n(\gamma_n) = \gamma$. Έτσι $\pi\big(\psi^m(\gamma_n)\big) = 1$, οποτεδήποτε $m > n$ και $\pi\big(\psi^n(\gamma_n)\big) = \pi(\gamma)$. Αν είχαμε $\pi(\gamma) \neq 1$, τότε οι ομομορφισμοί $\pi \circ \psi^n : \Gamma \to F$, $n \geq 1$, θα ήταν διαφορετικοί μεταξύ τους και θα είχαμε άπειρους το πλήθος ομομορφισμούς από μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα σε μια πεπερασμένη ομάδα, το οποίο δεν μπορεί να συμβεί, αφού κάθε ομομορφισμός καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες του στους γεννήτορες (οι οποίες έχουν πεπερασμένες επιλογές σε μια πεπερασμένη ομάδα).

Από το λήμμα του Britton 2.2.8, η υποομάδα $A$ της $\Gamma$ που παράγεται από τα στοιχεία $t, \gamma$ είναι ελεύθερη με βάση αυτά τα δύο στοιχεία. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε δύο ισομορφικά αντίτυπα $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ της $\Gamma$ και το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $G = \Gamma_1 *_{A_1=A_2} \Gamma_2$, ταυτοποιώντας τα αντίτυπα $A_1$ και $A_2$ μέσω του ισομορφισμού $t_1 \mapsto \gamma_2, \gamma_1 \mapsto t_2$. Σε κάθε πεπερασμένο πηλίκο της $G$, τα στοιχεία $\gamma_1$ και $\gamma_2$ (άρα και τα $t_2$, $t_1$ με τα οποία ταυτοποιούνται) απεικονίζονται στο τετριμμένο στοιχείο. Έπεται ότι και οι άλλοι γεννήτορες των παραγόντων απεικονίζονται, επίσης, στο τετριμμένο στοιχείο κάθε πεπερασμένου πηλίκου που σημαίνει ότι κάθε πεπερασμένο πηλίκο της $G$ είναι τετριμμένο. Δηλαδή, η $G$ είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα, η οποία δεν έχει μη τετριμμένα πεπερασμένα πηλίκα. Το πηλίκο της $G$ ως προς μια μεγιστική και γνήσια κανονική υποομάδα, είναι απλή, άπειρη και πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα (όχι όμως πεπερασμένα παριστώμενη). Υπάρχουν και πεπερασμένα παριστώμενες, άπειρες απλές ομάδες η κατασκευή των οποίων είναι δυσκολότερη.

## Το Θεώρημα των Novikov-Boone

**Θεώρημα 2.3.4** (Novikov-Boone)**.** *Υπάρχει μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $G$ με άλυτο το πρόβλημα της λέξης, δηλαδή, δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται* *πότε μια δοθείσα λέξη στους γεννήτορες αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο ή όχι.*

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, χρησιμοποιούμε έννοιες της θεωρίας υπολογισιμότητας των οποίων η πλήρης ανάπτυξη δεν είναι στα πλαίσια του παρόντος. Χρειαζόμαστε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ένα υποσύνολο $S$ του $\mathbb{N}$ λέγεται **αναδρομικό** (recursive), αν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος αποφαίνεται πότε ένας τυχαίος δεδομένος φυσικός $n$ ανήκει στο $S$ ή όχι. Ένα υποσύνολο $S$ του $\mathbb{N}$ λέγεται **αναδρομικά αριθμήσιμο** (recursively enumerable), αν υπάρχει ένα αλγόριθμος ο οποίος απαριθμεί τα στοιχεία του $S$. Είναι άμεσο ότι ένα αναδρομικό σύνολο είναι αναδρομικά αριθμήσιμο. Υπάρχουν όμως σύνολα τα οποία είναι αναδρομικώς αριθμήσιμα αλλά όχι αναδρομικά (βλ. [2]). Έτσι το γεγονός ότι υπάρχει αλγόριθμος που τοποθετεί σε μια σειρά τα στοιχεία ενός αναδρομικού συνόλου $S$ δεν σημαίνει ότι υπάρχει αλγόριθμος μέσω του οποίου προσδιορίζεται αν ένας φυσικός ανήκει στο $S$ ή όχι.

Μια ομάδα λέγεται **αναδρομικά παριστώμενη** αν επιδέχεται μια παράσταση $\langle X \mid R\rangle$, όπου το $X$ είναι πεπερασμένο και το $R$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμο (το σύνολο λέξεων $R$ επί του πεπερασμένου αλφάβητου $X^{\pm 1}$ λέγεται αναδρομικά αριθμήσιμο αν υπάρχει αλγόριθμος που τοποθετεί σε μια σειρά τα στοιχεία του $R$).

Η απόδειξη του θεωρήματος απαιτεί, επίσης, το ακόλουθο αποτέλεσμα του Higman, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο [1], και το οποίο απαντά πλήρως στο ερώτημα: ποιες πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες είναι υποομάδες πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων; Το πλήθος των πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων είναι αριθμήσιμο (γιατί;), ενώ, από την άλλη, το πλήθος των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων είναι υπεραριθμήσιμο (Άσκηση 14).

**Θεώρημα 2.3.5** (Higman)**.** *Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα μπορεί να εμφυτευθεί σε μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα αν και μόνο αν είναι αναδρομικά παριστώμενη.*

*Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4.* Έστω $S \subseteq \mathbb{Z}$ ένα αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο το οποίο δεν είναι αναδρομικό. Θεωρούμε την ομάδα με παράσταση

$$G = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha^{-s}\beta\alpha^{s} = \gamma^{-s}\delta\gamma^{s},\ s \in S\rangle.$$

Η $G$ είναι το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα δύο αντιτύπων $F(\{\alpha, \beta\})$ και $F(\{\gamma, \delta\})$ της ελεύθερης $F_2$ τάξης 2, που προκύπτει ταυτοποιώντας τις υποομάδες $\langle \alpha^{-s}\beta\alpha^{s},\ s \in S\rangle$ και $\langle \gamma^{-s}\delta\gamma^{s},\ s \in S\rangle$ (φυσικά η ταυτοποίηση είναι $\alpha^{-s}\beta\alpha^{s} \equiv \gamma^{-s}\delta\gamma^{s}$). Παρατηρούμε ότι η λέξη $w = \alpha^{-n}\beta\alpha^{n}\gamma^{-n}\delta^{-1}\gamma^{n}$ αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο στην $G$ αν και μόνο αν $n \in S$ (αν $n \notin S$, τότε η λέξη είναι ανηγμένη και χρησιμοποιούμε την Άσκηση 3). Εφόσον το $S$ δεν είναι αναδρομικό, δεν υπάρχει αλγόριθμος μέσω του οποίου μπορούμε να αποφανθούμε αν $n \in S$ και συνεπώς το πρόβλημα της λέξης είναι άλυτο για την πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G$. Κάθε σχέση της $G$ αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο του $S$. Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το $S$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμο, συνεπάγεται ότι το σύνολο των σχέσεων είναι αναδρομικά αριθμήσιμο και έτσι η $G$ είναι αναδρομικά παριστώμενη. Από το θεώρημα εμφύτευσης του Higman, η $G$ εμφυτεύεται σε μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $\Gamma$ στην οποία το πρόβλημα της λέξης δεν είναι επιλύσιμο (αφού δεν είναι στην $G$). $\square$

## Το Θεώρημα των Adian-Rabin

Κλείνουμε με κάποιες ακόμη εφαρμογές μη επιλυσιμότητας ομαδοθεωρητικών προβλημάτων.

**Ορισμός 2.3.6.** Μια ομαδοθεωρητική ιδιότητα $\mathcal{M}$ πεπερασμένα παριστώμενων ομάδων λέγεται **ιδιότητα του Markov** αν:

1. υπάρχει πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα που ικανοποιεί την $\mathcal{M}$,
2. υπάρχει πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα η οποία δεν μπορεί να εμφυτευθεί σε οποιαδήποτε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα που ικανοποιεί την $\mathcal{M}$.

**Παράδειγμα 2.3.7.** Η ιδιότητα του να είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα αβελιανή, είναι ιδιότητα του Markov. Πράγματι, κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή και πεπερασμένα παριστώμενη, ενώ οποιαδήποτε μη αβελιανή (μη τετριμμένη) ομάδα δεν μπορεί να εμφυτευθεί σε αβελιανή ομάδα.

Είναι άμεσο να επιβεβαιώσει κανείς ότι καθεμία από τις ακόλουθες ιδιότητες, είναι ιδιότητα του Markov: το να είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα τετριμμένη, πεπερασμένη, ελεύθερη, απλή ή επιλύσιμη.

**Θεώρημα 2.3.8** (Adian-Rabin). *Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται αν μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα ικανοποιεί (ή όχι) μια δοθείσα ιδιότητα του Markov.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{M}$ μια ιδιότητα του Markov. Εξ ορισμού υπάρχει πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $M$ που ικανοποιεί την $\mathcal{M}$ και μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $N$

που δεν εμφυτεύεται σε καμία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα που ικανοποιεί την $\mathcal{M}$. Από το θεώρημα των Novikov-Boone, υπάρχει πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $\Lambda$ με άλυτο το πρόβλημα της λέξης. Το πρόβλημα της λέξης είναι, επίσης, άλυτο στο ελεύθερο γινόμενο $\Lambda * N$ (η οποία είναι πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα), καθώς είναι άλυτο στην $\Lambda$. Έστω $\Lambda * N = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, R(x_1, \dots, x_n) \rangle$ μια πεπερασμένη παράσταση της $\Lambda * N$, έτσι ώστε κάθε $x_i$ είναι διάφορο από το ταυτοτικό στοιχείο. Σκοπός μας είναι να αναγάγουμε το πρόβλημά μας στο πρόβλημα της λέξης της ομάδας $\Lambda * N$. Θεωρούμε το ελεύθερο γινόμενο $G = \Lambda * N * \langle s_0 \rangle$ της $\Lambda * N$ με μια άπειρη κυκλική που παράγεται από ένα στοιχείο $s_0$ και ορίζουμε $s_i = s_0 x_i$, $i = 1, \dots, n$. Τότε η $G$ έχει μια παράσταση

$$G = \langle s_0, s_1, \dots, s_n \,|\, R(s_0^{-1} s_1, \dots, s_0^{-1} s_n) \rangle.$$

Η ομάδα με παράσταση

$$G_1 = \langle s_0, s_1, \dots, s_n, t_0, \dots, t_n \,|\, R(s_0^{-1} s_1, \dots, s_0^{-1} s_n), t_i^{-1} s_i^2 t_i = s_i,\, i = 0, \dots, n \rangle,$$

προκύπτει με διαδοχικές HNN επεκτάσεις, αρχικά με βάση $G$, με σταθερά γράμματα $t_i$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες $\langle s_i \rangle$, $\langle s_i^2 \rangle$ σε κάθε στάδιο. Από το λήμμα του Britton, η υποομάδα $\langle t_0, t_1, \dots, t_n \rangle$ της $G_1$ που παράγεται από τα $t_0, t_1, \dots, t_n$ είναι ελεύθερη με βάση τα στοιχεία αυτά. Ομοίως, η υποομάδα $\langle t_0^2, t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$ είναι ελεύθερη με βάση τα στοιχεία $t_0^2, t_1^2, \dots, t_n^2$. Η απεικόνιση $t_i \mapsto t_i^2$ επεκτείνεται σε ισομορφισμό μεταξύ των παραπάνω ελευθέρων ομάδων και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την αντίστοιχη HNN επέκταση $G_2$ με βάση $G_1$, σταθερό γράμμα $t$ και αυτές ως προσεταιριζόμενες υποομάδες:

$$G_2 = \langle G_1, t \,|\, t^{-1} t_i^2 t = t_i,\, i = 0, \dots, n \rangle.$$

Θεωρούμε, επίσης, την HNN επέκταση $H_1 = \langle \alpha, \beta \,|\, \beta^{-1} \alpha^2 \beta = \alpha \rangle$ με βάση την άπειρη κυκλική $\langle \alpha \rangle$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες $\langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha^2 \rangle$ και την HNN επέκταση

$$H_2 = \langle H_1, \gamma \,|\, \gamma^{-1} \beta^2 \gamma = \beta \rangle.$$

Για μια δοθείσα λέξη $w$ στους γεννήτορες $x_1, \dots, x_n$ της $\Lambda * N$, ορίζουμε την ομάδα $\Gamma_w$ ως την ομάδα πηλίκο του ελευθέρου γινομένου $G_2 * H_2$ των $G_2$, $H_2$ προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από τις σχέσεις $\alpha = t$, $\gamma = w s_0 w^{-1} s_0^{-1}$. Δηλαδή, είναι η ομάδα που δίνεται από την ακόλουθη παράσταση

$$\Gamma_w = \langle H_2, G_2 \,|\, \alpha = t,\, \gamma = w s_0 w^{-1} s_0^{-1} \rangle.$$

Σημειώνουμε πως αν $w \neq 1$, τότε η ομάδα $\Gamma_w$ είναι το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα των $G_2$, $H_2$ και αμαλγαματοποιημένες υποομάδες τις $\langle t, ws_0w^{-1}s_0^{-1}\rangle$, $\langle \alpha, \gamma\rangle$: στην περίπτωση αυτή, καθεμία από τις υποομάδες που ταυτοποιούνται είναι ελεύθερη τάξης 2 με βάση τα δεδομένα στοιχεία που την παράγουν (γιατί;) και έτσι μπορούν να αμαλγαματοποιηθούν. Από τις παραπάνω παραστάσεις των ομάδων που έχουν ορισθεί, προκύπτει ότι $\Gamma_w = \{1\}$, αν $w = 1$ στην $\Lambda * N$. Από την άλλη, αν $w \neq 1$ (στην $\Lambda * N$), τότε η $N$ εμφυτεύεται στην $\Gamma_w$, καθώς έχουμε ακολουθία εμφυτεύσεων

$$N \hookrightarrow G \hookrightarrow G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow \Gamma_w.$$

Έτσι αν $w \neq 1$, τότε, από την επιλογή της $N$, η ομάδα $\Gamma_w$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{M}$. Τελικά, το ελεύθερο γινόμενο $\Delta_w = \Gamma_w * M$ είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα η οποία δεν ικανοποιεί την $\mathcal{M}$, αφού περιέχει αντίτυπο της $N$, αν $w \neq 1$. Αν $w = 1$, τότε $\Delta_w = M$ και η $\Delta_w$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{M}$. Εφόσον το πρόβλημα της λέξης δεν είναι επιλύσιμο στην ομάδα $\Lambda * N$ και η ομάδα $\Delta_w$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{M}$ αν και μόνο αν $w = 1$, έπεται ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαίνεται πότε μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα ικανοποιεί ή όχι την ιδιότητα $\mathcal{M}$. □

**Πόρισμα 2.3.9.** *Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να αποφαίνεται πότε ή όχι μια πεπερασμένη παράσταση αναπαριστά την τετριμμένη ομάδα.*

# Ασκήσεις

2.1 (Καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα) Έστω $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ οικογένεια ομάδων, $H$ ομάδα, $\varphi_\lambda : H \to G_\lambda$ οικογένεια μονομορφισμών και $G = *_H G_\lambda$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Αποδείξτε ότι για κάθε ομάδα $K$ και οικογένεια ομομορφισμών $\theta_\lambda : G_\lambda \to K$ με $\theta_\lambda \circ \varphi_\lambda = \theta_\mu \circ \varphi_\mu$ για κάθε ζεύγος $\lambda, \mu \in \Lambda$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\theta : G \to K$, έτσι ώστε $\theta \circ \pi_\lambda = \theta_\lambda$ για κάθε $\lambda$, όπου $\pi_\lambda$ είναι ο περιορισμός στην $G_\lambda$ του φυσικού επιμορφισμού $\pi : *_\lambda G_\lambda \to G$. Δηλαδή έχουμε το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varphi_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\mu"'] & G_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_\lambda"] & \\
G_\mu \arrow[r, "\pi_\mu"] \arrow[drr, bend right, "\theta_\mu"'] & *_H G_\lambda \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

2.2 Διατυπώστε και αποδείξτε την καθολική ιδιότητα των HNN επεκτάσεων.

2.3 Έστω $\varphi_i : H \to G_i$, $i = 1, 2$ μονομορφισμοί, $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Μια *ανηγμένη μορφή* ενός στοιχείου $g$ της $G_1 *_H G_2$ είναι μια έκφραση $g = \pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$, όπου κάθε $g_i \in G_1 \cup G_2$, διαδοχικά $g_i$ δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα $G_1$ ή $G_2$ και $g_i \notin \varphi_1(H) \cup \varphi_2(H)$ για κάθε $i$, εκτός εάν $n = 1$.
(i) Κάθε στοιχείο της $G$ μπορεί να γραφεί σε ανηγμένη μορφή.
(ii) Αν $g = \pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$ ανηγμένη μορφή με $n \geq 2$, τότε $g \neq 1$.
(iii) Αν $\varphi_i(H)$ γνήσια υποομάδα της $G_i$, $i = 1, 2$, τότε η ομάδα $G$ περιέχει στοιχεία απείρου τάξης.
(iv) Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της $G$ είναι συζυγές με στοιχείο ενός παράγοντα $G_i$. Ιδιαιτέρως, αν οι παράγοντες $G_1$ και $G_2$ δεν περιέχουν στοιχεία πεπερασμένης τάξης, τότε κάθε στοιχείο της $G_1 *_H G_2$ είναι απείρου τάξης.

2.4 Έστω $G_1$, $G_2$ υποομάδες μιας ομάδας $G$ και $H = G_1 \cap G_2$. Υποθέτουμε ότι η $G$ παράγεται από τις $G_1$ και $G_2$. Έστω $\varphi : G_1 *_H G_2 \to G$ ο επιμορφισμός που επάγεται από τις ενθέσεις των $G_1$ και $G_2$ στην $G$. Αποδείξτε ότι ο $\varphi$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν κάθε γινόμενο $g_1 g_2 \cdots g_n$ στην $G$, όπου κάθε παράγοντας $g_k$ ανήκει στο $G_1 - H$ ή στο $G_2 - H$ και διαδοχικοί παράγοντες δεν ανήκουν στο ίδιο σύνολο $G_i - H$, είναι διάφορο του 1.

2.5 Αν το $S$ είναι ένα υποσύνολο με $n$ στοιχεία που παράγει την $F_n$, τότε το $S$ είναι βάση της $F_n$ (δηλ. $F_n$ ελεύθερη επί του $S$).

2.6 Κάθε πεπερασμένη υποομάδα ενός ελευθέρου γινομένου με αμάλγαμα $G_1 *_H G_2$ περιέχεται σε ένα συζυγές του παράγοντα $G_1$ ή του $G_2$.

2.7 Κάθε πεπερασμένη υποομάδα μιας HNN επέκτασης περιέχεται σε συζυγές της βάσης.

2.8 Έστω $G = A * \mathbb{Z}_4$, όπου $A = \mathbb{Z}_2$. Έστω $B$ η υποομάδα της $\mathbb{Z}_4$ που είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει αυτομορφισμός $\varphi$ της $G$ με $\varphi(B) = A$ (ενώ οι $A$ και $B$ είναι ισόμορφες).

2.9 Έστω $A$ και $B$ δύο πεπερασμένες ομάδες και $G = A *_H B$, όπου $H \neq 1$. Αποδείξτε ότι η $G$ είναι (ελευθέρως) μη αναλύσιμη, δηλαδή δεν αναλύεται σε ελεύθερο γινόμενο κατά μη τετριμμένο τρόπο.

2.10 Έστω $\varphi_i : H \to G_i$, $i = 1, 2$ μονομορφισμοί, $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Αποδείξτε ότι $Z(G_1 *_H G_2) = H \cap Z(G_1) \cap Z(G_2)$ (για την ακρίβεια $\pi(H) \cap Z(\pi(G_1)) \cap Z(\pi(G_2))$), όπου με $Z(G)$ συμβολίζουμε το κέντρο μια ομάδος $G$.

2.11 Έστω $G = G_1 *_A G_2$ και $H_1, H_2$ υποομάδες των $G_1, G_2$, αντίστοιχα, με $H_1 \cap A = H_2 \cap A = 1$. Να δειχθεί ότι η υποομάδα της $G$ που παράγεται από τις (εικόνες των) $H_1$ και $H_2$ είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλαδή, $\langle H_1, H_2 \rangle \cong H_1 * H_2$.

2.12 Έστω $G = A *_H B$. Αν οι $G$ και $H$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες, τότε και οι παράγοντες $A$, $B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες.

2.13 Έστω $G = A*_H$. Αν οι $G$ και $H$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες, τότε και η βάση $A$ της HNN επέκτασης είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα.

2.14 Αποδείξτε ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμες το πλήθος μη ισόμορφες πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες. [Υπόδειξη: Εφόσον υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι, υπάρχουν υπεραριθμήσιμες μη ισόμορφες ομάδες της μορφής $\bigoplus_{p \in \Pi} \mathbb{Z}_p$, όπου $\Pi$ άπειρο σύνολο που αποτελείται απο πρώτους. Συνδυάστε την Άσκηση 7 και το Θεώρημα 2.3.1.]

2.15 Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα με άλυτο το πρόβλημα της λέξης, όπου $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και κανένας γεννήτορας $\alpha_i$ δεν ισούται με το τετριμμένο στοιχείο. Για κάθε λέξη $w$ στο αλφάβητο $X^{\pm 1}$, θεωρούμε την ομάδα με παράσταση

$$G_w = \langle X, s, t \mid R, t^{-1}(s^i \alpha_i s^{-i})t = s^i w^{-1} s^{-1},\, i = 1, \ldots, n \rangle.$$

(i) Αν $w = 1$ στην $G$, τότε η $G_w$ είναι ελεύθερη με βάση $\{s, t\}$.

(ii) Αν $w \neq 1$ στην $G$, τότε η $G_w$ δεν είναι ελεύθερη.

(iii) Δεν υπάρχει αλγόριθμος μέσω του οποίου να αποφαινόμαστε ποιες από τις ομάδες $G_w$ είναι ισόμορφες μεταξύ τους.

# Βιβλιογραφία

[1] D. E. Cohen. Combinatorial Group Theory: A Topological Approach, London Mathematical Society Student Texts 14, Cambridge, 1989.

[2] D. E. Cohen. Computability and Logic, Chichester: Ellis Horwood, 1987.

[3] Roger C. Lyndon, Paul E. Schupp. Combinatorial Group Theory, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar. Combinatorial Group Theory, 2nd ed., Dover, 2004.

[5] C. F. Miller III. On group-theoretic decision problems and their classification, Annals of Mathematics Studies, vol. 68, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[6] J. J. Rotman. An introduction to the theory of groups, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] J. Stillwell. Classical topology and combinatorial group theory, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 72, Springer-Verlag, New York, 1993.

# Κεφάλαιο 3

# Δράσεις Ομάδων σε Δέντρα

## Περιεχόμενα



Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να θέσουμε κάτω από ένα κοινό πλαίσιο τα ελεύθερα γινόμενα, τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα και τις HNN επεκτάσεις, γενικεύοντας τις αντίστοιχες έννοιες, και να εισάγουμε γεωμετρικές μεθόδους για τη μελέτη τους.

## 3.1 Γραφήματα

**Ορισμός 3.1.1.** Ένα **γράφημα** $X$ αποτελείται από:

- ένα μη κενό σύνολο $V(X)$, το σύνολο **κορυφών** του $X$,
- ένα σύνολο $E(X)$, το σύνολο **ακμών** του $X$, ώστε τα $V(X)$ και $E(X)$ είναι ξένα,
- και τρεις απεικονίσεις $\alpha, \tau : E(X) \to V(X)$ και $^{-} : E(X) \to E(X)$, οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\overline{e} \neq e, \quad \overline{\overline{e}} = e \quad \text{και} \quad \tau(e) = \alpha(\overline{e}) \text{ για κάθε ακμή } e \in E(X).$$

Οι κορυφές $\alpha(e)$ και $\tau(e)$ είναι τα **άκρα** της ακμής $e$, που αναφέρονται ως **αρχή** και **τέλος** της ακμής $e$, αντίστοιχα. Μια **μη προσανατολίσμενη** ακμή ή **γεωμετρική** ακμή του $X$ είναι ένα ζεύγος $\{e, \overline{e}\}$. Η ακμή $\overline{e}$ λέγεται **αντίστροφη** της $e$ και πολλές φορές θα συμβολίζεται, επίσης, με $e^{-1}$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες έπεται ότι $\alpha(e) = \alpha(\overline{\overline{e}}) = \tau(\overline{e})$. Ένας **προσανατολισμός** ενός γραφήματος $X$ είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{O}$ του $E(X)$ το οποίο περιέχει ακριβώς μια ακμή από κάθε ζεύγος $\{e, \overline{e}\}$. Το γράφημα $X$ λέγεται **προσανατολισμένο**, αν έχει επιλεγεί ένας προσανατολισμός του. Οι ακμές του προσανατολισμού ενός προσανατολισμένου γραφήματος $X$ αναφέρονται ως **θετικές**.

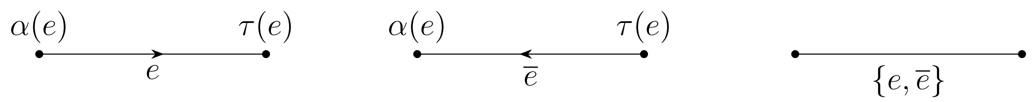
**Γεωμετρική αναπαράσταση γραφήματος.** Έστω $X$ ένα γράφημα. Θεωρούμε την ξένη ένωση

$$\Gamma = V(X) \bigsqcup \big(E(X) \times [0,1]\big) = \bigsqcup_{v \in V(X)} \{v\} \bigsqcup_{e \in E(X)} \big(\{e\} \times [0,1]\big)$$

εφοδιασμένη με τη διακριτή τοπολογία και ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ που περιγράφεται ως εξής:

$$(e,t) \equiv (\overline{e}, 1-t),\ (e,0) \equiv \alpha(e),\ (e,1) \equiv \tau(e), \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0,1],\ e \in E(X).$$

Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο $\Gamma/\equiv$ είναι η γεωμετρική αναπαράσταση του γραφήματος και είναι ένα σύμπλεγμα κελιών διάστασης μικρότερης ή ίσης του 1. Έτσι σκεφτόμαστε τις κορυφές ως μικρές κουκίδες και τις ακμές ως τμήματα γραμμών που ενώνουν τα άκρα τους.




Ένα γράφημα λέγεται **θηλειά**, αν αποτελείται από μια μόνο κορυφή και μια μόνο γεωμετρική ακμή $\{e, \overline{e}\}$ και **τμήμα**, αν αποτελείται από δύο κορυφές και μια γεωμετρική ακμή $\{e, \overline{e}\}$.

Τμήμα Θηλειά

Ένα **υπογράφημα** $Y$ ενός γραφήματος $X$ αποτελείται από ένα υποσύνολο $V(Y)$ του συνόλου κορυφών $V(X)$ του $X$ και από ένα υποσύνολο $E(Y)$ του συνόλου ακμών $E(X)$ του $X$, έτσι ώστε το $E(Y)$ να είναι κλειστό ως προς τις τρεις απεικονίσεις $\alpha, \tau, \bar{}$, δηλαδή το $V(Y)$ περιέχει τα άκρα των ακμών του $E(Y)$ και το $E(Y)$ για κάθε ακμή που περιέχει, περιέχει και την αντίστροφή της. Με άλλα λόγια, το $Y$ αποτελεί γράφημα με τις ίδιες απεικονίσεις.

**Ορισμός 3.1.2.** Ένας **μορφισμός γραφημάτων** (ή **απεικόνιση γραφημάτων**) από ένα γράφημα $X$ σε ένα γράφημα $Y$, είναι μια απεικόνιση $\varphi : V(X) \cup E(X) \to V(Y) \cup E(Y)$ η οποία απεικονίζει κορυφές σε κορυφές και ακμές σε ακμές, έτσι ώστε

$$\varphi(\alpha(e)) = \alpha(\varphi(e)),\ \varphi(\tau(e)) = \tau(\varphi(e)) \text{ και } \varphi(\overline{e}) = \overline{\varphi(e)},\ \text{για κάθε } e \in E(X).$$

Μια απεικόνιση γραφημάτων λέγεται **ισομορφισμός**, αν είναι $1-1$ και επί και **αυτομορφισμός**, αν είναι ισομορφισμός από ένα γράφημα στον εαυτό του.

## Τα γραφήματα ως μετρικοί χώροι

**Ορισμός 3.1.3.** Ένα **μονοπάτι ακμών** (ή απλά μονοπάτι) μήκους $n > 0$ ενός γραφήματος $X$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$ ακμών του $X$, έτσι ώστε $\alpha(e_{i+1}) = \tau(e_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$. Συμβολίζουμε με $|\gamma|$ το μήκος του μονοπατιού $\gamma$. Κάθε κορυφή του γραφήματος θεωρείται ως μονοπάτι μηδενικού μήκους. Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\gamma = e_1 \dots e_n$. Οι κορυφές $\alpha(e_1)$, $\tau(e_n)$ λέγονται άκρα του μονοπατιού $\gamma$ (αρχή και τέλος) και συμβολίζονται με $\alpha(\gamma)$, $\tau(\gamma)$, αντίστοιχα. Λέμε, επίσης, ότι το μονοπάτι $\gamma$ **συνδέει** (ή **ενώνει**) τις κορυφές $\alpha(\gamma)$ και $\tau(\gamma)$.

Ένα μονοπάτι $\gamma$ λέγεται **κλειστό** αν $\alpha(\gamma) = \tau(\gamma)$. Ένα μονοπάτι $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$ του $X$, θετικού μήκους, λέγεται **ανηγμένο**, αν δεν περιέχει **παλινδρομήσεις**, δηλαδή, $e_i \neq \overline{e}_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$. Το μονοπάτι $\gamma$ λέγεται **κύκλωμα** αν είναι κλειστό, ανηγμένο και $\alpha(e_i) \neq \alpha(e_j)$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών δεικτών $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

**Ορισμός 3.1.4.** Ένα γράφημα $X$ είναι **συνεκτικό**, αν για κάθε ζεύγος κορυφών του $X$ υπάρχει μονοπάτι που τις ενώνει.

Μια **συνεκτική συνιστώσα** ενός γραφήματος είναι ένα μεγιστικό (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) συνεκτικό υπογράφημα.

**Ορισμός 3.1.5.** Ένα συνεκτικό γράφημα λέγεται **δέντρο**, αν δεν περιέχει κλειστά ανηγμένα μονοπάτια θετικού μήκους, ισοδύναμα, αν δεν περιέχει κυκλώματα.

Είναι άμεσο από τους ορισμούς, ότι ένα γράφημα $X$ είναι δέντρο αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος κορυφών του $X$ υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι που τις ενώνει.

Έστω $X$ ένα συνεκτικό γράφημα. Ορίζουμε απεικόνιση $d : V(X) \times V(X) \to [0, \infty)$ ως εξής:

$$d(v, u) = \min\big\{|\gamma| : \gamma \text{ μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές } v, u\big\}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι το ζεύγος $(X, d)$ είναι μετρικός χώρος. Όταν σκεφτόμαστε το γράφημα μέσω της γεωμετρικής του αναπαράστασης, μπορούμε την απόσταση μεταξύ των κορυφών να την επεκτείνουμε γραμμικά και στα σημεία εσωτερικά των ακμών, έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει μήκος $1$.

Μια **γεωδαισιακή** από την κορυφή $v$ στην κορυφή $u$ είναι ένα μονοπάτι $p$ από την $v$ στην $u$ ελαχίστου μήκους, δηλαδή, $|p| = d(v, u)$. Είναι άμεσο ότι κάθε γεωδαισιακή είναι ανηγμένο μονοπάτι (ισχύει το αντίστροφο;).

## Δράσεις ομάδων σε γραφήματα

**Ορισμός 3.1.6.** Λέμε ότι μια ομάδα $G$ δρα (με ισομετρίες ή αυτομορφισμούς) επί ενός γραφήματος $X$, αν η $G$ δρα επί των συνόλων $V(X)$ και $E(X)$ έτσι ώστε:

$$\overline{ge} = g\bar{e},\ \alpha(ge) = g\alpha(e) \text{ και } \tau(ge) = g\tau(e), \text{ για κάθε } e \in E(X) \text{ και κάθε } g \in G.$$

Λέμε, επίσης, ότι η δράση είναι χωρίς **αντιστροφές**, αν $ge \neq \bar{e}$ για κάθε ακμή $e \in E(X)$ και κάθε $g \in G$.

**Παρατήρηση 3.1.7.** Αν μια ομάδα $G$ δρα επί ενός γραφήματος $X$, τότε οι ακμές $e$ και $\bar{e}$ έχουν την ίδια σταθεροποιούσα. Πράγματι, από τη σχέση $\overline{ge} = g\bar{e}$, προκύπτει ότι $ge = e$ αν και μόνο αν $g\bar{e} = \bar{e}$. Επίσης, από τις δύο άλλες σχέσεις έπεται ότι κάθε στοιχείο της ομάδας που σταθεροποιεί μια ακμή, σταθεροποιεί και τα άκρα της.

Συνήθως περιοριζόμαστε σε δράσεις χωρίς αντιστροφές. Ο λόγος είναι ο εξής. Ας υποθέσουμε ότι η $G$ δρα επί ενός γραφήματος $X$ με αντιστροφές. Θεωρούμε ένα νέο γράφημα $X_1$ (γνωστό ως **βαρυκεντρική υποδιαίρεση** του $X$) που προκύπτει από το $X$ ως ακολούθως: για κάθε ακμή $e$ του $X$ προσθέτουμε μια νέα κορυφή $w$ και αντικαθιστούμε την $e$ με δύο ακμές $e_1$ και $e_2$ έτσι ώστε $\alpha(e_1) = \alpha(e)$, $\tau(e_2) = \tau(e)$ και $\tau(e_1) = \alpha(e_2) = w$. Θέτουμε επίσης $\overline{e}_1 = (\overline{e})_2$ και $\overline{e}_2 = (\overline{e})_1$. Ορίζουμε δράση της $G$ στο $X_1$ με $ge_1 = (ge)_1$ και $ge_2 = (ge)_2$.


Αν τώρα θεωρήσουμε μια αντιστροφή, δηλαδή, μια ακμή $e$ για την οποία $ge = \overline{e}$, τότε $ge_1 = (\overline{e})_1 = \overline{e}_2 \neq \overline{e}_1$. Συνεπώς, υποδιαιρώντας οι αντιστροφές «εξαφανίζονται» και το στοιχείο $g$ σταθεροποιεί πλέον τη νέα κορυφή.

Στην περίπτωση που η $G$ δρα στο γράφημα $X$ χωρίς αντιστροφές, ορίζεται το **γράφημα πηλίκο** $X/G$ ως εξής:

- Οι κορυφές του $X/G$ είναι οι τροχιές κορυφών του $X$.
- Οι ακμές του $X/G$ είναι οι τροχιές ακμών του $X$.
- Οι απεικονίσεις δίνονται από τους τύπους $\alpha[e] = [\alpha(e)]$, $\tau[e] = [\tau(e)]$ και $\overline{[e]} = [\overline{e}]$, όπου με $[*]$ συμβολίζουμε την τροχιά του στοιχείου $*$.

Θέλουμε η δράση να είναι χωρίς αντιστροφές για να μην υπάρχει ακμή που να ισούται με την αντίστροφή της. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση πηλίκο $\pi : X \to X/G$ είναι επιμορφισμός γραφημάτων.

**Πρόταση 3.1.8.** *Έστω $X$ ένα συνεκτικό γράφημα επί του οποίου μια ομάδα $G$ δρα χωρίς αντιστροφές. Τότε για κάθε υποδέντρο $T'$ του γραφήματος πηλίκο $X/G$ υπάρχει δέντρο $T$ του $X$, έτσι ώστε ο περιορισμός στο $T$ της φυσικής προβολής $\pi : X \to X/G$ να είναι μονομορφισμός με εικόνα $T'$. Δηλαδή, η $\pi|_T : T \to T'$ είναι ισομορφισμός γραφημάτων.*

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ το σύνολο που αποτελείται από τα υποδέντρα του $X$ τα οποία απεικονίζονται μονομορφικά (εμφυτεύονται) εντός του $T'$ μέσω της $\pi$. Το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό, αφού κάθε κορυφή της αντίστροφης εικόνας $\pi^{-1}(T')$ ανήκει στο $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{A}$ αποτελεί ένα διατεταγμένο σύνολο εφοδιασμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι και εύκολα προκύπτει ότι κάθε αλυσίδα έχει μέγιστο στοιχείο (την ένωση των υποδέντρων της αλυσίδας). Από το λήμμα του Zorn, το $\mathcal{A}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω $T_0$. Αν υποθέσουμε ότι η εικόνα $T_0' = \pi(T_0)$ περιέχεται γνήσια στο $T'$, τότε θα υπάρχει ακμή $e'$ του $T'$ που δεν ανήκει στο $T_0'$ τέτοια, ώστε $\alpha(e') \in T_0'$. Εφόσον το $T'$ είναι δέντρο, έπεται ότι $\tau(e') \notin T_0'$

(διαφορετικά θα είχαμε κύκλωμα στο $T'$). Θεωρούμε ακμή $e$ του $X$ με $\pi(e) = e'$. Αφού $\alpha(e') \in T_0' = \pi(T_0)$, η κορυφή $\alpha(e)$ είναι στην ίδια τροχιά με κορυφή του $T_0$. Δηλαδή, υπάρχει $g \in G$ τέτοιο, ώστε $g\alpha(e) \in T_0$. Έστω $T_1 = T_0 \cup \{ge, g\bar{e}, \tau(ge)\}$ το υπογράφημα του $X$ που προκύπτει επισυνάπτοντας στο $T_0$ την ακμή $ge$ (την αντίστροφη και το τέλος). Τότε το $T_1$ είναι δέντρο που περιέχει γνήσια το $T_0$. Επιπλέον, η $\pi$ απεικονίζει το $T_1$ μονομορφικά εντός του $T'$ κάτι που αντιφάσκει στην επιλογή του $T_0$. Άρα $\pi(T_0) = T'$ και το ζητούμενο υποδέντρο είναι το $T_0$. □

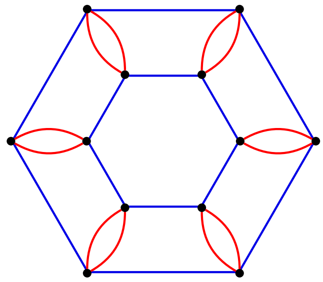
Η προηγούμενη απόδειξη δίνει για $G = \{1\}$ το ακόλουθο:

**Πόρισμα 3.1.9.** *Κάθε συνεκτικό γράφημα $X$ περιέχει μεγιστικό δέντρο $T$. Επιπλέον $V(X) = V(T)$.*

**Παρατήρηση 3.1.10.** Υποθέτουμε ότι μια ομάδα $G$ δρα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός γραφήματος $X$ και έστω $\pi : X \to X/G$ η φυσική προβολή. Μέρος του επιχειρήματος της προηγούμενης απόδειξης, δείχνει ότι για κάθε μονοπάτι $p$ του $X/G$ και κάθε κορυφή $v \in V(X)$ με $\pi(v) = \alpha(p)$ υπάρχει (όχι απαραιτήτως μοναδικό) μονοπάτι $\widetilde{p}$ του $X$ τέτοιο, ώστε $\pi(\widetilde{p}) = p$.

**Ορισμός 3.1.11.** Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί ενός συνεκτικού γραφήματος $X$ και $T'$ ένα μεγιστικό δέντρο του $X/G$. Ένα δέντρο $T$ όπως στο συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης, δηλαδή $\pi : T \to T'$ ισομορφισμός, λέγεται **δέντρο αντιπροσώπων της δράσης**. Ένα **θεμελιώδες υπογράφημα** της δράσης **με δέντρο** $T$ είναι ένα υπογράφημα $Y$ του $X$ που περιέχει το $T$, κάθε ακμή του οποίου έχει άκρο στο $T$ και περιέχει ακριβώς μια ακμή από κάθε τροχιά ακμών (ιδιαιτέρως $GY = X$).

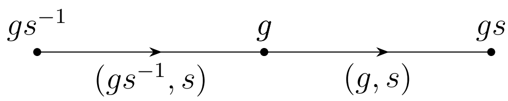
Παρατηρούμε ότι ένα δέντρο αντιπροσώπων της δράσης περιέχει ακριβώς μια κορυφή από κάθε τροχιά κορυφών και το πολύ μια ακμή από κάθε τροχιά ακμών, ενώ ένα θεμελιώδες υπογράφημα περιέχει ακριβώς μια ακμή από κάθε τροχιά ακμών. Εφόσον κάθε κορυφή του $X$ ανήκει στην ίδια τροχιά με κορυφή του $T$, για κάθε ακμή $e'$ εκτός του μεγιστικού δέντρου $T'$ υπάρχει ακμή $e$ του $X$ με άκρο στο $T$, έτσι ώστε $\pi(e) = e'$. Επισυνάπτοντας στο $T$ αυτές τις ακμές $e$ (με τα άκρα τους) όπως πριν, μια μόνο για κάθε $e' \notin T'$, προκύπτει ένα θεμελιώδες υπογράφημα που περιέχει το $T$.



**Σχήμα 3.1:** *Το γράφημα Cayley της διεδρικής* $D_6 = \langle s, r \mid s^2 = r^6 = srsr = 1, \rangle$ *ως προς τους γεννήτορες* $r$, $s$.

## Γραφήματα Cayley

Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $G$. Το **γράφημα Cayley** $\Gamma(G, S)$ της $G$ ως προς $S$, ορίζεται ως εξής: οι κορυφές του $\Gamma(G, S)$ είναι τα στοιχεία της $G$. Για κάθε κορυφή $g \in G$ και κάθε γεννήτορα $s \in S$ υπάρχει μια ακμή $(g, s)$ από το $g$ στο $gs$. Επίσης, για κάθε τέτοια ακμή θεωρούμε και την αντίστροφή της.



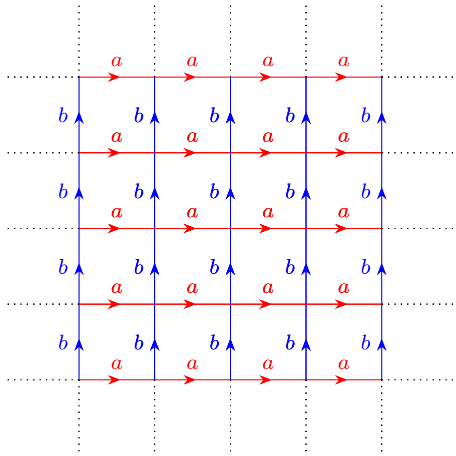

Δηλαδή, ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου με γεννήτορα αντιστοιχεί σε μια «εξερχόμενη» ακμή, ενώ ο πολλαπλασιασμός με το αντίστροφο ενός γεννήτορα αντιστοιχεί σε μια «εισερχόμενη» ακμή. Παρατηρούμε ότι δύο κορυφές $g, h$ συνδέονται με μια ακμή αν και μόνο αν $g^{-1}h \in S^{\pm 1}$. Είναι εύκολο (και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη) να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν τα εξής:

1. Το γράφημα $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό, αφού το $S$ παράγει την $G$.

2. Το $\Gamma(G, S)$ περιέχει κυκλώματα μήκους 1 (θηλειές) ή 2 αν και μόνο αν $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$.

3. Κάθε κορυφή αποτελεί άκρο ακριβώς $2n$ το πλήθος ακμών ($n$ «εισέρχονται» και $n$ «εξέρχονται»).

Όπως κάθε συνεκτικό γράφημα, έτσι και το $\Gamma(G, S)$ έχει τη δομή μετρικού χώρου, όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο. Στην περίπτωση αυτή, η απόσταση δύο κορυ-



**Σχήμα 3.2:** *Το γράφημα Cayley της $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ως προς $a, b$.*

φών είναι το ελάχιστο μήκος των λέξεων στο $S^{\pm 1}$ που αναπαριστούν το στοιχείο $g^{-1}h$:

$$d_S(g, h) = \min\{\nu : g^{-1}h = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_\nu}^{\varepsilon_\nu},\ s_{i_j} \in S,\ \varepsilon_j \in \{\pm 1\},\ j = 1, \ldots, \nu\},$$

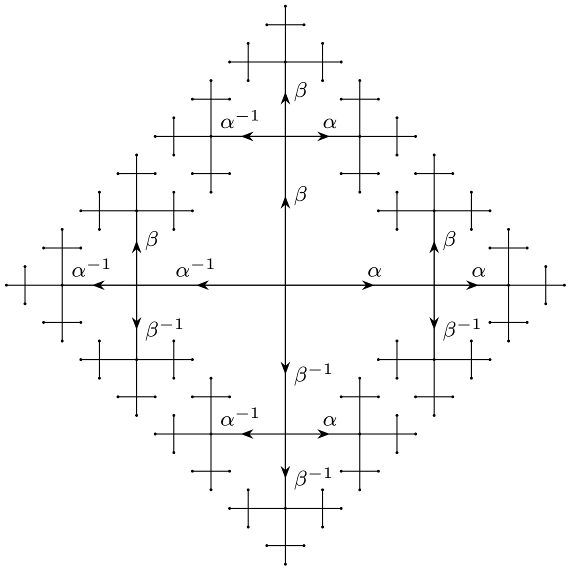
όπου το μήκος της κενής λέξης ορίζεται να είναι μηδέν.

Η δράση της $G$ στις κορυφές του γραφήματος $\Gamma(G, S)$ που δίνεται με πολλαπλασιασμό από αριστερά, επεκτείνεται σε δράση $x * (g, s) \mapsto (xg, s)$ της $G$ στο $\Gamma(G, S)$ με ισομετρίες. Επιπλέον, η δράση είναι **ελεύθερη** (δηλαδή, κάθε σταθεροποιούσα είναι τετριμμένη), μεταβατική στις κορυφές (ανήκουν όλες σε μια τροχιά) και το γράφημα πηλίκο $\Gamma(G, S)/G$ αποτελείται από μια μόνο κορυφή και $n$ το πλήθος γεωμετρικές ακμές, μία για κάθε γεννήτορα.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι τα κυκλώματα στο $\Gamma(G, S)$ «ανιχνεύουν» σχέσεις στην ομάδα $G$. Επίσης, το γράφημα $\Gamma(G, S)$ μπορεί να ορισθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και στην περίπτωση που το σύνολο γεννητόρων είναι άπειρο. Συνεπώς είναι αναμενόμενη η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 3.1.12.** *Έστω $G$ μια ομάδα και $S$ ένα σύνολο γεννητόρων της $G$. Τότε το γράφημα $\Gamma(G, S)$ είναι δέντρο αν και μόνο αν η $G$ είναι ελεύθερη με βάση το $S$.*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η $G$ είναι ελεύθερη με βάση το $S$. Τότε το $\Gamma(G, S)$ δεν περιέχει κυκλώματα μήκους $1$ ή $2$, αφού $S \cap S^{-1} = \emptyset$. Συνεπώς, αν το $\Gamma(G, S)$ δεν είναι δέντρο, θα περιέχει κλειστό ανηγμένο μονοπάτι $p = (e_1, \ldots, e_n)$ μήκους $n \geq 3$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $G$ δρα μεταβατικά επί των κορυφών του $\Gamma(G, S)$,




**Σχήμα 3.3:** *Το γράφημα Cayley της ελεύθερης $F(\alpha, \beta)$ ως προς τη βάση $\{\alpha, \beta\}$.*

μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μονοπάτι $p$ έχει αρχή και τέλος το $1$. Εφόσον διαδοχικές κορυφές διαφέρουν κατά ένα στοιχείο του $S^{\pm 1}$, για τις κορυφές $g_i = \tau(e_i)$ έχουμε:

$$g_1 = s_1^{\varepsilon_1},\ g_1^{-1}g_2 = s_2^{\varepsilon_2},\ g_i^{-1}g_{i+1} = s_i^{\varepsilon_i},\ \text{όπου } s_i \in S,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ i = 1, \ldots, n$$

και έτσι

$$1 = g_n = g_{n-1}s_n^{\varepsilon_n} = g_{n-2}s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}s_n^{\varepsilon_n} = \cdots = s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_n^{\varepsilon_n} \quad (\Lambda).$$

Αφού το μονοπάτι είναι ανηγμένο και το γράφημα δεν περιέχει κυκλώματα μήκους $2$, έπεται ότι $s_i^{\varepsilon_i}s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq 1$, για κάθε $i$, που σημαίνει ότι η λέξη $(\Lambda)$ είναι ανηγμένη και αναπαριστά το τετριμμένο στοιχείο. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας ότι $G = F(S)$ και άρα το γράφημα $\Gamma(G, S)$ είναι δέντρο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $\Gamma(G, S)$ είναι δέντρο. Αν θεωρήσουμε μια ανηγμένη λέξη θετικού μήκους στο $S^{\pm 1}$ ίση με $1$, τότε, χρησιμοποιώντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να κατασκευάσουμε κλειστό ανηγμένο μονοπάτι θετικού μήκους στο $\Gamma(G, S)$, άτοπο. $\square$

Στην ουσία, η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης φανερώνει μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ ανηγμένων λέξεων και ανηγμένων μονοπατιών.

## 3.2 Δέντρα, Αμαλγάματα και HNN Επεκτάσεις

Πριν αναφερθούμε στη θεωρία των Bass-Serre, μελετάμε δύο ειδικές περιπτώσεις μέσω των οποίων μπορούμε να περιγράψουμε κάθε ομάδα που δρα σε ένα δέντρο. Για το υπόλοιπο θα θεωρούμε ότι οι δράσεις είναι χωρίς αντιστροφές, εκτός εάν ρητά αναφέρεται το αντίθετο.

**Θεώρημα 3.2.1.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα επί ενός γραφήματος $X$ με δύο τροχιές κορυφών και μια τροχιά γεωμετρικών ακμών, δηλαδή η γεωμετρική αναπαράσταση του γραφήματος πηλίκο είναι ένα τμήμα:* $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$
*Έστω $e$ μια ακμή του $X$. Θεωρούμε τις σταθεροποιούσες $G_u$, $G_v$ και $G_e$ των $u = \alpha(e)$, $v = \tau(e)$ και $e$, αντίστοιχα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το $X$ είναι δέντρο.*

2. *Ο ομομορφισμός $\varphi : G_u *_{G_e} G_v \to G$ που επάγεται από τις ενθέσεις $G_u \hookrightarrow G$ και $G_v \hookrightarrow G$ είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Αρχίζουμε σημειώνοντας ότι δύο διαδοχικές ακμές $e_1$ και $e_2$ του $X$ με $e_1 \neq \overline{e}_2$, δεν μπορεί να έχουν τη μορφή $e_1 = g_1 e$ και $e_2 = g_2 e$ (ούτε τη μορφή $e_1 = g_1\overline{e}$, $e_2 = g_2\overline{e}$), γιατί σε αυτήν την περίπτωση δεν θα είχαμε δύο τροχιές κορυφών αλλά μία. Άρα, αφού υπάρχει μόνο μια τροχιά γεωμετρικών ακμών, για το ζεύγος των διαδοχικών ακμών θα ισχύει $e_1 = g_1 e$ και $e_2 = g_2\overline{e}$ ή $e_1 = g_1\overline{e}$ και $e_2 = g_2 e$, για κάποια $g_1, g_2 \in G$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε: $g_1\tau(e) = \tau(g_1 e) = \alpha(g_2\overline{e}) = g_2\alpha(\overline{e}) = g_2\tau(e)$ και άρα $g_1^{-1}g_2 \in G_v$ ενώ στη δεύτερη $g_1^{-1}g_2 \in G_u$. Σε κάθε περίπτωση, $g_1^{-1}g_2 \notin G_e = G_{\overline{e}}$, καθώς $e_1 \neq \overline{e}_2$.

Εφόσον το γράφημα πηλίκο είναι τμήμα (όχι θηλειά), το $X$ δεν περιέχει θηλειές. Άρα το $X$ περιέχει κυκλώματα αν και μόνο αν περιέχει κύκλωμα $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$ μήκους $n \geq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μονοπάτι $\gamma$ έχει τη μορφή $\gamma = (e, g_1\overline{e}, g_2 e, \dots, g_n\overline{e})$, $g_i \in G$, δρώντας αν χρειαστεί στο μονοπάτι με κατάλληλο στοιχείο της ομάδας και θεωρώντας μια κυκλική μετάθεση των ακμών. Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι $g_i^{-1}g_{i+1} \in G_v - G_e$, αν $i$ άρτιος και $g_i^{-1}g_{i+1} \in G_u - G_e$, αν $i$ περιττός. Αν θέσουμε $x_i = g_i^{-1}g_{i+1}$, τότε

$$g_n = g_{n-1}x_n = \cdots = x_1 \cdots x_n,$$

όπου $x_1, x_3, \ldots \in G_u - G_e$ και $x_2, x_4, \ldots \in G_v - G_e$. Επιπλέον, $x_{n+1} = g_n^{-1} \in G_u - G_e$, αφού οι ακμές $g_n\overline{e}$, $e$ είναι διαδοχικές και η μια δεν είναι η αντίστροφη της άλλης (το μονοπάτι $\gamma$ είναι κύκλωμα).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $X$ περιέχει κύκλωμα αν και μόνο αν μπορούμε να βρούμε στοιχεία $x_1, x_3, \ldots, x_n \in G_v - G_e$ και $x_2, x_4, \ldots, x_{n+1} \in G_u - G_e$ με $x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n+1} = 1$. Αυτό όμως συμβαίνει, λόγω της μοναδικότητας των κανονικών μορφών σε ελεύθερα γινόμενα, αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $\varphi : G_u *_{G_e} G_v \to G$ δεν είναι $1-1$ (βλέπε Άσκηση 2.4).

Ο ομομορφισμός $\varphi$ είναι επί αν και μόνο αν οι υποομάδες $G_u, G_v$ παράγουν την $G$. Η απόδειξη του θεωρήματος θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι το δεύτερο είναι ισοδύναμο με τη συνεκτικότητα του $X$. Έστω $H = \langle G_u, G_v \rangle$ η υποομάδα της $G$ που παράγεται από τις υποομάδες $G_u$, $G_v$ και $T = \{e, \overline{e}, u, v\}$. Εφόσον το $T$ είναι σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης (δηλαδή περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε τροχιά), τα υπογραφήματα $HT$ και $(G-H)T$ είναι ξένα και $X = HT \sqcup (G-H)T$. Έστω $X'$ η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το $T$ και $G' = \{g \in G : gX' = X'\}$ η υποομάδα της $G$ που αφήνει το $X'$ αναλλοίωτο. Αν $x \in G_u \cup G_v$, τότε το $x$ σταθεροποιεί ένα άκρο της $e$, άρα οι ακμές $e, xe$ έχουν κοινή κορυφή και έτσι ανήκουν στην ίδια συνιστώσα. Αυτό σημαίνει ότι $xX' \cap X' \neq \emptyset$. Όμως κάθε στοιχείο της $G$, δρώντας στο $X$, μεταθέτει τις συνεκτικές συνιστώσες του $X$. Έπεται ότι $x \in G'$ και άρα $H \subseteq G'$. Αφού το συνεκτικό $X'$ έχει μη τετριμμένη τομή με το υπογράφημα $HT$, από την παραπάνω ξένη ένωση προκύπτει ότι $X' \subseteq HT$. Άρα $G' \cap (G-H) = \emptyset$, καθώς $G'T \subseteq X'$, και έτσι $G' \subseteq H$. Τελικά, $G' = H$ που σημαίνει ότι το $X$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν $G = H$. □

Ισχύει και το αντίστροφο, υπό την έννοια ότι κάθε ελεύθερο γινόμενο (δύο παραγόντων) με αμάλγαμα προκύπτει όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Υπενθυμίζουμε ότι οι παράγοντες και το αμάλγαμα εμφυτεύονται στο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και συνεπώς τις θεωρούμε ως υποομάδες.

**Θεώρημα 3.2.2.** *Έστω $G = G_1 *_A G_2$. Τότε υπάρχει δέντρο $X$ επί του οποίου η $G$ δρα (χωρίς αντιστροφές) με δύο τροχιές κορυφών και μια τροχιά γεωμετρικών ακμών (ισοδύναμα το γράφημα πηλίκο είναι ένα τμήμα), έτσι ώστε οι σταθεροποιούσες των κορυφών είναι τα συζυγή των παραγόντων $G_1$, $G_2$ και οι σταθεροποιούσες ακμών τα συζυγή της $A$.*

*Απόδειξη.* Για μια υποομάδα $H$ της $G$, συμβολίζουμε με $G/H$ σύνολο των αριστερών συμπλόκων της $H$ στην $G$. Ορίζουμε γράφημα $X$ με σύνολο κορυφών την ξένη ένωση

$G/G_1 \sqcup G/G_2$, σύνολο θετικών ακμών το $G/A$ (δηλαδή $E(X) = G/A \sqcup \overline{G/A}$) και απεικονίσεις $\alpha(gA) = gG_1$, $\tau(gH) = gG_2$. Η ομάδα $G$ δρα στο $X$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά. Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή $gG_i$ ανήκει στην ίδια τροχιά με την $G_i$, $i = 1, 2$, ενώ οι $G_1$ και $G_2$ δεν ανήκουν στην ίδια τροχιά. Επίσης, έχουμε μόνο μια τροχιά γεωμετρικών ακμών, αυτή της $A$. Η σταθεροποιούσα της κορυφής $gG_i$ είναι $gG_ig^{-1}$ και της ακμής $gA$ είναι $gAg^{-1}$. Η συνεκτικότητα του $X$ έπεται από το γεγονός ότι οι παράγοντες παράγουν το ελεύθερο γινόμενο, ενώ η μοναδικότητα των κανονικών μορφών συνεπάγεται ότι το $X$ είναι δέντρο, ακριβώς όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. □

Παρατηρούμε, στις προηγούμενες απόδείξεις, ότι η μοναδικότητα των κανονικών μορφών αντιστοιχεί στη μοναδικότητα ανηγμένου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών ενός δέντρου. Άρα είναι λογικό να αναμένει κανείς ότι ισχύουν ανάλογα θεωρήματα και στην περίπτωση των HNN επεκτάσεων. Στη συνέχεια διατυπώνονται τα θεωρήματα αυτά, δίνοντας απόδειξη για το πρώτο προκειμένου να γίνουν καλύτερα αντιληπτές οι ομοιότητες και πώς ακριβώς υπεισέρχεται η μοναδικότητα των κανονικών μορφών των HNN επεκτάσεων.

**Θεώρημα 3.2.3.** *Έστω $\Gamma = \langle G, t \,|\, , t^{-1}at = \varphi(a),\ a \in A\rangle$ μια HNN επέκταση με βάση $G$ και προσεταιριζόμενες υποομάδες $A, \varphi(A)$. Τότε υπάρχει ένα δέντρο $X$ επί του οποίου η $\Gamma$ δρα (χωρίς αντιστροφές) με μια τροχιά κορυφών και μια τροχιά γεωμετρικών ακμών. Δηλαδή, το γράφημα πηλίκο$X/G$ είναι θηλειά. Επιπλέον, οι σταθεροποιούσες των κορυφών είναι τα συζυγή της βάσης $gGg^{-1}$ και οι σταθεροποιούσες ακμών τα συζυγή της $A$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε γράφημα $X$ με κορυφές τα αριστερά σύμπλοκα $\{gG,\ g \in \Gamma\}$ της $G$ στη $\Gamma$, σύνολο θετικών ακμών το σύνολο των αριστερών συμπλόκων $\Gamma/A = \{gA,\ g \in \Gamma\}$ της $A$ στη $\Gamma$ και απεικονίσεις $\alpha(gA) = gG$, $\tau(gA) = gtG$. Παρατηρούμε ότι $\Gamma_{gA} \leq \Gamma_{\tau(gA)}$. Η ομάδα $\Gamma$ δρα στο $X$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά. Η δράση είναι μεταβατική στις κορυφές και στις ακμές, άρα υπάρχει μόνο μία τροχιά κορυφών και μόνο μία ακμών. Επίσης, είναι άμεσο ότι οι σταθεροποιούσες κορυφών είναι τα συζυγή της $G$, ενώ των ακμών τα συζυγή της $A$.

Δείχνουμε ότι το $X$ είναι δέντρο. Σημειώνουμε ότι από κάθε κορυφή $gG$ «εξέρχεται» η ακμή $gA$ με τέλος $gtG$ και «εισέρχεται» η ακμή $gt^{-1}A$ (με αρχή $gt^{-1}G$ και τέλος $gG$). Έτσι, κάθε έκφραση της μορφής $g_1t^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2}\cdots g_nt^{\varepsilon_n}$, όπου $g_i \in G$ και $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, αντιστοιχεί σε μονοπάτι από την κορυφή $G$ στην $g_1t^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2}\cdots g_nt^{\varepsilon_n}G$ και αντίστροφα, κάθε μονοπάτι με αρχή την $G$ έχει τέλος της μορφής $g_1t^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2}\cdots g_nt^{\varepsilon_n}G$. Επιπροσθέτως, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε έκφραση $g_i t^{\varepsilon_i} g_{i+1} t^{\varepsilon_{i+1}}$ αντιστοιχεί σε παλινδρόμηση $y\overline{y}$ ($y$ ακμή) αν και μόνο αν η λέξη $t^{\varepsilon_i}, g_{i+1}, t^{\varepsilon_{i+1}}$ δεν είναι ανηγμένη, δηλαδή είναι της μορφής $t^{-1}, a, t$ ή $t, \varphi(a), t^{-1}$, $a \in A$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως αν το $X$ δεν ήταν δέντρο, τότε θα υπήρχε κύκλωμα θετικού μήκους με αρχή $G$ και τέλος

$$g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \cdots g_n t^{\varepsilon_n} G = G \quad (1),$$

έτσι ώστε η λέξη $g_1, t^{\varepsilon_1}, g_2, t^{\varepsilon_2}, \cdots, g_n, t^{\varepsilon_n}$ να είναι ανηγμένη. Εφόσον το κύκλωμα είναι θετικού μήκους, έπεται ότι $n \geq 2$. Άρα από την $(1)$ προκύπτει ότι $g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \cdots g_n t^{\varepsilon_n} \in G$ με $n \geq 2$, το οποίο αντιφάσκει στη μοναδικότητα των κανονικών μορφών των HNN επεκτάσεων. Τέλος, η συνεκτικότητα του $X$ ακολουθεί από το γεγονός ότι η $G$ μαζί με το στοιχείο $t$ παράγουν τη $\Gamma$ και την προαναφερθείσα αντιστοιχία μεταξύ λέξεων και μονοπατιών. $\square$

**Θεώρημα 3.2.4.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα επί ενός γραφήματος $X$ με μια τροχιά κορυφών και μια τροχιά γεωμετρικών ακμών, δηλαδή η τοπολογική αναπαράσταση του γραφήματος πηλίκο είναι μια θηλειά.*

*Έστω $e$ μια ακμή του $X$ και $G_u$, $G_v$ και $G_e$ οι σταθεροποιούσες των κορυφών $u = \alpha(e)$, $v = \tau(e)$ και της ακμής $e$, αντίστοιχα. Έστω $g_e \in G$ ένα στοιχείο για το οποίο $g_e u = v$ και $\varphi : G_e \to \varphi(G_e)$ ο ισομορφισμός $g \mapsto g_e^{-1} g g_e$. Τότε $\varphi(G_e) \leq G_u$ και ο ομομορφισμός*

$$\langle G_u, t \,|\, t^{-1} a t = \varphi(a),\, a \in G_e \rangle \to G,$$

*ο οποίος είναι ο ταυτοτικός στην $G_u$ και απεικονίζει το $t$ στο $g_e$, είναι ισομορφισμός.*

Η επιχειρηματολογία της απόδειξης (την οποία αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη) είναι παρόμοια με αυτή του αντίστοιχου για αμαλγάματα, κάνοντας χρήση φυσικά της αντιστοιχίας μεταξύ λέξεων και μονοπατιών που είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη. Να σημειώσουμε μόνο πως $G_e \subseteq G_v = G_{g_e u} = g_e G_u g_e^{-1}$.

## Το δέντρο της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ συμβολίζουμε την ομάδα των $2 \times 2$ πινάκων με στοιχεία ακέραιους και ορίζουσα $1$:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ και } ad - bc = 1 \right\}.$$

**Λήμμα 3.2.5.** *Οι πίνακες* $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *παράγουν την ομάδα* $SL_2(\mathbb{Z})$.

*Απόδειξη.* Έστω $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Εφόσον $S_3 = S_2 S_1^{-1}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ παράγεται από τους πίνακες $S_1$ και $S_3$. Για τον τυχαίο πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, έχουμε ότι

$$S_1 \cdot A = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad S_3^n \cdot A = \begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα $A$ με τον $S_1 A$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|c| \leq |a|$. Επίσης, αν $c = 0$, τότε $A = \pm S_3^{\pm b} \in \langle S_1, S_3 \rangle$, αφού $ad = 1$. Αν $c \neq 0$, τότε, από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο της διαίρεσης, υπάρχουν ακέραιοι $q$ και $r$ με $0 \leq r < |c|$ έτσι ώστε $a = cq + r$. Το στοιχείο στην $(1,1)$ θέση του πίνακα $S_3^{-q} A = \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι γνησίως μικρότερο από την απόλυτη τιμή του στοιχείου στη θέση $(2,1)$. Άρα, αν το στοιχείο $r$ στη θέση $(2,1)$ του $S_1 S_3^{-q} A = \begin{pmatrix} -c & * \\ r & * \end{pmatrix}$ είναι μηδέν, τότε όπως πριν $S_1 S_3^{-q} A \in \langle S_1, S_3 \rangle$ και έτσι $A \in \langle S_1, S_3 \rangle$. Αν $r \neq 0$, τότε επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία (διαιρώντας ξανά), με τον πίνακα $S_1 S_3^{-q} A$. Συνεχίζοντας, σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα θα βρούμε μηδενικό υπόλοιπο, αφού κάθε φορά το υπόλοιπο που προκύπτει είναι γνησίως μικρότερο από το προηγούμενο, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο γεννήτορας $S_1$ έχει τάξη $4$, ενώ ο γεννήτορας $S_2$ έχει τάξη $6$.

Η ομάδα $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ έχει μια φυσική δράση στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ μέσω μετασχηματισμών Möbius:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \text{ τότε } A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\mathrm{Im}\big(A(z)\big) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

και άρα το φανταστικό μέρος του $A(z)$ είναι θετικό, αν $\mathrm{Im}(z) > 0$. Δηλαδή, πράγματι τα στοιχεία του $H$ απεικονίζονται στο $H$ μέσω της δράσης. Έστω $e = \{\cos\theta + i\sin\theta : \pi/3 \le \theta \le \pi/2\}$. Όπως υπονοείται από τον συμβολισμό, σκεφτόμαστε το τόξο $e$ ως μια ακμή με αρχή $u = i$ και τέλος $v = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Για τις σταθεροποιούσες της ακμής $e$ και των άκρων της, οι οποίες υπολογίζονται άμεσα, έχουμε

$$G_{\alpha(e)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

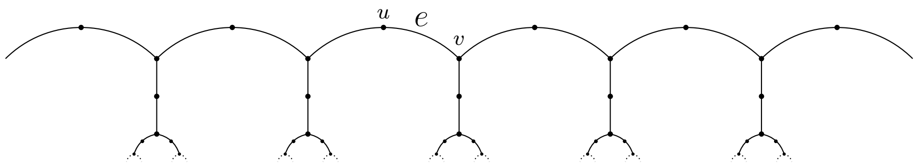
$$G_{\tau(e)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{και} \quad G_e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Οι σταθεροποιούσες των άκρων $\alpha(e)$ και $\tau(e)$ της $e$ είναι κυκλικές με τάξεις $4$ και $6$, αντίστοιχα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του προηγούμενου λήμματος, παρατηρούμε ότι $G_{\alpha(e)} = \langle S_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ και $G_{\tau(e)} = \langle S_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $T = Ge$ των μεταφορών του $e$ είναι η γεωμετρική αναπαράσταση ενός δέντρου. Το επόμενο τεχνικό λήμμα εξασφαλίζει ότι το $T$ μπορεί να θεωρηθεί γράφημα. Το $T$ είναι συνεκτικό, αφού από το Λήμμα 3.2.5 οι σταθεροποιούσες των άκρων του $e$ παράγουν την $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

**Λήμμα 3.2.6.** *Για κάθε $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, είτε $A \in G_e$ (δηλαδή ο $A$ σταθεροποιεί κάθε σημείο του $e$), $e \cap A(e) = \emptyset$ ή η τομή $e \cap A(e)$ είναι ένα από τα άκρα $u, v$ του $e$.*

*Απόδειξη.* Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $c^2 \neq d^2$. Κάνοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι ο $A$ απεικονίζει το (ανοικτό) ημικύκλιο $S^1 \cap H$, όπου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, στο ανοικτό (χωρίς τα άκρα) ημικύκλιο με κέντρο το μέσο $(ac - bd)/(c^2 - d^2)$ του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $A(-1), A(1)$ και ακτίνα $1/|c^2 - d^2|$. Συνεπώς, αν $z = x + iy \in e$ και $A(z) \in e$, τότε $\mathrm{Im}(A(z)) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{2}$ και άρα η ακτίνα $1/|c^2 - d^2|$ πρέπει να ισούται με $1$ (αφού $c, d$ ακέραιοι) και το κέντρο να είναι το $0$ ή το $1$. Έτσι $c = 0$ και $d = \pm 1$ ή $d = 0$ και $c = \pm 1$, ενώ $ac - bd = 0$ ή $1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $ac - bd = 0$. Από την παραπάνω ανάλυση έπεται ότι $A \in G_{\alpha(e)}$, δηλαδή ο $A$ είτε σταθεροποιεί κάθε σημείο του $e$ ή απεικονίζει το $z$ στο $-1/z = -\overline{z}$ και εύκολα




**Σχήμα 3.4:** *Το δέντρο της* $SL_2(\mathbb{Z})$.

προκύπτει ότι δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο του $e$ με $A(e) \in e$ στη δεύτερη περίπτωση. Αν τώρα $ac - bd = 1$, τότε ο $A$ θα είναι ένας από τους ακόλουθους πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι πρώτοι δύο πίνακες δρουν με μεταφορά $z \mapsto z - 1$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο του $e$ με $A(e) \in e$, αν ο $A$ είναι ένας από αυτούς. Ο τρίτος και τέταρτος πίνακας απεικονίζουν το $z$ στο $1 - 1/z = 1 - \overline{z}$, άρα σταθεροποιούν το άκρο $v$ και δεν υπάρχει άλλο σημείο του $e$ που να το απεικονίζουν σε σημείο του $e$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $c^2 = d^2$. Τότε $c, d \in \{\pm 1\}$ (αφού η ορίζουσα του $A$ είναι $1$) και οι ακέραιοι $a, b$ δεν μπορεί να είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Υπολογίζοντας, αφού λάβουμε υπόψη όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, βρίσκουμε ότι το πραγματικό μέρος του $A(z)$ ισούται με $(ac+bd)/2$ και ιδιαιτέρως δεν είναι $0$, αφού ο ακέραιος $ac+bd$ είναι περιττός. Συνεπώς, αν $A(z) \in e$, τότε θα έχουμε $ac+bd = 1$, $A(z) = v$ και $A(v) = v$. Δηλαδή, $z = v$. □

Στην περίπτωση που $c^2 = d^2$ (άρα $c = d = 1$ ή $c = -d = -1$), κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι το ημικύκλιο $S^1 \cap H$ απεικονίζεται μέσω του $A$ στη γραμμή $\{z \in H : \mathrm{Re}(z) = ac - 1/2\}$, αν $c = 1$, και στη γραμμή $\{z \in H : \mathrm{Re}(z) = ac + 1/2\}$, αν $c = -1$. Άρα, από τη μορφή της εικόνας $A(S^1 \cap H)$ σε κάθε περίπτωση ($c^2 \neq d^2$ ή $c^2 = d^2$), συμπεραίνουμε ότι το γράφημα $T$ μπορεί να τμήσει τον φανταστικό άξονα μόνο στην κορυφή $u = i$ και οι μόνες ακμές του που τον τέμνουν είναι οι $e$ και $S_1 e$. Αν υποθέσουμε ότι το $T$ δεν είναι δέντρο, τότε θα περιέχει ένα κύκλωμα το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε (δρώντας με κατάλληλο στοιχείο της ομάδας) ότι περιέχει την ακμή $e$. Αφού οι μόνες (γεωμετρικές) ακμές του $T$ που έχουν άκρο το $\alpha(e) = u$ είναι οι $e$ και $S_1 e$, έπεται ότι το κύκλωμα θα περιέχει και τις δύο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανηγμένο μονοπάτι του $T$ με άκρα $\tau(e)$ και $\tau(S_1 e)$, το οποίο θα τέμνει (λόγω συνέχειας) τον φανταστικό άξονα σε σημείο διαφορετικό από το $u$. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει ότι το $T$ είναι δέντρο. Τελικά η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ δρα επί του δέντρου $T$ χωρίς αντιστροφές με γράφημα πηλίκο ένα τμήμα. Έτσι, από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε ισομορφισμό

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong G_u *_{G_e} G_v \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6.$$

# 3.3 Η Θεωρία των Bass-Serre

Έχουμε δει ότι τα ελεύθερα γινόμενα (δύο παραγόντων) με αμάλγαμα αντιστοιχούν σε δράσεις ομάδων επί δέντρων με γράφημα πηλίκο ένα τμήμα, ενώ οι HNN επεκτάσεις σε δράσεις με γράφημα πηλίκο μια θηλειά. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να γενικευθούν τα προηγούμενα θεωρήματα και να δειχθεί ότι κάθε ομάδα που δρα σε ένα δέντρο μπορεί να ληφθεί μέσω «διαδοχικών» ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα και HNN επεκτάσεων των σταθεροποιουσών των κορυφών.

## Γραφήματα ομάδων

**Ορισμός 3.3.1.** Ένα **γράφημα ομάδων** $(\mathcal{G}, Y)$ αποτελείται από τα ακόλουθα:

- Ένα συνεκτικό γράφημα $Y$.
- Μία απεικόνιση $\mathcal{G}$ η οποία αντιστοιχίζει μια ομάδα $G_v$ σε κάθε κορυφή $v$ του $Y$, και μια ομάδα $G_e$ σε κάθε ακμή $e$ του $Y$, έτσι ώστε $G_e = G_{\overline{e}}$.
- Για κάθε ακμή $e$ του $Y$, υπάρχει ένας μονομορφισμός $\tau_e : G_e \hookrightarrow G_{\tau(e)}$, $g \mapsto g^{\tau_e}$.

Εφόσον $G_e = G_{\overline{e}}$, για κάθε ακμή $e$, υπάρχει μονομορφισμός $\alpha_e : G_e \hookrightarrow G_{\alpha(e)}$, για τον οποίο συμβολίζουμε $g \mapsto g^{\alpha_e} = g^{\tau_{\overline{e}}}$.

**Παράδειγμα 3.3.2.** (Το γράφημα ομάδων μιας δράσης) Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί ενός δέντρου $X$ και $Y$ ένα θεμελιώδες υπογράφημα της δράσης με δέντρο αντιπροσώπων $T$. Εφόσον το $T$ είναι δέντρο αντιπροσώπων της δράσης, κάθε κορυφή του $X$ ανήκει στην ίδια τροχιά με μοναδική κορυφή του $T$. Ιδιαιτέρως, για κάθε ακμή $e$ του $Y$, υπάρχουν μοναδικές κορυφές $\alpha^*(e)$ και $\tau^*(e)$ του $T$, οι οποίες ανήκουν στην ίδια τροχιά με τις $\alpha(e)$ και $\tau(e)$, αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι $\alpha^*(e) = \alpha(e)$ και $\tau^*(e) = \tau(e)$, όταν η $e$ είναι ακμή του $T$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\alpha^*(\overline{e}) = \tau^*(e)$ και $\tau^*(\overline{e}) = \alpha^*(e)$. Εφοδιάζουμε το $Y$ με μια νέα δομή γραφήματος διατηρώντας τις ίδιες κορυφές και ακμές αλλά χρησιμοποιώντας τις νέες απεικονίσεις $\alpha^*$, $\tau^*$ και συμβολίζουμε το νέο γράφημα με $Y^*$. Είναι άμεσο ότι το $Y^*$ είναι ισόμορφο με το γράφημα πηλίκο $X/G$. Σε κάθε κορυφή ή ακμή $x$ του $Y^*$ αντιστοιχίζουμε τη σταθεροποιούσα $G_x$. Για κάθε ακμή $e$ του $Y^*$ με αρχή στο $T$ επιλέγουμε στοιχείο $g_e \in G$ τέτοιο, ώστε $g_e\tau^*(e) = \tau(e)$ (υπάρχει αφού οι κορυφές είναι στην ίδια τροχιά). Αν επιπροσθέτως, η ακμή ανήκει στο $T$, τότε $\tau^*(e) = \tau(e)$ και επιλέγουμε $g_e = 1$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε $G_e \subseteq G_{\tau(e)} = G_{g_e\tau^*(e)} = g_e G_{\tau^*(e)} g_e^{-1}$ και έτσι υπάρχει μονομορφισμός $\tau_e^* : G_e \hookrightarrow G_{\tau^*(e)}$ με $\tau_e^*(g) = g_e^{-1} g g_e$. Από τον ορισμό του θεμελιώδους υπογραφήματος, κάθε ακμή $e$ του $Y$ που δεν έχει αρχή στο $T$, θα έχει τέλος στο $T$ και έτσι $\tau^*(e) = \tau(e)$. Για τέτοιες ακμές ο μονομορφισμός $G_e \hookrightarrow G_{\tau^*(e)}$ ορίζεται να είναι η ένθεση $g \mapsto g$. Το γράφημα ομάδων $(\mathcal{G}, Y^*)$ που κατασκευάσαμε αναφέρεται ως **γράφημα ομάδων της δοθείσας δράσης**, ως προς το θεμελιώδες υπογράφημα $Y$ το δέντρο αντιπροσώπων $T$ και την οικογένεια των στοιχείων $(g_e)$.

**Ορισμός 3.3.3.** Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα γράφημα ομάδων. Θεωρούμε την ελεύθερη ομάδα $F_{E(Y)}$ με βάση $\{t_e : e \in E(Y)\}$ και το ελεύθερο γινόμενο $\Gamma = *_v G_v * F_{E(Y)}$ των ομάδων κορυφών $G_v$, $v \in V(Y)$, με την $F_{E(Y)}$. Η ομάδα $\mathbf{F}(\mathcal{G}, \mathbf{Y})$ ορίζεται ως το πηλίκο της $\Gamma$ προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $t_e t_{\overline{e}}$ και $t_e g^{\tau_e} t_e^{-1} (g^{\alpha_e})^{-1}$, για κάθε $e \in E(Y)$ και κάθε $g \in G_e$. Με άλλα λόγια, αν οι ομάδες κορυφών δίνονται από παραστάσεις $G_v = \langle X_v \mid R_v \rangle$, τότε η $F(\mathcal{G}, Y)$ είναι η ομάδα με παράσταση

$$\Big\langle \bigsqcup_{v \in V(Y)} X_v \bigsqcup_{e \in E(Y)} \{t_e\} \,\Big|\, R_v,\ t_e t_{\overline{e}} = 1,\ t_e g^{\tau_e} t_e^{-1} = g^{\alpha_e},\ v \in V(Y), e \in E(Y), g \in G_e \Big\rangle.$$

Έστω $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$. **Η θεμελιώδης ομάδα** $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ του γραφήματος ομάδων $F(\mathcal{G}, Y)$ ως προς το $T$ είναι η ομάδα πηλίκο $F(\mathcal{G}, Y)/N$, όπου $N$ είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $t_e$, $e \in E(T)$ (δηλαδή, $N$ είναι η κανονική κλειστότητα στην $F(\mathcal{G}, Y)$ του συνόλου $\{t_e,\ e \in E(T)\}$). Συνεπώς, η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ έχει γεννήτορες:

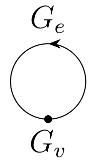
$$\bigsqcup_{v \in V(Y)} X_v \bigsqcup_{e \in E(Y)} \{t_e\}$$

και σχέσεις: $R_v,\ t_e t_{\overline{e}} = 1, t_e g^{\tau_e} t_e^{-1} = g^{\alpha_e}, v \in V(Y), e \in E(Y), g \in G_e, t_e = 1, e \in E(T)$.

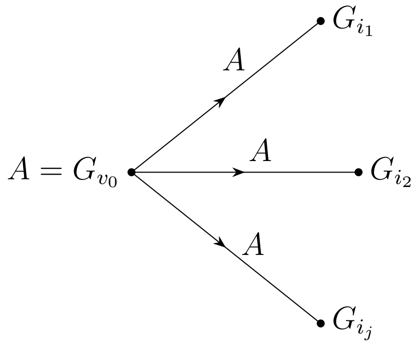
Στα παραδείγματα που ακολουθούν $(\mathcal{G}, Y)$ θα είναι ένα γράφημα ομάδων και $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$.

**Παράδειγμα 3.3.4.** Αν το γράφημα $Y$ είναι ένα τμήμα $\overset{G_v}{\bullet}\xrightarrow{G_e}\overset{G_u}{\bullet}$, τότε η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος ομάδων είναι το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $G_v *_{G_e} G_u$ που αντιστοιχεί στους μονομορφισμούς $\alpha_e : G_e \hookrightarrow G_v$ και $\tau_e : G_e \hookrightarrow G_u$.

**Παράδειγμα 3.3.5.** Στην περίπτωση που το $Y$ είναι θηλειά, η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος ομάδων είναι η HNN επέκταση με βάση $G_v$, σταθερό γράμμα $t_e$, προσεταιριζόμενες υποομάδες $A = \mathrm{Im}\alpha_e$, $B = \mathrm{Im}\tau_e$ και ισομορφισμό $\tau_e \circ \alpha_e^{-1} : A \to B$.




**Παράδειγμα 3.3.6.** Αν η σταθεροποιούσα κάθε κορυφής και κάθε ακμής είναι τετριμμένη, τότε η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος ομάδων είναι ισόμορφη με τη συνήθη θεμελιώδη ομάδα (με την τοπολογική έννοια) της γεωμετρικής αναπαράστασης του γραφήματος $Y$.




**Παράδειγμα 3.3.7.** Έστω $G_i$, $i \in I$, μια οικογένεια ομάδων, $A$ μια ομάδα και $\varphi_i : A \to G_i$ μια οικογένεια μονομορφισμών. Θεωρούμε ένα στοιχείο $v_0 \notin I$ και ορίζουμε γράφημα ομάδων $Y$ ως εξής: $V(Y) = \{v_0\} \cup I$, $E(Y) = \{(v_0, i), (i, v_0) : i \in I\}$ με $\alpha(v_0, i) = v_0$, $\tau(v_0, i) = i$ και $\overline{(v_0, i)} = (i, v_0)$. Δηλαδή το $Y$ είναι δέντρο. Σε κάθε κορυφή τύπου $i$ αντιστοιχίζουμε την ομάδα $G_i$, στην κορυφή $v_0$ και σε κάθε ακμή αντιστοιχίζουμε την ομάδα $A$. Ο μονομορφισμός $\tau_{(v_0,i)}$ από την $A$ στην $G_i$ είναι ο $\varphi_i$, ενώ ο $\tau_{(i,v_0)} : A \to A$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός. Η θεμελιώδης ομάδα του δέντρου ομάδων που κατασκευάσαμε είναι το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $*_A G_i$ ως προς την οικογένεια μονομορφισμών $\varphi_i$.

Στη συνέχεια δίνουμε και έναν δεύτερο ορισμό της θεμελιώδους ομάδας χρησιμοποιώντας μια κορυφή ως σημείο αναφοράς και δείχνουμε ότι οι δύο ορισμοί δίνουν ισόμορφες ομάδες.

**Ορισμός 3.3.8.** Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα γράφημα ομάδων και $v_0 \in V(Y)$. Η **θεμελιώδης ομάδα** $\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)$ **του** $(\mathcal{G}, Y)$ **στην κορυφή** $v_0$ είναι η υποομάδα της $F(\mathcal{G}, Y)$ που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} g_2 \cdots t_{e_n} g_n$, όπου $n \geq 0$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ κλειστό μονοπάτι στην κορυφή $v_0$, $g_0 \in G_{v_0}$ και $g_i \in G_{\tau(e_i)}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Καθεμία από τις τρεις ομάδες $F(\mathcal{G}, Y)$, $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ και $\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι παράγεται από τα στοιχεία των ομάδων κορυφών και τα στοιχεία $t_e \in E(Y)$ (τυπικά, από τις εικόνες τους μέσω των αντίστοιχων φυσικών επιμορφισμών) υποκείμενα στις αντίστοιχες σχέσεις.

**Πρόταση 3.3.9.** *Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα γράφημα ομάδων, $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$ και $v_0 \in V(Y)$. Ο περιορισμός του φυσικού επιμορφισμού $\varphi : F(\mathcal{G}, Y) \to \pi(\mathcal{G}, Y, T)$ στην υποομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)$ είναι ισομορφισμός επί της $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$.*

*Απόδειξη.* Κάθε μονοπάτι $\gamma = (e_1, \ldots, e_m)$ στο $Y$ αντιστοιχεί στη λέξη $t_{e_1} \ldots t_{e_m}$ στους γεννήτορες της $F(\mathcal{G}, Y)$ και έτσι αναπαριστά ένα στοιχείο $g_\gamma$ της ομάδας $F(\mathcal{G}, Y)$. Για κάθε κορυφή $v$ του $Y$, θεωρούμε το ανηγμένο μονοπάτι $\gamma_v$ εντός του $T$ από την κορυφή $v_0$ στην $v$ και έστω $g_v = g_{\gamma_v}$. Οι απεικονίσεις $G_v \to F(\mathcal{G}, Y)$ με $g \mapsto g_v g g_v^{-1}$ και $F_{E(Y)} \to F(\mathcal{G}, Y)$ με $t_e \mapsto g_{\alpha(e)} t_e g_{\tau(e)}^{-1}$, $v \in V(Y)$, $e \in E(Y)$, επάγουν ομομορφισμό $\psi : \pi(\mathcal{G}, Y, T) \to F(\mathcal{G}, Y)$ του οποίου η εικόνα περιέχεται στην ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)$. Είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι οι απεικονίσεις $\psi$ και $\varphi|_{\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)}$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης. □

**Πόρισμα 3.3.10.**
1. *Η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ είναι ανεξάρτητη, ως προς ισομορφισμό, από την επιλογή του μεγιστικού δέντρου του $Y$.*
2. *Η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, v_0)$ είναι ανεξάρτητη, ως προς ισομορφισμό, από την επιλογή της κορυφής $v_0$.*

## Η δομή των ομάδων που δρουν σε δέντρα

**Λήμμα 3.3.11.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα επί ενός συνεκτικού γραφήματος $X$ και $Y$ ένα θεμελιώδες υπογράφημα της δράσης με δέντρο αντιπροσώπων $T$. Για κάθε ακμή*

*$e \in E(Y)$ με αρχή στο $T$ επιλέγουμε στοιχείο $g_e \in G$ με $g_e\tau(e) \in V(T)$. Τότε η ομάδα $G$ παράγεται από τα στοιχεία $g_e$ και τις σταθεροποιούσες κορυφών $G_v$, $v \in V(T)$.*

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν στοιχεία $g_e$ όπως στη διατύπωση του θεωρήματος, αφού κάθε κορυφή του $X$ ανήκει σε τροχιά κορυφής του $T$.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την υποομάδα $H$ της $G$ που παράγεται από τις σταθεροποιούσες $G_v$ των κορυφών του δέντρου $T$ και τα στοιχεία $g_e$. Θα δείξουμε ότι $G = H$. Εφόσον το $V(T)$ είναι σύνολο αντιπροσώπων τροχιών κορυφών της δράσης, έχουμε

$$V(X) = G \cdot V(T) = H \cdot V(T) \sqcup (G - H) \cdot V(T),$$

και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $H \cdot V(T) = V(X)$. Επίσης, αφού για κάθε ακμή $e$ του $Y$ με αρχή στο $T$ έχουμε $g_e\tau(e) \in T$, έπεται ότι $V(Y) \subseteq H \cdot V(T)$. Ως εκ τούτου αρκεί να δείξουμε ότι $H \cdot Y = X$. Πράγματι, αν $H \cdot Y = X$, τότε $V(X) = H \cdot V(Y) \subseteq H \cdot V(T)$ και έτσι $H \cdot V(T) = V(X)$. Επιπροσθέτως, λόγω της συνεκτικότητας του $X$, αρκεί να δείξουμε ότι μια ακμή $e$ με αρχή στο $H \cdot Y$, ανήκει στο $H \cdot Y$. Έστω λοιπόν μια ακμή $e$ με $\alpha(e) \in H \cdot Y$. Τότε $\alpha(e) \in H \cdot V(T)$ και έτσι υπάρχει κορυφή $v_0 \in V(T)$ με $\alpha(e) = hv_0$, για κάποιο $h \in H$. Η ακμή $h^{-1}e$ έχει αρχή στο $T$ και $h^{-1}e = gy$, για κάποιο $g \in G$ και κάποια ακμή $y \in E(Y)$, καθώς $X = G \cdot Y$. Αν $\alpha(y) \in V(T)$, τότε $g^{-1}\alpha(h^{-1}e) \in V(T)$ και άρα, αφού $T$ δέντρο αντιπροσώπων, $g^{-1}v_0 = v_0$. Έπεται ότι $g \in G_{v_0} \subseteq H$ και έτσι $e = hgy \in H \cdot Y$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $e \in H \cdot Y$ και στην περίπτωση που $\tau(y) \in V(T)$. □

**Παρατήρηση 3.3.12.** Αν για κάθε ακμή $e$ του $Y$ που περιέχεται στο $T$ επιλέξουμε $g_e = 1$, τότε το σύνολο $A = \{e \in E(Y) : g_e \neq 1\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των γεωμετρικών ακμών του $Y$ που δεν περιέχονται στο $T$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 8, οι ακμές του $Y$ εκτός του $T$, αντιστοιχούν σε μια βάση της θεμελιώδους ομάδας (με την τοπολογική έννοια) της γεωμετρικής αναπαράστασης του γραφήματος πηλίκο (που είναι ελεύθερη).

**Θεώρημα 3.3.13** (Θεώρημα δομής)**.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός συνεκτικού γραφήματος $X$ και $Y$ ένα θεμελιώδες υπογράφημα της δράσης με δέντρο αντιπροσώπων $T$. Για κάθε ακμή $e \in E(Y)$ με αρχή στο $T$ επιλέγουμε στοιχείο $g_e \in G$ με $g_e^{-1}\tau(e) \in V(T)$ και $g_e = 1$ αν $e \in E(T)$. Για κάθε ακμή $e \in E(Y)$ που δεν έχει αρχή στο $T$ (οπότε $\alpha(\overline{e}) \in V(T)$), θέτουμε $g_e = g_{\overline{e}}^{-1}$. Τότε η ομάδα $G$ είναι ισόμορφη με τη* *θεμελιώδη ομάδα* $\pi(\mathcal{G}, Y^*, T)$ *του γραφήματος ομάδων* $(\mathcal{G}, Y^*)$ *που αντιστοιχεί στη δράση (βλέπε Παράδειγμα 3.3.2). Δηλαδή, η* $G$ *έχει μια παράσταση με σύνολο γεννητόρων*

$$\{t_e \mid e \in E(Y)\} \bigsqcup_{v \in V(T)} G_v$$

*και σχέσεις: τις σχέσεις των* $G_v$, *για* $v \in V(T)$, *τις σχέσεις* $t_e t_{\overline{e}} = 1$, $t_e g^{\tau_e^*} t_e^{-1} = g^{\alpha_e^*}$, $e \in E(Y)$, $g \in G_e$ *και τις σχέσεις* $t_e = 1$ *για* $e \in E(T)$.

*Απόδειξη.* Έστω $\Gamma = \pi(\mathcal{G}, Y^*, T)$, δηλαδή, η ομάδα που δίνεται από την παράσταση στη διατύπωση του θεωρήματος. Από τον τρόπο επιλογής των στοιχείων $g_e$, στην $G$ ικανοποιούνται οι σχέσεις: $g_e \tau_e^*(g) g_e^{-1} = \tau_{\overline{e}}^*(g) = \alpha_e^*(g)$, $g_e g_{\overline{e}} = 1$, για $e \in E(Y)$, $g \in G_e$, και $g_e = 1$ για $e \in E(T)$. Συνεπώς, αφού η $\Gamma$ ικανοποιεί τις ανάλογες σχέσεις, οι απεικονίσεις $G_v \to G$ με $g \mapsto g$ και $t_e \mapsto g_e$ επάγουν ομομορφισμό $\varphi : \Gamma \to G$, ο οποίος είναι επί από το Λήμμα 3.3.11. Θα δείξουμε ότι ο επιμορφισμός $\varphi$ είναι $1-1$.

Θεωρούμε έναν προσανατολισμό του $T$, τον οποίο επεκτείνουμε σε προσανατολισμό $Y_+^*$ του $Y^*$, ορίζοντας ως θετικές τις ακμές του $E(Y) - E(T)$ των οποίων η αρχή ανήκει στο $V(T)$. Τότε $\alpha_e^*(g) = g$ και $g_e \tau_e^*(g) g_e^{-1} = g$ για κάθε $e \in Y_+^*$ και $g \in G_e$. Στη συνέχεια, για την αντίστροφη μιας ακμής $e$ διευκολύνει και θα χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $e^{-1}$. Έστω $v_0$ μια κορυφή του $Y$. Τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ υπάρχει μονοπάτι $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots, e_n^{\varepsilon_n})$ του $Y^*$ με αρχή και τέλος $v_0$, όπου $e_i \in Y_+^*$ και $\varepsilon_i \in \pm 1$, και στοιχεία $x_0 \in G_{v_0}$, $x_i \in G_{v_i}$, όπου $v_i = \tau^*(e_i^{\varepsilon_i})$, $i = 1, \ldots, n$, έτσι ώστε

$$\gamma = x_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} x_1 t_{e_2}^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t_{e_n}^{\varepsilon_n} x_n \,.$$

Πράγματι, εκφράζουμε πρώτα το $\gamma$ ως γινόμενο των δοθέντων γεννητόρων (και των αντιστρόφων τους) και ομαδοποιούμε στοιχεία της ίδιας σταθεροποιούσας κορυφής χρησιμοποιώντας τις σχέσεις. Έπειτα αντιστοιχίζοντας κάθε στοιχείο $g_v \in G_v$ στην κορυφή $v$ και κάθε ακμή στα άκρα της, από το προηγούμενο γινόμενο προκύπτει μια ακολουθία κορυφών, της οποίας διαδοχικούς όρους «ενώνουμε» με γεωδαισιακές εντός του δέντρου $T$. Εισάγουμε στο γινόμενο, διαδοχικά, σύμφωνα με αυτές τις γεωδαισιακές, μονάδες για τα στοιχεία $t_e = 1$ που αντιστοιχούν στις ακμές τους και μονάδες ως $g_i$ για τις «νέες» κορυφές που προκύπτουν (που έχουν παρεμβληθεί).

Παρατηρούμε ότι αν $\varepsilon_i = 1$, τότε η ακμή $e_i^{\varepsilon_i}$ έχει αρχή $\alpha(e_i) = \alpha^*(e_i) = v_{i-1}$ και τέλος $\tau(e_i) = g_{e_i} \tau^*(e_i) = g_{e_i} v_i$, ενώ αν $\varepsilon_i = -1$, η ακμή $g_{e_i}^{-1} e_i^{\varepsilon_i}$ έχει αρχή $g_{e_i}^{-1} \tau(e_i) = \tau^*(e_i) = v_{i-1}$ και τέλος $g_{e_i}^{-1} \alpha(e_i) = g_{e_i}^{-1} \alpha^*(e_i) = g_{e_i}^{-1} \tau^*(e_i) = g_{e_i}^{-1} v_i$. Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

$$\text{Αν θέσουμε } \; y_i = g_{e_i}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)} e_i^{\varepsilon_i}, \text{ τότε } \; \alpha(y_i) = v_{i-1} \; \text{ και } \; \tau(y_i) = g_{e_i}^{\varepsilon_i} v_i.$$

Έπεται ότι οι ακμές του $X$

$$z_i = x_0 g_{e_1}^{\varepsilon_1} x_1 g_{e_2}^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{i-1} y_i \quad \text{και} \quad z_{i+1} = x_0 g_{e_1}^{\varepsilon_1} x_1 g_{e_2}^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{i-1} g_{e_i}^{\varepsilon_i} x_i y_{i+1}$$

είναι διαδοχικές και σχηματίζουν ένα μονοπάτι $\widetilde{\gamma} = z_1 \cdots z_n$ από την κορυφή $v_0$ στην $\varphi(\gamma) v_0$. Ας υποθέσουμε ότι το στοιχείο $\gamma$ ανήκει στον πυρήνα του $\varphi$. Τότε $n \geq 1$, αφού ο περιορισμός του $\varphi$ σε κάθε $G_v$ είναι η ένθεση, και το μονοπάτι $\widetilde{\gamma}$ είναι κλειστό. Εφόσον το $X$ είναι δέντρο, το μονοπάτι $\widetilde{\gamma}$ δεν μπορεί να είναι ανηγμένο και άρα υπάρχει $i \in 1, \ldots, n-1$, έτσι ώστε $z_i = z_{i+1}^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι $y_i = g_{e_i}^{\varepsilon_i} x_i y_{i+1}^{-1}$, δηλαδή,

$$g_{e_i}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)} e_i^{\varepsilon_i} = g_{e_i}^{\varepsilon_i} x_i g_{e_{i+1}}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_{i+1} - 1)} e_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}.$$

Από το γεγονός ότι το $Y$ είναι θεμελιώδες υπογράφημα της δράσης (η οποία είναι χωρίς αντιστροφές) προκύπτει ότι $e_i = e_{i+1}$, $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ και $v_{i-1} = v_{i+1}$. Άρα το στοιχείο $h = g_{e_i}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i + 1)} x_i g_{e_i}^{-\frac{1}{2}(\varepsilon_i + 1)}$ ανήκει στη σταθεροποιούσα $G_{e_i}$ της ακμής $e_i$ και $\tau_{e_i}^*(h) = g_{e_i}^{-1} h g_{e_i} = g_{e_i}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)} x_i g_{e_i}^{-\frac{1}{2}(\varepsilon_i - 1)}$. Αν $\varepsilon_i = 1$, τότε $\tau_{e_i}^*(h) = x_i$, το τμήμα $x_{i-1} t_{e_i} x_i t_{e_i}^{-1} x_{i+1}$ στην αρχική έκφραση για το στοιχείο $\gamma$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον γεννήτορα $x_{i-1} h x_{i+1} \in G_{v_{i+1}}$ και να παραλειφθεί η παλινδρόμηση $e_i e_i^{-1}$ από το αρχικό, κλειστό στο $v_0$, μονοπάτι $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots, e_n^{\varepsilon_n})$ του $Y^*$. Αντίστοιχα, αν $\varepsilon_i = -1$, τότε το τμήμα $x_{i-1} t_{e_i}^{-1} x_i t_{e_i} x_{i+1}$ στην αρχική έκφραση του $\gamma$ αντικαθίσταται από τον γεννήτορα $x_{i-1} \tau_{e_i}^*(h) x_{i+1} \in G_{v_{i-1}} = G_{\tau^*(e_i)}$ και παραλείπουμε την παλινδρόμηση $e_i^{-1} e_i$ από το μονοπάτι $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots, e_n^{\varepsilon_n})$. Σε κάθε περίπτωση το $n$ έχει ελαττωθεί κατά δύο και επαγωγικά προκύπτει ότι $\gamma = 1$, δηλαδή, ο $\varphi$ είναι $1-1$ και άρα ισομορφισμός. □

**Παράδειγμα 3.3.14.** Έστω $N$ μια κλειστή (συμπαγής, χωρίς σύνορο) και προσανατολίσιμη υποπολλαπλότητα διάστασης $n-1$ μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας $M$ διάστασης $n$. Υποθέτουμε ότι η $N$ επιδέχεται διπλό κολάρο, δηλαδή η ένθεση $N \hookrightarrow M$ επεκτείνεται σε ομοιομορφική εμφύτευση $h : N \times [-1,1] \hookrightarrow M$, έτσι ώστε $h(x,0) = x$ για κάθε $x \in N$. Έστω $p : \widetilde{M} \to M$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης της $M$ και $\widetilde{N} = p^{-1}(N)$ η αντίστροφη εικόνα της $N$ μέσω της προβολής $p$. Τότε η $\widetilde{N}$ κληρονομεί ένα διπλό κολάρο $\widetilde{h} : \widetilde{N} \times [-1,1] \hookrightarrow \widetilde{M}$ και ορίζεται το *δυικό δέντρο* $T$ της $\widetilde{N}$ στην $\widetilde{M}$. Πιο συγκεκριμένα, οι κορυφές του $T$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος $\widetilde{M} - \widetilde{N}$, ενώ οι ακμές του είναι οι συνιστώσες του $\widetilde{N}$. Τα άκρα μιας ακμής $\widetilde{N}_e$ είναι οι συνιστώσες του $\widetilde{M} - \widetilde{N}$ που περιέχουν την $\widetilde{N}_e$ στην κλειστότητά τους. Το ότι μια ακμή δεν έχει περισσότερα από δύο άκρα, έπεται από το ότι η $\widetilde{N}$ επιδέχεται διπλό κολάρο. Η απλή συνεκτικότητα της $\widetilde{M}$ συνεπάγεται ότι το γράφημα $T$ είναι δέντρο. Η συνήθης δράση της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(M)$ στον καθολικό χώρο (μέσω μετασχηματισμών επικαλύψεως) ορίζει μια δράση της $\pi_1(M)$ στο δέντρο $T$. Οι σταθεροποιούσες ακμών και κορυφών είναι (ως προς επιλογή σημείου αναφοράς) οι εικόνες των θεμελιωδών ομάδων των προβολών των αντίστοιχων συνιστωσών στην $\pi_1(M)$. Για περισσότερα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [6].

**Πόρισμα 3.3.15.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα ελεύθερα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός δέντρου $X$. Τότε η $G$ είναι ελεύθερη με τάξη ίση με το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του γραφήματος πηλίκο $X/G$ που δεν ανήκουν σε μεγιστικό δέντρο $T$ του $X/G$. Ιδιαιτέρως, αν το γράφημα πηλίκο $X/G$ είναι πεπερασμένο, τότε rank$(G) = |E^+(X/G)| - |V(X/G)| + 1$, όπου με $|E^+(X/G)|$ συμβολίζουμε το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του $X/G$ (ισοδύναμα το πλήθος των ακμών ενός προσανατολισμού).*

Υπενθυμίζουμε ότι μια δράση λέγεται ελεύθερη, αν η σταθεροποιούσα κάθε κορυφής είναι τετριμμένη.

*Απόδειξη.* Έπεται άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα, αφού $G_v = \{1\}$ για κάθε κορυφή $v$ του $X$. Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται από την ακόλουθη παρατήρηση. Έστω $Y$ ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα. Τότε το $Y$ είναι δέντρο αν και μόνο αν το πλήθος των κορυφών του $|V(Y)|$ ισούται με το άθροισμα $|E^+(Y)| + 1$, όπου με $|E^+(Y)|$ συμβολίζουμε το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του $Y$. Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του $X/G$, εκτός του μεγιστικού δέντρου $T$, ισούται με $|E^+(X/G)| - |E^+(T)| = |E^+(X/G)| - |V(T)| + 1 = |E^+(X/G)| - |V(X/G)| + 1$. □

**Παρατήρηση 3.3.16.** Στην απόδειξη του προηγούμενου πορίσματος περιέχεται το εξής: Αν το $Y$ ένα συνεκτικό γράφημα και το $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$, τότε το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του $Y$ που δεν ανήκουν στο $T$ ισούται με $|E^+(Y)| - |V(Y)| + 1$.

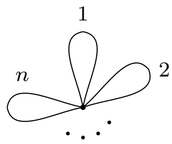
**Πόρισμα 3.3.17.** *Μια ομάδα $G$ είναι ελεύθερη αν και μόνο αν δρα ελεύθερα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός δέντρου $X$.*

*Απόδειξη.* Αν η $G$ είναι ελεύθερη με βάση το $S$, τότε το γράφημα Cayley $X = \Gamma(G, S)$ της $G$ ως προς $S$ είναι δέντρο επί του οποίου η $G$ δρα ελεύθερα. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι το προηγούμενο πόρισμα. □

**Θεώρημα 3.3.18** (Nielsen-Schreier)**.** *Κάθε υποομάδα $H$ μιας ελεύθερης ομάδας $G$ είναι ελεύθερη ομάδα. Αν επιπλέον η $G$ έχει πεπερασμένη τάξη $n$ και η $H$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην $G$, τότε*

$$rank(H) - 1 = [G : H]\big(rank(G) - 1\big).$$

*Απόδειξη.* Έστω $S$ μια βάση της $G$ και $X$ το γράφημα Cayley της $G$ ως προς το $S$. Έχουμε αποδείξει ότι το $X$ είναι δέντρο επί του οποίου η $G$ δρα ελεύθερα (χωρίς αντιστροφές). Η ομάδα $H$, ως υποομάδα της $G$, δρα επίσης ελεύθερα επί του δέντρου $X$ και συνεπώς, από το προηγούμενο πόρισμα, είναι ελεύθερη. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, γνωρίζουμε ότι το γράφημα πηλίκο $X/G$ αποτελείται από μια μόνο κορυφή και έχει μια γεωμετρική ακμή για κάθε ελεύθερο γεννήτορα της βάσης $S$. Άρα, αν $\text{rank}(G) = n < \infty$, τότε το $X/G$ είναι μπουκέτο $n$ το πλήθος κύκλων. Θεωρούμε τον επιμορφισμό γραφημάτων $\pi : X/H \to X/G$ με $\pi\big([x]_H\big) = [x]_G$, όπου με $[x]_G$ (αντίστοιχα $[x]_H$) συμβολίζουμε την τροχιά μέσω της $G$ (αντίστοιχα μέσω της $H$) της κορυφής ή ακμής $x$.

$X/H \xrightarrow{\ \pi\ }$ 


Η υποομάδα $H$ δρα στο σύνολο $A_x = \{gx, g \in G\}$ των σημείων της τροχιάς του $x$ και το διαμερίζει σε $[G : H]$ το πλήθος $H$-τροχιές. Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση

$$\varphi : \big\{H - \text{τροχιές του } A_x\big\} \to G/H, \quad [gx]_H \mapsto Hg$$

είναι καλά ορισμένη, $1-1$ και επί, εφόσον η δράση είναι ελεύθερη. Συνεπώς, κάθε $G$-τροχιά δίνει $[G : H]$ το πλήθος $H$-τροχιές. Έπεται ότι το γράφημα πηλίκο $X/H$ έχει $[G : H]$ το πλήθος κορυφές και $n[G : H]$ το πλήθος γεωμετρικές ακμές. Άρα, από το Πόρισμα 3.3.15, έχουμε ότι $\text{rank}(H) = n[G : H] - [G : H] + 1 = [G : H]\big(\text{rank}(G) - 1\big) + 1.$ □

## Το δέντρο των Bass-Serre

Στόχος μας, για το υπόλοιπο είναι ένα αντίστροφο της προηγούμενης κατασκευής: κάθε παράσταση μιας ομάδας $G$ ως γράφημα ομάδων προκύπτει από δράση σε κατάλληλο δέντρο.

**Ορισμός 3.3.19.** Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα γράφημα ομάδων. Μια **λέξη τύπου** $\gamma$ είναι ένα στοιχείο της ομάδας $F(\mathcal{G}, Y)$ της μορφής $w = g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} g_2 \cdots t_{e_n} g_n$, όπου $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ είναι ένα μονοπάτι του $Y$, $g_0 \in G_{\alpha(e_1)}$ και $g_i \in G_{\tau(e_i)}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Μια λέξη τύπου $\gamma$ λέγεται **ανηγμένη** αν:

1. $g_0 \neq 1$, στην περίπτωση που $n = 0$,

2. αν $n > 0$, $g_i \notin \mathrm{Im}\tau_{e_i}$, οποτεδήποτε $e_{i+1} = \overline{e}_i$.

Έστω $T$ είναι ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$. Λέμε ότι το στοιχείο $g$ της ομάδας $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ **αναπαρίσταται** από την ανηγμένη λέξη $w \in F(\mathcal{G}, Y)$, όπως πριν, αν το $g$ είναι η εικόνα του $w$ μέσω του φυσικού επιμορφισμού $F(\mathcal{G}, Y) \to \pi(\mathcal{G}, Y, T)$.

Αν έχουμε ένα γράφημα ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$, όπως πριν, και το $Y'$ είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα του $Y$, τότε ορίζεται το (υπο)γράφημα ομάδων $(\mathcal{G}|_{Y'}, Y')$, όπου οι ομάδες κορυφών, οι ομάδες ακμών και οι μονομορφισμοί είναι όπως στο αρχικό γράφημα ομάδων απλά το υποκείμενο γράφημα είναι το $Y'$. Αν το $T'$ είναι μεγιστικό δέντρο του $Y'$ που περιέχεται σε μεγιστικό δέντρο $T$ του $Y$ (πάντα κάθε υποδέντρο μπορεί να επεκταθεί σε μεγιστικό δέντρο), τότε υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός $\pi(\mathcal{G}|_{Y'}, Y', T') \to \pi(\mathcal{G}, Y, T)$ που επάγεται από τις απεικονίσεις $t_e \mapsto t_e$ για $e \in E(Y')$ και τις ταυτοτικές απεικονίσεις $G_v \to G_v$ για $v \in V(Y')$. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτός ο φυσικός ομομορφισμός είναι μονομορφισμός. Για τους σκοπούς μας θα περιοριστούμε στο ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 3.3.20.** *Κάθε ανηγμένη λέξη τύπου $\gamma$ αναπαριστά, στην ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$, στοιχείο διαφορετικό από το ταυτοτικό $1$. Ιδιαιτέρως, η φυσική απεικόνιση $G_v \to \pi(\mathcal{G}, Y, T)$ είναι μονομορφισμός για κάθε $v \in V(Y)$.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε το λήμμα πρώτα στην περίπτωση που το γράφημα $Y$ είναι πεπερασμένο χρησιμοποιώντας επαγωγή επί του πλήθους των ακμών του $Y$. Γραφήματα ομάδων με μια ακμή αντιστοιχούν σε ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα ή HNN επεκτάσεις και το συμπέρασμα προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών. Αν το $Y$ δεν είναι δέντρο, τότε επιλέγουμε ακμή $e$ εκτός του μεγιστικού δέντρου $T$ του $Y$. Έστω $Y'$ το υπογράφημα που προκύπτει από το $Y$ αφαιρώντας την ακμή $e$ (και την αντίστροφή της φυσικά, «αφήνοντας» όμως τα άκρα της) και του οποίου μεγιστικό δέντρο αποτελεί το $T$. Συγκρίνοντας παραστάσεις, διαπιστώνουμε ότι η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ είναι μια HNN επέκταση της $\pi(\mathcal{G}|_{Y'}, Y', T)$ με προσεταιριζόμενες υποομάδες $\mathrm{Im}\alpha_e$ και $\mathrm{Im}\tau_e$, οι οποίες από επαγωγική υπόθεση εμφυτεύονται στην $\pi(\mathcal{G}|_{Y'}, Y', T)$.

Παρατηρούμε ότι κάθε ανηγμένη μορφή στην $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$, έπειτα από κατάλληλη ομαδοποίηση των στοιχείων της, ορίζει ανηγμένη μορφή στο γράφημα ομάδων (θηλειά) που αντιστοιχεί στην παραπάνω HNN επέκταση και ως εκ τούτου αναπαριστά μη τετριμμένο στοιχείο (πάλι λόγω της μοναδικότητας των κανονικών μορφών σε HNN επεκτάσεις).

Παρομοίως, αν το $Y$ είναι δέντρο, δηλαδή $Y = T$, τότε, αφού το $Y$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει υποδέντρο $T'$ του $T$ και ακμή $e$, έτσι ώστε $T = T' \cup \{e, \bar{e}\}$ και $\tau(e) \notin T'$. Από επαγωγική υπόθεση η ομάδα $G_{\alpha(e)}$ (άρα και η $G_e$) εμφυτεύεται στην $\pi(\mathcal{G}|_{T'}, T', T')$ και, συγκρίνοντας παραστάσεις, έχουμε $\pi(\mathcal{G}, T, T) = \pi(\mathcal{G}|_{T'}, T', T') *_{G_e} G_{\tau(e)}$. Κάθε ανηγμένη μορφή στην $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ δίνει ανηγμένη μορφή του γραφήματος ομάδων που αντιστοιχεί στο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $\pi(\mathcal{G}|_{T'}, T', T') *_{G_e} G_{\tau(e)}$. Το συμπέρασμα έπεται πάλι από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών σε ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση που το $Y$ είναι πεπερασμένο.

Στην περίπτωση που το $Y$ είναι άπειρο, σκιαγραφούμε την απόδειξη λόγω των πολλών τεχνικών λεπτομερειών. Η ομάδα $\pi(\mathcal{G}|_T, T, T)$ ικανοποιεί το συμπέρασμα, γιατί είναι το ευθύ όριο των ομάδων $\pi(\mathcal{G}|_S, S, S)$ που λαμβάνεται επί όλων των πεπερασμένων υποδέντρων $S$ του $T$. Η ομάδα $\pi(\mathcal{G}, Y, T)$ είναι μια «πολλαπλή» HNN επέκταση με βάση την ομάδα $\pi(\mathcal{G}|_T, T, T)$ και με ένα σταθερό γράμμα $t_e$ για κάθε ζεύγος γεωμετρικών ακμών $\{e, \bar{e}\}$ εκτός του μεγιστικού δέντρου $T$. Για πολλαπλές HNN επεκτάσεις η μοναδικότητα των κανονικών μορφών αποδεικνύεται γενικεύοντας την ίδια επιχειρηματολογία που χρησιμοποιήσαμε για τις συνήθεις HNN επεκτάσεις. Από τη μοναδικότητα των κανονικών μορφών σε πολλαπλές HNN επεκτάσεις και το γεγονός ότι η βάση ικανοποιεί το συμπέρασμα, προκύπτει το αποτέλεσμα στη γενική περίπτωση. □

Η περίπτωση που το γράφημα $Y$ είναι πεπερασμένο δεν είναι τόσο περιοριστική όπως φαίνεται. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, αν μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G$ είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$, τότε υπάρχει πεπερασμένο υπογράφημα $Y'$ του $Y$ έτσι ώστε η $G$ να είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα του γραφήματος ομάδων $(\mathcal{G}|_{Y'}, Y')$.

**Θεώρημα 3.3.21.** *Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα γράφημα ομάδων, $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $Y$ και $G = \pi(\mathcal{G}, Y, T)$. Τότε υπάρχει ένα δέντρο $X$ επί του οποίου η $G$ δρα χωρίς αντιστροφές, έτσι ώστε $X/G \cong Y$ και οι σταθεροποιούσες των κορυφών και ακμών είναι τα συζυγή των ομάδων κορυφών και ακμών, αντίστοιχα.*

Το δέντρο $X = X(\mathcal{G}, Y, T)$ αναφέρεται ως το **καθολικό δέντρο** που αντιστοιχεί στο γράφημα ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$ (και το μεγιστικό δέντρο $T$).

*Απόδειξη.* Η βασική θεωρία των δράσεων ομάδων καθορίζει ποιες θα είναι οι κορυφές και ακμές του $X$, ως προς ισομορφισμό που διατηρείται από τις δράσεις. Επιλέγουμε έναν προσανατολισμό $O$ του $Y$. Ορίζουμε ως σύνολο κορυφών του $X$ το σύνολο

$$V(X) = \bigsqcup_{v \in V(Y)} G/G_v,$$

που αποτελείται από τα αριστερά σύμπλοκα των ομάδων κορυφών στην $G$ και ως σύνολο θετικών ακμών του $X$ το σύνολο

$$E_+(X) = \bigsqcup_{e \in O} G/G_e,$$

τα αριστερά σύμπλοκα των ομάδων ακμών στην $G$ (αυτό σημαίνει ότι για κάθε θετική ακμή αυτομάτως «επισυνάπτουμε» και την αντίστροφή της). Για $e \in O$, ορίζουμε απεικονίσεις αρχής και τέλους:

$$\alpha(gG_e) = gG_{\alpha(e)} \quad \text{και} \quad \tau(gG_e) = gt_eG_{\tau(e)}.$$

Η ομάδα $G$ δρα στο $X$ με πολλαπλασιασμό από αριστερά και οι σταθεροποιούσες είναι όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το γράφημα $X$ είναι συνεκτικό. Για κάθε ακμή $e$ του $T$, η ακμή $G_e$ ενώνει τις κορυφές $G_{\alpha(e)}$ και $G_{\tau(e)}$. Άρα για κάθε ζεύγος κορυφών της μορφής $G_v$, $G_u$ υπάρχει μονοπάτι που τις ενώνει. Εφόσον κορυφές της μορφής $G_v$ και $G_u$ συνδέονται μεταξύ τους (μέσω μονοπατιού), κάθε κορυφή της μορφής $gG_v$ με $g \in G_u$ συνδέεται με την $gG_u = G_u$. Στην περίπτωση που έχουμε κορυφή της μορφής $t_eG_v$, αυτή συνδέεται με την $t_eG_{\tau(e)}$ (αφού οι $v$ και $\tau(e)$ συνδέονται) η οποία με τη σειρά της συνδέεται μέσω της ακμής $G_e$ με την $G_{\alpha(e)}$. Η συνεκτικότητα του $X$ έπεται, επαγωγικά, από τα προηγούμενα επιχειρήματα και το γεγονός ότι οι ομάδες κορυφών και τα στοιχεία $t_e$ παράγουν την ομάδα $G$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το $X$ είναι δέντρο. Σημειώνουμε πρώτα ότι αν οι κορυφές $gG_u$ και $xG_v$ αποτελούν άκρα μιας ακμής του $X$, τότε οι κορυφές $u$ και $v$ είναι τα άκρα μιας ακμής $e \in O$ και $x = gg_0t_e^{\varepsilon}$, όπου $g_0 \in G_u$ και $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Συνεπώς, αν $\gamma$ είναι ένα κλειστό ανηγμένο μονοπάτι του $X$ με αρχή $G_{v_0}$, τότε η πρώτη κορυφή μετά την $v_0$ θα έχει τη μορφή $g_0t_{e_1}^{\varepsilon_1}G_{v_1}$, όπου $g_0 \in G_{v_0}$ και $v_1 = \tau(e_1^{\varepsilon_1})$, ενώ, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, η τελευταία κορυφή θα είναι ένα σύμπλοκο της μορφής

$$g_0t_{e_1}^{\varepsilon_1}g_1t_{e_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{n-1}t_{e_n}^{\varepsilon_n}G_{v_n},$$

όπου $g_i \in G_{v_i}$, $v_i = \tau(e_i^{\varepsilon_i})$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ και $v_n = v_0$. Συνεπώς, αφού η αρχή και το τέλος του $\gamma$ είναι $v_0$, υπάρχει $g_n \in G_{v_0}$ έτσι ώστε $g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 t_{e_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{n-1} t_{e_n}^{\varepsilon_n} g_n = 1$. Το μονοπάτι $\gamma$ περιέχει παλινδρόμηση αν και μόνο αν υπάρχει δείκτης $i$ για τον οποίο $v_i = v_{i+2}$ και

$$g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 \cdots g_{i-1} t_{e_i}^{\varepsilon_i} G_{v_i} = g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 \cdots t_{e_i}^{\varepsilon_i} g_i t_{e_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}} g_{i+1} t_{e_{i+2}}^{\varepsilon_{i+2}} G_{v_{i+2}},$$

ή ισοδύναμα,

$$G_{v_i} = g_i t_{e_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}} g_{i+1} t_{e_{i+2}}^{\varepsilon_{i+2}} G_{v_{i+2}}.$$

Αυτό όμως συμβαίνει μόνο όταν $e_{i+1} = e_{i+2}$, $\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_{i+2}$ και η έκφραση $t_{e_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}} g_{i+1} t_{e_{i+1}}^{-\varepsilon_{i+1}}$ δεν είναι ανηγμένη. Με άλλα λόγια, το μονοπάτι $\gamma$ είναι ανηγμένο αν και μόνο αν η λέξη $g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 t_{e_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{n-1} t_{e_n}^{\varepsilon_n} g_n$ (η οποία είναι τύπου $(e_1^{\varepsilon_1}, e_2^{\varepsilon_2}, \ldots, e_n^{\varepsilon_n})$) είναι ανηγμένη. Έτσι έχουμε μια ανηγμένη έκφραση που αναπαριστά το 1, άτοπο από το προηγούμενο λήμμα. Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το $X$ είναι δέντρο. Τέλος, είναι εύκολο να δειχθεί (και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη) ότι η απεικόνιση $X \to Y$ με $gG_x \mapsto x$, επάγει ισομορφισμό $X/G \cong Y$. □

Κλείνουμε το κεφάλαιο αποδεικνύοντας ότι οι πεπερασμένες ομάδες δεν επιδέχονται μη τετριμμένες διασπάσεις ως θεμελιώδεις ομάδες γραφημάτων ομάδων.

**Πρόταση 3.3.22.** *Κάθε πεπερασμένη ομάδα $G$ που δρα σε ένα δέντρο $X$, χωρίς αντιστροφές, σταθεροποιεί κορυφή.*

*Απόδειξη.* Έστω $v$ μια κορυφή του δέντρου. Εφόσον η $G$ είναι πεπερασμένη, η τροχιά $G \cdot v$ της κορυφής $v$ είναι πεπερασμένη και συνεπώς το σύνολο όλων των γεωδαισιακών μεταξύ κορυφών της τροχιάς $G \cdot v$ αποτελεί ένα πεπερασμένο υποδέντρο $T$ του $X$. Είναι άμεσο από τους ορισμούς, ότι η εικόνα $g \cdot \gamma$ μιας γεωδαισιακής $\gamma$ υπό τη δράση ενός στοιχείου $g \in G$ είναι γεωδαισιακή. Αφού η $G$ μεταθέτει τις κορυφές της τροχιάς της $v$, μεταθέτει και τις γεωδαισιακές που τις ενώνουν και έτσι το $T$ παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση της $G$. Δηλαδή, η $G$ δρα (χωρίς αντιστροφές) επί του πεπερασμένου δέντρου $T$. Αν το $T$ αποτελείται από μια μόνο κορυφή (ή ακμή), τότε αυτή σταθεροποιείται. Διαφορετικά, αφού $T$ πεπερασμένο δέντρο, υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή η οποία αποτελεί άκρο μόνο μιας γεωμετρικής ακμής (ισοδύναμα, είναι το τέλος μιας μόνο ακμής). Το σύνολο $T'$ των κορυφών με αυτή την ιδιότητα και των αντίστοιχων ακμών (που κάθε μια έχει τέλος στο $T'$), παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση της $G$. Αφαιρώντας αυτές τις κορυφές και τις αντίστοιχες ακμές (με τις αντίστροφες τους) προκύπτει υποδέντρο του $T$ με λιγότερες κορυφές (και ακμές) επί του οποίου η $G$ δρα και το συμπέρασμα έπεται επαγωγικά. □

**Πόρισμα 3.3.23.** *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα μιας ομάδας που δρα σε δέντρο (χωρίς αντιστροφές) περιέχεται σε σταθεροποιούσα κορυφής.*

**Πόρισμα 3.3.24.** *Έστω $G = A*_H B$ (αντίστοιχα, $G = \Gamma*_H$). Κάθε πεπερασμένη υποομάδα $K$ της $G$ περιέχεται σε συζυγές $gAg^{-1}$ της $A$ ή σε συζυγές $gBg^{-1}$ της $B$ (αντίστοιχα, σε συζυγές της $\Gamma$).*

*Απόδειξη.* Έχουμε δει ότι κάθε ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $A *_H B$ (αντίστοιχα, κάθε HNN επέκταση $\Gamma*_H$) δρα επί ενός δέντρου, χωρίς αντιστροφές, με σταθεροποιούσες κορυφών τα συζυγή των $A$, $B$ (αντίστοιχα, τα συζυγή της βάσης $\Gamma$). □

# Ασκήσεις

3.1 Έστω $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια απεικόνιση με την ιδιότητα $\varphi(m+n) \leq \varphi(m)+\varphi(n)$ για κάθε ζεύγος $m, n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n}$. [Υπόδειξη: Σταθεροποιήστε $d > 0$ και για το τυχαίο $n$ διαιρέστε $n = qd + r$, $0 \leq r < d$, προκειμένου να αποδείξετε ότι $\limsup_n \frac{\varphi(n)}{n} = \liminf_n \frac{\varphi(n)}{n}$.]

3.2 Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και $S$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $G$. Για κάθε $g \in G$, ορίζουμε $\|g\|_S = d_S(1, g)$ να είναι η απόσταση του στοιχείου $g$ από το 1 στο γράφημα Cayley $\Gamma(G, S)$ της $G$ ως προς το $S$. Τότε $\|gh\|_S \leq \|g\|_S + \|h\|_S$ για κάθε $g, h \in G$.

   (i) Να δειχθεί ότι υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\|g^n\|_S}{n}$, το οποίο συμβολίζεται με $\tau_{G,S}(g) = \tau(g)$ και ονομάζεται (αλγεβρικό) **μήκος μετατόπισης** του $g$.

   (ii) Αν το $g$ είναι στοιχείο πεπερασμένης τάξης, τότε $\tau(g) = 0$.

   (iii) $\tau(g) = \tau(xgx^{-1})$, για κάθε $g, x \in G$ και $\tau(g^m) = |m|\tau(g)$.

   (iv) $\tau(g) \leq \inf\{d_S(gv, v) \mid v \text{ κορυφή του } \Gamma(G, S)\}$.

   (v) Να υπολογισθεί το $\tau(g)$ στην περίπτωση που η $G$ είναι ελεύθερη ομάδα $F$ και $S$ βάση της $F$.

   (vi) Να υπολογιστεί το μήκος μετατόπισης $\tau(g)$, αν $G = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ και $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, όπου $s_i$ γεννήτορας του $i$ παράγοντα.

(vii) Να υπολογιστεί το $\tau(g)$ (συναρτήσει των $\tau_{G_i,S_i}$), αν $G = G_1 * \cdots * G_n$, όπου κάθε παράγοντας $G_i$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, $S_i$ πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $G_i$ και $S = \cup_{i=1}^n S_i$.

3.3 Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και $S$, $T$ δύο πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων της $G$. Αποδείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $\nu$, έτσι ώστε

$$\frac{1}{\nu}\|g\|_S \leq \|g\|_T \leq \nu\|g\|_S$$

για κάθε $g \in G$, όπου $\|g\|_S = d_S(1,g)$ (αντίστοιχα, $\|g\|_T$) είναι η απόσταση του στοιχείου $g$ από το $1$ στο γράφημα Cayley $\Gamma(G,S)$ (αντίστοιχα, $\Gamma(G,T)$) της $G$ ως προς το $S$ (αντίστοιχα, $T$). Άρα, μπορεί το μήκος μετατόπισης να εξαρτάται από το σύνολο γεννητόρων που θα επιλεγεί, όμως η θετικότητα του μήκους μετατόπισης ενός στοιχείου είναι ανεξάρτητη από το σύνολο γεννητόρων.

3.4 Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα σε ένα δέντρο $X$ χωρίς αντιστροφές. Αν υπάρχει τροχιά κορυφών με φραγμένη διάμετρο, τότε η $G$ σταθεροποιεί κορυφή $v$ του $X$, δηλ. $gv = v$ για κάθε $g \in G$.

3.5 Υποθέτουμε ότι μια ομάδα $G$ δρα με ισομετρίες και χωρίς αντιστροφές επί ενός δέντρου $X$. Αν η $H$ είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη της $G$ η οποία σταθεροποιεί κορυφή, τότε και η $G$ σταθεροποιεί κορυφή.

3.6 Έστω $H$ υποομάδα της $G = G_1 *_A G_2$. Υποθέτουμε ότι $G = A \cdot H$. Έστω $B = A \cap H$ και $H_i = G_i \cap H$ για $i = 1, 2$. Αποδείξτε ότι η $H$ παράγεται από τις $H_1$ και $H_2$ και είναι ισόμορφη με $H_1 *_B H_2$.

3.7 Έστω $G = G_1 *_N G_2$. Υποθέτουμε ότι το αμάλγαμα $N$ (για την ακρίβεια τα αντίτυπά του στους παράγοντες) είναι κανονική υποομάδα σε κάθε παράγοντα $G_1$, $G_2$ (και άρα $N \trianglelefteq G$). Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας κατάλληλη δράση σε δέντρο, ότι $G/N \cong G_1/N * G_2/N$.

3.8 Έστω $G$, $A$, $B$ ομάδες και $\phi : G \to A * B$ ένας επιμορφισμός. Αποδείξτε ότι $G = \phi^{-1}(A) *_K \phi^{-1}(B)$, όπου $K = \mathrm{Ker}\phi$.

3.9 Έστω $G_1, \ldots, G_n$ μια πεπερασμένη οικογένεια ομάδων. Αποδείξτε ότι ο πυρήνας του φυσικού επιμορφισμού

$$\varphi : G_1 * \cdots * G_n \to G_1 \times \cdots \times G_n\,,$$

που επάγεται από τις απεικονίσεις $G_i \to G_i$ με $g_i \mapsto g_i$, είναι ελεύθερη ομάδα.

3.10 Αποδείξτε ότι $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 *_{D_2} D_6$, όπου με $D_n$ συμβολίζουμε τη διεδρική ομάδα τάξεως $2n$.

3.11 Θεωρούμε τις κυκλικές ομάδες $\mathbb{Z}_4 = \langle \alpha \rangle$, $\mathbb{Z}_6 = \langle \beta \rangle$ και $\mathbb{Z}_{12} = \langle g \rangle$ με τάξεις $4$, $6$ και $12$, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση με $\alpha \mapsto g^3$ και $\beta \mapsto g^2$ επάγει επιμορφισμό

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$$

του οποίου ο πυρήνας είναι ελεύθερη τάξεως $2$. Αποδείξτε, επίσης, ότι ο πυρήνας $\ker \varphi$ είναι η παράγωγος υποομάδα της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3.12 Έστω $G$ μια ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$ πεπερασμένου δείκτη. Αν η $G$ έχει σύνολο γεννητόρων με $n$ το πλήθος στοιχεία, τότε η $H$ μπορεί να παραχθεί από $(n-1)[G:H]+1$ το πλήθος στοιχεία.

# Βιβλιογραφία

[1] G. Baumslag. Topics in Combinatorial Group Theory, Lectures in Mathematics (ETH Zurich), Birkhauser, 1993.

[2] O. Bogopolski. Introduction to Group Theory, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2008

[3] D. E. Cohen. Combinatorial Group Theory: A Topological Approach, London Mathematical Society Student Texts 14, Cambridge, 1989.

[4] W. Dicks and M. Dunwoody. Groups Acting on Graphs, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] J.-P. Serre. Trees, Corrected 2nd printing, Springer-Verlag, Berlin 2003.

[6] P. Shalen. Representations of 3-manifold groups, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 955–1044.

# Κεφάλαιο 4

# Επιπλέον Ιδιότητες των Ελευθέρων Ομάδων και Ελευθέρων Γινομένων

**Περιεχόμενα**



Χρησιμοποιώντας τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετούμε υποομάδες ελευθέρων γινομένων και αναλύσεις ομάδων σε ελεύθερα γινόμενα. Εισάγουμε, επίσης, τις έννοιες του ελαχιστικού αναλλοίωτου υποδέντρου μιας δράσης και της δίπλωσης ακμών με τη βοήθεια των οποίων παρουσιάζουμε, μεταξύ άλλων, μια απόδειξη της εικασίας της Hanna Neumann και μια απόδειξη του θεωρήματος του Grushko.

## 4.1 Ισομετρίες Δέντρων

Στην παρούσα ενότητα επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «ισομετρία» αντί του «αυτομορφισμού» γραφήματος, εξαιτίας της ύπαρξης αναλογιών των ιδιοτήτων που θα αποδείξουμε με ιδιότητες ισομετριών υπερβολικών χώρων. Έτσι οι δράσεις ομάδων σε γραφήματα είναι δράσεις μέσω ισομετριών, όπου κάθε γράφημα είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική. Στα επόμενα, λοιπόν, Ισομετρία σημαίνει αυτομορφισμός γραφήματος που δεν είναι αντιστροφή.

**Ορισμός 4.1.1.** Έστω $X$ ένα δέντρο και $\varphi$ μια ισομετρία του $X$. Το (γεωμετρικό) **μήκος μετατόπισης** $\ell(\varphi)$ είναι ο αριθμός

$$\ell(\varphi) = \min\big\{d\big(x, \varphi(x)\big) \ : \ x \in V(X)\big\} \geq 0.$$

Αν $\ell(\varphi) = 0$, η ισομετρία $\varphi$ λέγεται **ελλειπτική**, διαφορετικά λέγεται **υπερβολική**.

Παρατηρούμε ότι το minimum στον παραπάνω ορισμό επιτυγχάνεται, επειδή οι τιμές της μετρικής αποτελούν διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $X_\varphi = \big\{x \in V(X) \ : \ d\big(x, \varphi(x)\big) = \ell(\varphi)\big\}$. Είναι άμεσο ότι $\ell(\varphi) = 0$ αν και μόνο αν η $\varphi$ σταθεροποιεί κορυφή και σε αυτήν την περίπτωση το $X_\varphi$ αποτελείται από τις κορυφές που σταθεροποιούνται από την ισομετρία. Αν η ισομετρία είναι υπερβολική, δηλαδή $\ell(\varphi) > 0$, τότε, όπως θα δούμε στη συνέχεια, το $X_\varphi$ είναι το σύνολο κορυφών ενός άπειρα διπλού μονοπατιού, το οποίο ονομάζεται **άξονας** της $\varphi$ και συμβολίζεται με $A_\varphi$. Με τον όρο άπειρα διπλό μονοπάτι, εννοούμε ένα γράφημα ισόμορφο με το γράφημα Cayley $\Gamma(\mathbb{Z}, 1)$ άπειρης κυκλικής ως προς τον γεννήτορά της:



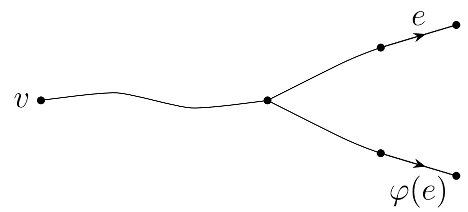
Με άλλα λόγια, ένα διπλά άπειρο μονοπάτι είναι ένα γράφημα του οποίου η γεωμετρική αναπαράσταση είναι χώρος ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}$.


**Σχήμα 4.1:** *Ακμή δέντρου που μεταφέρεται από ισομετρία $\varphi$.*

Λέμε ότι η ισομετρία $\varphi$ του δέντρου $X$ **μεταφέρει** την ακμή $e$ του $X$, αν

$$d\big(\alpha(e), \varphi(\alpha(e))\big) = d = \big(\tau(e), \varphi(\tau(e))\big).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε ισομετρία $\varphi$ που σταθεροποιεί κορυφή $v$ δεν μεταφέρει ακμή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Άρα οι ακμές που μεταφέρονται, μεταφέρονται μόνο από υπερβολικές ισομετρίες.




**Παρατήρηση 4.1.2.** Υποθέτουμε ότι μια ομάδα $G$ δρα επί ενός δέντρου $X$ (με ισομετρίες χωρίς αντιστροφές). Αν μια ακμή $e$ του $X$ μεταφέρεται από ένα στοιχείο $g \in G$, τότε για κάθε $h \in G$ η ακμή $he$ μεταφέρεται από το στοιχείο $hgh^{-1}$, αφού

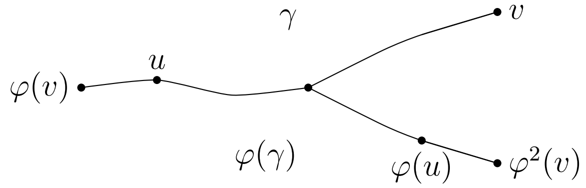
$$\begin{aligned} d\big(\alpha(he), hgh^{-1}(\alpha(he))\big) &= d\big(h\alpha(e), hgh^{-1}h\alpha(e)\big) = d\big(h\alpha(e), hgh^{-1}h\alpha(e)\big) \\ &= d\big(\alpha(e), g\alpha(e)\big) = d\big(\tau(e), g\tau(e)\big) = \cdots = \\ &= d\big(\tau(he), hgh^{-1}(\tau(he))\big). \end{aligned}$$

Δηλαδή, το σύνολο των ακμών του $X$ που μεταφέρονται από τα στοιχεία της $G$ είναι $G$-αναλλοίωτο.

**Πρόταση 4.1.3.** *Έστω $\varphi$ μια ισομετρία ενός δέντρου $X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\varphi$ δεν σταθεροποιεί κορυφή του $X$.*
2. *Η $\varphi$ μεταφέρει ακμή.*
3. *Οι κορυφές του $X_\varphi$ ορίζουν ένα διπλά άπειρο μονοπάτι, το οποίο συμβολίζουμε με $A_\varphi$, επί του οποίου η $\varphi$ δρα με μετατοπίσεις μήκους $\ell(\varphi)$. Επιπλέον, κάθε υποδέντρο του $X$ αναλλοίωτο από την ισομετρία $\varphi$ περιέχει το $A_\varphi$.*

*Απόδειξη.* (1) $\Rightarrow$ (3). Εφόσον η ισομετρία $\varphi$ δεν σταθεροποιεί κορυφή, έχουμε ότι $\ell(\varphi) > 0$. Έστω $v \in X_\varphi$ και $\gamma = [v, \varphi(v)]$ η γεωδαισιακή από την κορυφή $v$ στην εικόνα της $\varphi(v)$, η οποία έχει μήκος $\ell(\varphi) > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι οι γεωδαισιακές $\gamma$ και $\varphi(\gamma)$ έχουν μόνο μια κοινή κορυφή, την $\varphi(v)$. Πράγματι, αν όχι, τότε επιλέγουμε κορυφή $u$, όπως στο παρακάτω σχήμα και παρατηρούμε ότι $d\big(u, \varphi(u)\big) < d\big(\varphi(v), \varphi^2(v)\big) = d\big(v, \varphi(v)\big) = \ell(\varphi)$, το οποίο αντιφάσκει στην επιλογή της κορυφής $v$.



Έπεται ότι η ένωση $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(\gamma)$ είναι ισόμορφη με ένα διπλά άπειρο μονοπάτι και έτσι η γεωμετρική αναπαράστασή της είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}$. Δείχνουμε, στη συνέχεια, ότι η ένωση αυτή ισούται με το υποδέντρο $A_\varphi$. Έστω $u$ κορυφή του $X$ και $u'$ η προβολή της $u$ στην ένωση $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(\gamma)$ (δηλαδή, η $u'$ είναι η κορυφή της ένωσης που απέχει ελάχιστη απόσταση από την $u$).


Τότε η $\varphi(u')$ είναι η προβολή της $\varphi(u)$ και

$$d\big(u,\varphi(u)\big) = 2d(u,u') + \ell(\varphi).$$

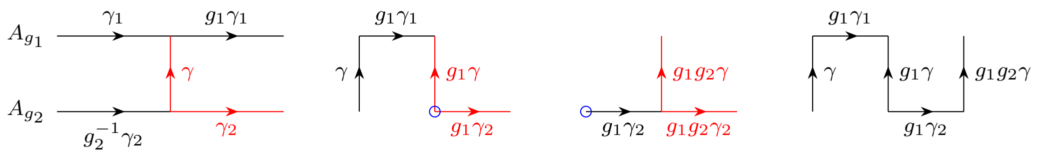
Συνεπώς, $u \in A_\varphi$ αν και μόνο αν $u = u' \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(\gamma)$. Δηλαδή, $A_\varphi = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(\gamma)$. Τέλος, αν $\varphi(X_1) \subseteq X_1$, όπου $X_1$ ένα υποδέντρο του $X$ και $u$ κορυφή του $X_1$, τότε $\varphi(u) \in X_1$ και έτσι η γεωδαισιακή $[u,\varphi(u)]$, με άκρα τις κορυφές $u,\varphi(u)$, περιέχεται στο $X_1$. Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος διαπιστώνουμε ότι $[u',\varphi(u')] \subseteq X_1$ και έτσι $A_\varphi \subseteq X_1$. Οι συνεπαγωγές $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$, έπονται άμεσα από τους ορισμούς. $\square$

**Παρατήρηση 4.1.4.** Από την προηγούμενη απόδειξη, έπεται επίσης ότι ο άξονας μιας υπερβολικής ισομετρίας, αποτελείται από τις ακμές που μεταφέρονται από την ισομετρία αυτή.

**Πρόταση 4.1.5.** *Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα (με ισομετρίες) επί ενός δέντρου $X$. Υποθέτουμε ότι η $G$ περιέχει υπερβολικά στοιχεία ως προς τη δράση. Τότε υπάρχει μοναδικό ελαχιστικό υποδέντρο $X'$ του $X$ αναλλοίωτο από τη δράση της $G$ (είναι δηλαδή $G$-υποδέντρο). Αν επιπλέον, η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε το γράφημα πηλίκο $X'/G$ είναι πεπερασμένο.*

Το $X'$ συμβολίζεται συνήθως με $X_G$ και ονομάζεται το **ελαχιστικό αναλλοίωτο υποδέντρο** που αντιστοιχεί στην $G$.

*Απόδειξη.* Από την προηγούμενη πρόταση, κάθε $G$-υποδέντρο του $X$ θα περιέχει τους άξονες των υπερβολικών στοιχείων. Θεωρούμε, λοιπόν, την ένωση $X'$ των αξόνων των υπερβολικών στοιχείων της $G$ (ισοδύναμα το υπογράφημα που αποτελείται από τις ακμές που μεταφέρονται από τα στοιχεία της $G$). Από υπόθεση το $X'$ είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το $X'$ είναι συνεκτικό και άρα υποδέντρο. Έστω $A_{g_1}$ και $A_{g_2}$ οι άξονες δύο υπερβολικών στοιχείων $g_1$ και $g_2$ της $G$, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με $\gamma$ τη γεωδαισιακή η οποία ενώνει τους άξονες $A_{g_1}$ και $A_{g_2}$ (δηλαδή, τα άκρα της ελαχιστοποιούν την απόσταση των κορυφών του πρώτου άξονα από τις κορυφές του δευτέρου). Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακμή της $\gamma$ ανήκει στο $X'$. Αν η $\gamma$ είναι κορυφή, δεν υπάρχει κάτι να δειχθεί. Αντικαθιστώντας τα στοιχεία $g_1$ και $g_2$ με τα αντίστροφά τους αν χρειασθεί, μπορούμε να επιλέξουμε γεωδαισιακές $\gamma_1$ και $\gamma_2$ στους άξονες $A_{g_1}$ και $A_{g_2}$, αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει ότι κάθε ακμή της $\gamma$ μεταφέρεται από το γινόμενο $g_1g_2$ και έτσι $\gamma \subseteq X'$.




Το $X'$ είναι $G$-υποδέντρο του $X$, αφού, από την Παρατήρηση 4.1.2 το σύνολο των ακμών που μεταφέρονται από τα στοιχεία της $G$ είναι $G$-αναλλοίωτο. Επίσης, αφού κάθε $G$-υποδέντρο του $X$ περιέχει τους άξονες των υπερβολικών στοιχείων, έπεται ότι το $X'$ περιέχεται σε κάθε $G$-υποδέντρο του $X$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και έστω $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της $G$. Έστω $v$ κορυφή του $X'$ και $Y$ το υποδέντρο του $X'$ που παράγεται από τις κορυφές (που έχει ως σύνολο κορυφών) $v, s_1v, \ldots, s_kv$. Εφόσον η τομή $Y \cap s_iY$ είναι μη κενή (περιέχει την κορυφή $s_iv$), για κάθε $i = 1, \ldots, k$, και το $S$ είναι σύνολο γεννητόρων της $G$, συμπεραίνουμε ότι η ένωση $\bigcup_{g\in G} gY$ αποτελεί συνεκτικό $G$-υπογράφημα του $X$. Από την ελαχιστικότητα του $X'$, έχουμε ότι $X' = \bigcup_{g\in G} gY$, ενώ το γράφημα πηλίκο $X'/G$ είναι πεπερασμένο, γιατί το $Y$ είναι πεπερασμένο. □

**Παρατήρηση 4.1.6.** Μπορεί να δειχθεί ότι το υποδέντρο $X_G$ είναι ένα είδος «πυρήνα» της δράσης της $G$ σε όλο το $X$, υπό την έννοια ότι το γράφημα ομάδων που αντιστοιχεί στο $G$-δέντρο $X_G$ περιέχει όλες τις ομαδοθεωρητικές πληροφορίες που κωδικοποιούνται μέσα στο γράφημα ομάδων που αντιστοιχεί στο $G$-δέντρο $X$. Υπενθυμίζουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα καθενός από αυτά τα δύο γραφήματα ομάδων είναι ισόμορφη με την $G$.

Ιδιαιτέρως, αν η $G$ είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα η οποία είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$, τότε μπορούμε να υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το γράφημα $Y$ είναι πεπερασμένο, θεωρώντας τη δράση της $G$ στο αντίστοιχο καθολικό δέντρο $X$ και αντικαθιστώντας το με το ελαχιστικό αναλλοίωτο υποδέντρο $X_G$. Με άλλα λόγια, αντικαθιστούμε το γράφημα πηλίκο $Y$ με το πεπερασμένο $X_G/G$.

Ως μια πρώτη εφαρμογή των προηγούμενων αποδεικνύουμε το θεώρημα του Howson.

**Θεώρημα 4.1.7** (Howson)**.** *Έστω $A$, $B$ δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες μιας ελεύθερης ομάδας $F$. Τότε η τομή τους $A \cap B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

*Απόδειξη.* Εφόσον η $F$ είναι ελεύθερη, υπάρχει δέντρο $X$ επί του οποίου η $F$ δρα ελεύθερα (χωρίς αντιστροφές). Οι $A$, $B$ και $A \cap B$ δρουν (δια του περιορισμού της δράσης) επίσης στο $X$ ως υποομάδες της $F$. Αν μία από τις $A$, $B$, $A \cap B$ δεν περιέχει υπερβολικά στοιχεία, τότε κάθε στοιχείο της θα σταθεροποιεί κορυφή, οπότε θα είναι τετριμμένη και έτσι $A \cap B = \{1\}$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A \cap B \neq \{1\}$ και άρα οι υποομάδες $A$, $B$ και $A \cap B$ περιέχουν υπερβολικά στοιχεία ως προς τη δράση τους στο $X$. Έστω $X_A$, $X_B$ και $X_{A\cap B}$ τα ελαχιστικά αναλλοίωτα υποδέντρα που αντιστοιχούν στις υποομάδες $A$, $B$ και $A \cap B$, αντίστοιχα. Είναι άμεσο ότι $X_{A\cap B} \subseteq X_A,\ X_B$. Επίσης, τα γραφήματα πηλίκο $X_A/A$ και $X_B/B$ είναι πεπερασμένα, αφού οι $A$, $B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες. Θεωρούμε την (καλά ορισμένη) απεικόνιση

$$\varphi : X_{A\cap B}/A \cap B \to X_A/A \times X_B/B \quad \text{με} \quad [x]_{A\cap B} \mapsto \big([x]_A, [x]_B\big)$$

και παρατηρούμε ότι είναι $1-1$: αν $\big([x]_A, [x]_B\big) = \big([y]_A, [y]_B\big)$, τότε υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, έτσι ώστε $x = \alpha \cdot y$ και $x = \beta \cdot y$. Άρα $\alpha y = \beta y$ και συνεπώς $\alpha = \beta \in A \cap B$, αφού η δράση είναι ελεύθερη. Αυτό σημαίνει ότι τα $x$, $y$ ανήκουν στην ίδια τροχιά υπό τη δράση της τομής, δηλαδή, $[x]_{A\cap B} = [y]_{A\cap B}$.

Εφόσον τα $X_A/A$ και $X_B/B$ είναι πεπερασμένα, έπεται ότι και το γράφημα πηλίκο $X_{A\cap B}/A \cap B$ είναι πεπερασμένο. Από το θεώρημα δομής (για ομάδες που δρουν σε δέντρα) η τομή $A \cap B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη (ελεύθερη επί των γεωμετρικών ακμών εκτός μεγιστικού δέντρου του $X_{A\cap B}/A \cap B$). □

Ο Howson έδωσε επίσης άνω φράγματα για την τάξη της τομής $A \cap B$ συναρτήσει των τάξεων των $A$,$B$.

Ως μια δεύτερη εφαρμογή των ελαχιστικών αναλλοίωτων υποδέντρων αποδεικνύουμε το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 4.1.8.** *Αν η $F$ είναι μια ελεύθερη ομάδα και η $N \neq 1$ μια πεπερασμένα παραγόμενη κανονική υποομάδα της $F$, τότε ο δείκτης $[F : N]$ της $N$ στην $F$ είναι πεπερασμένος.*

*Απόδειξη.* Έστω $X$ το γράφημα (δέντρο) Cayley της $F$ ως προς ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων. Εφόσον η $N$ είναι μη τετριμμένη, περιέχει υπερβολικά στοιχεία και $X_N = X_F = X$ (βλ. Άσκηση 1). Θεωρούμε τον επιμορφισμό γραφημάτων $\pi : X/N \to X/F$ που απεικονίζει κάθε $N$-τροχιά στην αντίστοιχη $F$-τροχιά, δηλαδή $[x]_N \mapsto [x]_F$, όπου $x$ κορυφή ή ακμή. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος των Nielsen-Schreier, η υποομάδα $N$, δρώντας στο $X$, διαμερίζει κάθε $F$-τροχιά (κορυφών ή ακμών) σε $[F : N]$ το πλήθος $N$-τροχιές. Με άλλα λόγια, η αντίστροφη εικόνα μέσω της $\pi$ κάθε μονοσυνόλου αποτελείται από $[F : N]$ το πλήθος στοιχεία. Όμως το γράφημα πηλίκο $X/N$ είναι πεπερασμένο, αφού η $N$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και συνεπώς ο δείκτης $[F : N]$ είναι πεπερασμένος. □

## 4.2 Η Εικασία της Hanna Neumann

Η **ανηγμένη τάξη** μιας ελεύθερης ομάδας $A$ είναι ο αριθμός $\overline{A} = \max\{0, \text{rank}(A) - 1\}$. Έστω $H$, $K$ δύο υποομάδες μιας ελεύθερης ομάδας $F$. Το 1956 η Hanna Neumann απέδειξε ότι

$$\overline{r}(H \cap K) \leq 2 \cdot \overline{r}(H) \cdot \overline{r}(K)$$

και είκασε ότι το 2 μπορεί να αντικατασταθεί από το 1. Έπειτα από πολλές προσπάθειες διάφορων μαθηματικών, η εικασία αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Mineyev [7] και Friedman [6].

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να παρουσιάσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή της απόδειξης του Mineyev που οφείλεται στον Dicks [3]. Αν μια από τις $H$, $K$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε η ανηγμένη τάξη της απειρίζεται και η ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο και αυτός είναι ο λόγος που περιοριζόμαστε σε πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες $H$, $K$. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και η $F$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, αντικαθιστώντας την με την υποομάδα $\langle H \cup K \rangle$ που παράγεται από την ένωση των $H$, $K$.

Το κλειδί στην απόδειξη του Mineyev είναι το ακόλουθο κλασικό θεώρημα το οποίο μνημονεύουμε χωρίς απόδειξη:

**Θεώρημα 4.2.1.** *Κάθε ελεύθερη ομάδα είναι αριστερά διατάξιμη.*

Για μια απόδειξη παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [5] όπου δίνεται μια δεντρολογική απόδειξη ενός γενικότερου θεωρήματος: το ελεύθερο γινόμενο αριστερά διατάξιμων ομάδων είναι αριστερά διατάξιμη ομάδα.

Λέμε ότι μια ομάδα $G$ είναι **αριστερά διατάξιμη**, αν επιδέχεται μια ολική (γραμμική) διάταξη $<$ η οποία είναι **αριστερά αναλλοίωτη** με την εξής έννοια: $g < h \Rightarrow xg < xh$ για κάθε $g, h, x \in G$. Ανάλογα ορίζεται και η έννοια μιας δεξιά διατάξιμης ομάδας. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια αριστερά αναλλοίωτη διάταξη $<$ της $G$ ορίζει μια δεξιά αναλλοίωτη διάταξη $\prec$ και αντίστροφα, ως εξής: $g \prec h \Leftrightarrow h^{-1} < g^{-1}$. Έτσι η κλάση των αριστερά διατάξιμων ομάδων ταυτίζεται με την κλάση των δεξιά διατάξιμων ομάδων. Είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι μια αριστερά διατάξιμη ομάδα δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης εκτός από το τετριμμένο. Εκτός από τις ελεύθερες ομάδες, παραδείγματα αριστερά διατάξιμων ομάδων αποτελούν οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών με μόνη εξαίρεση το προβολικό επίπεδο.

Για τη συνέχεια, η $F$ θα είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα, η οποία δρα ελεύθερα επί ενός δέντρου $T$ (π.χ. το γράφημα Cayley ως προς μια βάση) με πεπερασμένο γράφημα πηλίκο $T/F$. Χρησιμοποιούμε μια αριστερά αναλλοίωτη διάταξη $<$ της $F$ για να ορίσουμε μια διάταξη στις ακμές του $T$. Έστω $e_1, \ldots, e_n$ ένα σύνολο αντιπροσώπων τροχιών ακμών της δράσης. Δηλαδή, διαφορετικές ακμές $e_i$, $e_j$ ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές και κάθε ακμή ανήκει στην τροχιά $[e_i]$ της ακμής $e_i$, για κάποιο $i = 1, \ldots, n$. Έτσι $E(T)/F = \{[e_1], \ldots, [e_n]\}$. Εφόσον η δράση είναι ελεύθερη, η απεικόνιση

$$\psi : \big(E(T)/F\big) \times F \to E(T) \quad \text{με} \quad \big([e_i], g\big) \mapsto ge_i$$

είναι $1 - 1$ και επί. Συνεπώς, αν διατάξουμε το $\big(E(T)/F\big) \times F$, τότε διατάσσεται και το $E(T)$. Διατάσσουμε το $\big(E(T)/F\big) \times F$ λεξικογραφικά: $\big([e_i], g\big) \preceq \big([e_g], x\big)$ αν $i \leq j$ ή $i = j$ και $g \leq x$ (αυτό σημαίνει ότι $g < x$ ή $g = x$). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η επαγόμενη διάταξη, για την οποία χρησιμοποιούμε πάλι το σύμβολο $\leq$, στο σύνολο $E(T)$ είναι αναλλοίωτη από τη δράση της $F$. Πράγματι, έστω $e \leq e'$. Τότε $e = ge_i$, $e' = xe_j$, για κάποια $g, x \in G$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και είτε $i \leq j$ είτε $i = j$ και $g \leq x$. Αν $h \in F$, τότε $he = hge_i$, $he' = hxe_j$ και προκύπτει ότι $he \leq he'$, αφού η διάταξη στην $F$ είναι αριστερά αναλλοίωτη. Από δω και στο εξής σταθεροποιούμε και χρησιμοποιούμε αυτή τη διάταξη στις ακμές του $T$.

## Δέντρα του Dicks

Έστω $T'$ ένα υποδέντρο του $T$. Μια ακμή $e$ του $T'$ λέγεται $T'$-**γέφυρα**, αν υπάρχει διπλά άπειρο μονοπάτι του $T'$ που την περιέχει και στο οποίο είναι η μέγιστη ακμή (με τη διάταξη που ορίσθηκε πριν).

Αν η $H$ είναι μια μη τετριμμένη υποομάδα της $F$, τότε μια ακμή $e$ λέγεται $H$-**γέφυρα**, αν είναι $T_H$-γέφυρα, όπου $T_H$ είναι το ελαχιστικό αναλλοίωτο υποδέντρο της $H$ (η $H$ περιέχει υπερβολικά στοιχεία, αφού είναι μη τετριμμένη). Σημειώνουμε ότι η $H$ δρα (ελεύθερα) επί του συνόλου των $H$-γεφυρών. Πράγματι, αν η $e$ είναι $H$-γέφυρα και το $\gamma_\infty$ διπλά άπειρο μονοπάτι του $T_H$ με την $e$ μέγιστη ακμή, τότε η $he$ είναι η μέγιστη ακμή του διπλά άπειρου μονοπατιού $h\gamma_\infty$ του $T_H$ για κάθε $h \in H$. Επίσης, αν τα $T_0$, $T_1$ είναι δύο υποδέντρα του $T$ με $T_0 \subseteq T_1$, τότε κάθε $T_0$-γέφυρα είναι και $T_1$-γέφυρα. Συνεπώς, αν οι $H, K$ είναι δύο μη τετριμμένες (για να έχουν υπερβολικά στοιχεία) υποομάδες της $F$, τότε κάθε $H \cap K$-γέφυρα είναι ταυτόχρονα $H$-γέφυρα και $K$-γέφυρα.

Οι συνιστώσες που προκύπτουν από το $T_H$, όπου $\{1\} \neq H \leq F$, αφαιρώντας όλες τις $H$-γέφυρες, λέγονται $H$-**νησιά**. Το **δέντρο του Dicks** $DT_H$, είναι το $H$-δέντρο του οποίου οι κορυφές είναι τα $H$-νησιά (δηλαδή, θεωρούμε κάθε συνιστώσα ως μια κορυφή) και οι ακμές είναι οι $H$-γέφυρες. Το δέντρο του Dicks είναι $H$-δέντρο, γιατί η $H$ μεταθέτει τις $H$-γέφυρες και άρα και τις συνιστώσες του συμπληρώματός τους (που είναι τα $H$-νησιά). Η σταθεροποιούσα ενός $H$-νησιού $v$ ως προς τη δράση της $H$ στο δέντρο του Dicks ταυτίζεται με τη σταθεροποιούσα της συνιστώσας $v$ ως προς τη δράση της $H$ στο $T_H$, δηλαδή $H_v = \{h \in H : h(v) = v\} = \{h \in H : h(v) \cap v \neq \emptyset\}$.

**Λήμμα 4.2.2.** *Έστω $H \neq \{1\}$ μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $F$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $H$-νησί $v$ στο $T_H$, η σταθεροποιούσα $H_v$ είναι άπειρη κυκλική. Τότε η ανηγμένη τάξη $\overline{r}(H)$ της $H$ ισούται με το πλήθος $|E^+(DT_H/H)|$ των γεωμετρικών ακμών του γραφήματος πηλίκο $DT_H/H$.*

*Απόδειξη.* Η υποομάδα δρα στο δέντρο του Dicks $DT_H$ με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών. Άρα, από το θεώρημα δομής, έχει μια ανάλυση $H = *H_v * F$, όπου οι ομάδες $H_v$ είναι σταθεροποιούσες κάποιων νησιών, μία για κάθε κορυφή του $DT_H/H$, και η $F$ ελεύθερη με τάξη ίση με το πλήθος των γεωμετρικών ακμών του $DT_H/H$ εκτός μεγιστικού δέντρου. Συνεπώς,

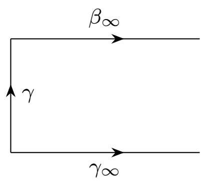
$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(H) &= \textstyle\sum_v \mathrm{rank}(H_v) + \mathrm{rank}(F) = \sum_v 1 + \mathrm{rank}(F) \\ &= \big|V(DT_H/H)\big| + \big|E^+(DT_H/H)\big| - \big|V(DT_H/H)\big| + 1)\big| \end{aligned}$$

και έτσι $\operatorname{rank}(H) - 1 = \left|E^+(DT_H/H)\right|$. □

**Λήμμα 4.2.3.** *Έστω $H$ μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $F$ με rank$(H) \geq 2$. Τότε υπάρχει $H$-γέφυρα στο $T_H$.*

*Απόδειξη.* Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της $H$ είναι υπερβολικό, αφού η δράση είναι ελεύθερη. Αν το $T_H$ είναι ένα διπλά άπειρο μονοπάτι, τότε η $H$ δρα ελεύθερα επί αυτού και άρα $H \cong \mathbb{Z}$ (βλ. Άσκηση 4), το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $\operatorname{rank}(H) \geq 2$. Έπεται ότι υπάρχουν δύο υπερβολικά στοιχεία $g$ και $h$ της $H$ με διαφορετικούς άξονες $A_g \neq A_h$. Η τομή των αξόνων $A_g \cap A_h$ δεν μπορεί είναι μια άπειρη ακτίνα (δηλαδή, το τμήμα ενός άξονα από μια κορυφή και πέρα). Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι είναι, τότε, αφού τα στοιχεία δρουν με μετατοπίσεις στους άξονές τους, ο μεταθέτης $[g, h]$ θα σταθεροποιεί μια ακμή. Όμως οι σταθεροποιούσες των ακμών είναι τετριμμένες. Έτσι $gh = hg$ και άρα $A_g = A_h$ (βλ. Άσκηση 1).

Αφού το $T$ είναι δέντρο και η τομή των αξόνων δεν είναι άπειρη ακτίνα, το πλήθος των ακμών της τομής των αξόνων $A_g$ και $A_h$ θα είναι το πολύ πεπερασμένο. Εφόσον κάθε άξονας αποτελείται από τις μεταφορές μιας γεωδαισιακής πεπερασμένου μήκους και η δράση διατηρεί τη διάταξη των ακμών, κάθε άπειρη ακτίνα ενός άξονα έχει μέγιστη ακμή. Υπάρχει, λοιπόν, γεωδαισιακή $\gamma$ η οποία ενώνει τους δύο άξονες και άπειρες ακτίνες $\gamma_\infty$, $\beta_\infty$ των αξόνων $A_h$, $A_g$, αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω σχήμα:




Στην περίπτωση που οι άξονες είναι ξένοι, η $\gamma$ είναι γεωδαισιακή ελαχίστου μήκους από τον έναν στον άλλο, ενώ στην περίπτωση που οι άξονες έχουν μη κενή τομή, η $\gamma$ μπορεί να επιλεγεί κορυφή. Εφόσον καθεμία από τις δύο αυτές άπειρες ακτίνες έχει μέγιστη ακμή και η $\gamma$ έχει πεπερασμένο μήκος, το διπλά άπειρο μονοπάτι $\gamma_\infty^{-1}\gamma\beta_\infty$ έχει μέγιστη ακμή, η οποία είναι $H$-γέφυρα. □

**Λήμμα 4.2.4.** *Έστω $H \neq \{1\}$ μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $F$ και $v$ ένα $H$-νησί στο $T_H$. Τότε $H_v \neq 1$.*

*Απόδειξη.* Αν δεν υπάρχει $H$-γέφυρα, τότε $v = \{T_H\}$ και $H_v = H$, ενώ $H \cong \mathbb{Z}$ από το προηγούμενο λήμμα.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν $H$-γέφυρες και θεωρούμε το σύνολο $A = \{e : e\, H-$ γέφυρα με αρχή στη συνιστώσα $v\}$ των ακμών του $DT_H$ με αρχή $v$, το οποίο είναι μη κενό. Εφόσον η $H$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, το γράφημα πηλίκο $T_H/H$ είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, αν το $A$ είναι άπειρο, τότε υπάρχουν διαφορετικές ακμές του $A$ στην ίδια $H$-τροχιά. Δηλαδή, υπάρχει $1 \neq h \in H$ και ακμή $e$, έτσι ώστε $e, he \in A$. Αυτό σημαίνει ότι $h \in H_v$ και έτσι $H_v \neq \{1\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το $A$ είναι πεπερασμένο. Διατάσσουμε τις ακμές του $A$: $e_1 < e_2 < \cdots < e_k$. Η ακμή $e_1$ είναι, ως $H$-γέφυρα, η μέγιστη ακμή κάποιου διπλά άπειρου μονοπατιού $\gamma_\infty$ στο $T_H$. Από τον ορισμό του $A$ και την επιλογή της $e_1$ ως τη μικρότερη ακμή του $A$, έπεται ότι η άπειρη ακτίνα του $\gamma_\infty$ από το τέλος της $e_1$ και μετά θα βρίσκεται εντός του νησιού $v$. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση, το νησί $v$ θα περιέχει ακμές της μορφής $e$, $he$ με $1 \neq h \in H$. Συνεπώς, $h \in H$ και έτσι $H_v \neq \{1\}$. □

Στην επόμενη πρόταση περιέχεται η πλέον σημαντική ιδιότητα των δέντρων του Dicks.

**Πρόταση 4.2.5.** *Έστω $H \neq \{1\}$ μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $F$. Τότε η ανηγμένη τάξη $\overline{r}(H)$ της $H$ ισούται με το πλήθος $|E^+(DT_H/H)|$ των γεωμετρικών ακμών του γραφήματος πηλίκο $DT_H/H$.*

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 4.2.2, αρκεί να δείξουμε ότι η σταθεροποιούσα κάθε $H$-νησιού είναι άπειρη κυκλική. Όμως, από το Λήμμα 4.2.3 έχει τάξη μικρότερη ή ίση του 1, ενώ από το Λήμμα 4.2.4 έχει τάξη μεγαλύτερη ή ίση του 1. Τελικά, η σταθεροποιούσα κάθε νησιού έχει τάξη ίση με 1 και είναι άπειρη κυκλική. □

**Θεώρημα 4.2.6.** *Έστω $H$ και $K$ δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες μιας πεπερασμένα παραγόμενης ελεύθερης ομάδας $F$. Τότε*

$$\overline{r}(H \cap K) \leq \overline{r}(H) \cdot \overline{r}(K).$$

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι το $T$ είναι ένα δέντρο του οποίου οι ακμές διατάσσονται και επί του οποίου η $F$ δρα ελεύθερα με πεπερασμένο γράφημα πηλίκο. Επιπλέον, η δράση διατηρεί τη διάταξη μεταξύ των ακμών.

Αν μια από τις $H$, $K$ και $H \cap K$ είναι τετριμμένη, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι $H$, $K$ και $H \cap K$ είναι μη τετριμμένες (άρα περιέχουν υπερβολικά στοιχεία δρώντας στο $T$ ως υποομάδες της $F$). Θεωρούμε τα ελαχιστικά αναλλοίωτα υποδέντρα $T_{H\cap K}$, $T_H$ και $T_K$ που αντιστοιχούν στις υποομάδες $H \cap K$, $H$ και $K$. Εφόσον

$T_{H\cap K} \subseteq T_H,\, T_K$ η απεικόνιση

$$\varphi : T_{H\cap H}/H\cap K \to T_H/H \times T_K/K \quad \text{με} \quad [t]_{A\cap B} \mapsto \big([t]_H, [t]_K\big)$$

είναι καλά ορισμένη και $1-1$, καθώς η δράση είναι ελεύθερη. Κάθε $(H\cap K)$-γέφυρα είναι $H$-γέφυρα και $K$-γέφυρα. Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $\varphi$ επάγει απεικόνιση στις τροχιές των ακμών των αντιστοίχων δέντρων του Dicks

$$\widetilde{\varphi} : E(DT_{H\cap K}/H\cap K) \to E(DT_H/H) \times E(DT_K/K)$$

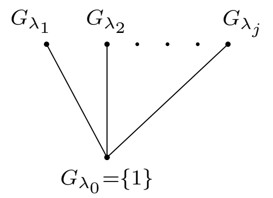
η οποία είναι $1-1$, γιατί κάθε υποομάδα δρα με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών επί του δέντρου του Dicks που της αντιστοιχεί. Έπεται ότι

$$\big|E^+(DT_{H\cap K}/H\cap K)\big| \leq \big|E^+(DT_H/H)\big| \cdot \big|E^+(DT_K/K)\big|$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται από την προηγούμενη πρόταση. □

## 4.3 Υποομάδες Ελευθέρων Γινομένων

Κάθε ελεύθερο γινόμενο $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ είναι η θεμελιώδης ομάδα ενός δέντρου ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα στοιχείο $\lambda_0 \notin \Lambda$ και ορίζουμε δέντρο $Y$ το οποίο έχει μια «κεντρική» κορυφή $v_{\lambda_0}$, μια κορυφή $v_\lambda$ και μια γεωμετρική ακμή με άκρα $v_{\lambda_0}, v_\lambda$, για κάθε παράγοντα $G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Σε καθεμία από τις κορυφές $v_\lambda$ αντιστοιχίζουμε τον παράγοντα $G_\lambda$, ενώ στην κεντρική κορυφή $v_{\lambda_0}$ αντιστοιχίζουμε την τετριμμένη ομάδα (και άρα οι ομάδες ακμών είναι τετριμμένες).




Είναι άμεσο από τους σχετικούς ορισμούς ότι $G \cong \pi(\mathcal{G}, Y, Y)$ και συνεπώς η $G$ δρα στο αντίστοιχο καθολικό δέντρο $X$ (βλ. Θεώρημα 3.3.21) με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών και σταθεροποιούσες κορυφών τα συζυγή των παραγόντων $G_\lambda$ και την τετριμμένη ομάδα (για την κεντρική κορυφή). Στην ουσία έχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 4.3.1.** *Κάθε ελεύθερο γινόμενο δρα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός δέντρου με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών και μη τετριμμένες σταθεροποιούσες κορυφών τα συζυγή των (μη τετριμμένων) παραγόντων.*

Στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε στο δέντρο που δρα ένα ελεύθερο γινόμενο $*_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, θα εννοούμε το καθολικό δέντρο $X$ που αντιστοιχεί στο δέντρο ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$ που ορίσαμε πριν (και το οποίο κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η κλάση των ελευθέρων ομάδων είναι κλειστή ως προς υποομάδες. Το ίδιο ισχύει και για τα ελεύθερα γινόμενα.

**Θεώρημα 4.3.2** (Kurosh Subgroup Theorem)**.** *Έστω $G = *_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ ένα ελεύθερο γινόμενο και $H$ μια υποομάδα της $G$. Τότε η $H$ αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο*

$$H = F *_{i\in I} H_i\,,$$

*όπου η $F$ είναι μια ελεύθερη ομάδα και κάθε $H_i$ είναι η τομή της $H$ με κάποιο συζυγές ενός παράγοντα $G_{\lambda(i)}$, δηλαδή, $H_i = H \cap g_i G_{\lambda(i)} g_i^{-1}$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το δέντρο ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$, όπως πριν, με θεμελιώδη ομάδα $G$ και το αντίστοιχο καθολικό δέντρο $X$. Η υποομάδα $H$ δρα στο $X$, μέσω του περιορισμού της δράσης στην υποομάδα, με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών, ενώ κάθε σταθεροποιούσα κορυφής είναι είτε τετριμμένη ή η τομή της $H$ με συζυγές κάποιου παράγοντα $G_\lambda$. Το θεώρημα δομής 3.3.13 που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις ομάδες που δρουν σε δέντρα ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θα λέμε ότι μια ομάδα αναλύεται κατά μη τετριμμένο τρόπο ως ελεύθερο γινόμενο, αν μπορεί να εκφρασθεί ως ελεύθερο γινόμενο στο οποίο τουλάχιστον δύο παράγοντες είναι μη τετριμμένες ομάδες.

**Παρατήρηση 4.3.3.** Στο προηγούμενο θεώρημα ενδέχεται η ανάλυση ως ελεύθερο γινόμενο που κληρονομεί η υποομάδα $H$ από την $G$ να είναι τετριμμένη (π.χ., αν η $H$ περιέχεται σε έναν παράγοντα).

**Ορισμός 4.3.4.** Μια ομάδα $G$ λέγεται (ελευθέρως) **μη αναλύσιμη**, αν δεν αναλύεται κατά μη τετριμμένο τρόπο ως ελεύθερο γινόμενο. Δηλαδή, οποτεδήποτε $G = A * B$, έχουμε $A = \{1\}$ ή $B = \{1\}$.

**Παράδειγμα 4.3.5.** Αν η $G$ είναι πεπερασμένη ή αβελιανή (γενικότερα μηδενοδύναμη), τότε η $G$ είναι μη αναλύσιμη.

**Πόρισμα 4.3.6.** *Έστω $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ και $H$ μια υποομάδα της $G$. Αν η $H$ είναι μη αναλύσιμη και όχι άπειρη κυκλική, τότε η $H$ περιέχεται σε συζυγές κάποιου παράγοντα.*

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο θεώρημα, η $H$ ως υποομάδα του ελευθέρου γινομένου κληρονομεί μια ανάλυση $H = F *_{i\in I} H_i$, όπου $F$ ελεύθερη και $H_i = H \cap g_i G_{\lambda(i)} g_i^{-1}$. Εφόσον η $H$ είναι μη αναλύσιμη είτε $H = F$ ή $H = H_i$ για κάποιο δείκτη $i$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $H = \mathbb{Z}$, αφού κάθε ελεύθερη ομάδα τάξης μεγαλύτερης του 1 είναι αναλύσιμη, το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεσή μας ότι η $H$ δεν είναι άπειρη κυκλική. Άρα $H = H_i = H \cap g_i G_{\lambda(i)} g_i^{-1} \subseteq g_i G_{\lambda(i)} g_i^{-1}$ για κάποιον δείκτη $i$. □

**Λήμμα 4.3.7.** *Έστω $G = *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Αν $xG_{\lambda_1}x^{-1} \cap G_\lambda \neq \{1\}$ για κάποιο $x \in G$ και $\lambda_1, \lambda \in \Lambda$, τότε $\lambda_1 = \lambda$ και $x \in G_{\lambda_1}$. Δηλαδή, $xG_{\lambda_1}x^{-1} \cap G_\lambda = G_{\lambda_1}$. Ιδιαιτέρως, μη τετριμμένοι διαφορετικοί παράγοντες δεν είναι συζυγείς υποομάδες της $G$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη δράση της $G$ στο αντίστοιχο δέντρο. Η τομή $H = xG_{\lambda_1}x^{-1} \cap G_\lambda$ σταθεροποιεί τις κορυφές $xG_{\lambda_1}$ και $G_\lambda$. Άρα η τομή σταθεροποιεί τη γεωδαισιακή που τις ενώνει. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι οι κορυφές $xG_{\lambda_1}$ και $G_\lambda$ είναι διαφορετικές, τότε η τομή $H$ θα σταθεροποιεί ακμή. Όμως η σταθεροποιούσα κάθε ακμής είναι τετριμμένη και έτσι $H = \{1\}$, άτοπο. Έπεται ότι $xG_{\lambda_1} = G_\lambda$, που σημαίνει ότι $\lambda_1 = \lambda$ και $x \in G_{\lambda_1}$. □

**Θεώρημα 4.3.8** (Μοναδικότητα Αναλύσεως)**.** *Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο αναλύσεις μιας ομάδας $G$ ως ελεύθερο γινόμενο*

$$G = G_1 * \cdots * G_n = H_1 * \cdots * H_m ,$$

*όπου κάθε παράγοντας $H_i$, $G_j$ είναι μη τετριμμένη και μη αναλύσιμη ομάδα. Τότε $m = n$ και, αλλάζοντας τη σειρά των παραγόντων αν χρειασθεί, $G_i \cong H_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$. Επιπλέον, κάθε παράγοντας $G_i$ που δεν είναι άπειρη κυκλική είναι συζυγής (στην $G$) με τον παράγοντα $H_i$.*

*Απόδειξη.* Αν κάθε παράγοντας $G_i$ είναι άπειρη κυκλική, τότε η $G$ είναι ελεύθερη. Άρα κάθε $H_i$ είναι ελεύθερη (ως υποομάδα ελεύθερης) και ως μη αναλύσιμη θα είναι ισόμορφη με την άπειρη κυκλική $\mathbb{Z}$. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, οι δύο αναλύσεις δίνουν $F_n = F_m$ και άρα $m = n$.

Υποθέτουμε λοιπόν (αλλάζοντας τη σειρά των παραγόντων, όπου χρειασθεί) ότι οι παράγοντες $G_1, \ldots, G_k$ δεν είναι άπειρες κυκλικές ομάδες, ενώ οι $G_{k+1}, \ldots, G_n$ είναι άπειρες κυκλικές. Εφόσον η $G_i$, $i = 1, \ldots, k$, είναι μη αναλύσιμη και όχι άπειρη κυκλική υποομάδα του ελευθέρου γινομένου $H_1 * \cdots * H_m$, από το Πόρισμα 4.3.6 έπεται ότι η $G_i$ περιέχεται σε συζυγές ελευθέρου παράγοντα. Δηλαδή, $G_i \subseteq g_i H_{j(i)} g_i^{-1}$, για κάποιο $g_i \in G$ και δείκτη $j(i) \in \{1, \ldots, m\}$. Ιδιαιτέρως, ο παράγοντας $H_{j(i)}$ δεν είναι άπειρη κυκλική ομάδα και αφού είναι μη αναλύσιμη, με το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι $H_{j(i)} \subseteq x_j G_{\lambda(j)} x_j^{-1}$, όπου $x_j \in G$ και $\lambda(j) \in \{1, \ldots, k\}$. Έτσι

$$G_i \subseteq g_i H_{j(i)} g_i^{-1} \subseteq g_i x_j G_{\lambda(j)} (g_i x_j)^{-1}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι $\lambda(j) = i$ και $g_i x_j \in G_i$. Άρα, έχουμε τους εγκλεισμούς $G_i \subseteq g_i H_{j(i)} g_i^{-1} \subseteq G_i$ και ως εκ τούτου $G_i = g_i H_{j(i)} g_i^{-1}$. Από το προηγούμενο λήμμα, προκύπτει επίσης ότι η απεικόνιση $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ με $i \mapsto j(i)$ είναι $1-1$. Αναδιατάσσοντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G_i = g_i H_i g_i^{-1}$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική υποομάδα $N = \langle\langle G_1, \ldots, G_k \rangle\rangle$ της $G$ που παράγεται από τους παράγοντες $G_1, \ldots, G_k$ ταυτίζεται με την κανονική υποομάδα $\langle\langle H_1, \ldots, H_k \rangle\rangle$ που παράγεται από τους παράγοντες $H_1, \ldots, H_k$ και έτσι

$$G_{k+1} * \cdots * G_n \cong G/N \cong H_{k+1} * \cdots * H_m.$$

Η ομάδα $G_{k+1} * \cdots * G_n$ είναι ελεύθερη τάξης $n-k$ ως ελεύθερο γινόμενο αντιτύπων του $\mathbb{Z}$. Όπως στην αρχή της απόδειξης, έπεται ότι $H_{k+1} \cong H_{k+2} \cong \cdots \cong H_m \cong \mathbb{Z}$ και συνεπώς η ομάδα $H_{k+1} * \cdots * H_m$ είναι ελεύθερη τάξεως $m-k$. Αφού οι δύο ελεύθερες ομάδες είναι ισόμορφες, έχουν την ίδια τάξη, δηλαδή $n-k = m-k$, ισοδύναμα, $n = m$. $\square$

**Παρατήρηση 4.3.9.** Μια από τις συνέπειες του θεωρήματος του Grushko είναι ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος μη αναλυσίμων ομάδων, όπως στη διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος. Υπάρχουν παραδείγματα ομάδων που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενες και δεν αναλύονται ως ελεύθερα γινόμενα μη αναλυσίμων ομάδων (βλ. Άσκηση 10).

## 4.4 Το Θεώρημα του Grushko

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με ένα από τα σπουδαιότερα θεωρήματα που αφορούν αναλύσεις ομάδων σε ελεύθερα γινόμενα και που αποδείχθηκε (αλγεβρικά) από τον Grushko το 1940. Οι αποδείξεις μερικών από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν θεμελιώδεις ομάδες και αναλύσεις σε συνεκτικά αθροίσματα πολλαπλοτήτων διάστασης 3, βασίζονται ουσιαστικά στο θεώρημα του Grushko. Υπάρχει λοιπόν μια στενή σχέση μεταξύ του θεωρήματος του Grushko και της τοπολογίας των πολλαπλοτήτων διάστασης 3. Διερευνώντας, στα πρώτα στάδια, αυτή τη σχέση ο Stallings έδωσε στη διατριβή του [9] το 1959 μια τοπολογική απόδειξη του θεωρήματος του Grushko και είναι αυτή η απόδειξη που αναπαράγεται σχεδόν σε όλα τα βιβλία αλγεβρικής τοπολογίας. Εδώ θα ακολουθήσουμε μια άλλη απόδειξη που δόθηκε μεταγενέστερα πάλι από τον Stallings [10] και η οποία χρησιμοποιεί τη θεωρία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Όλες οι δράσεις στη συνέχεια θα θεωρούνται χωρίς αντιστροφές. Ένα **$G$-γράφημα** είναι ένα γράφημα εφοδιασμένο με μια δράση μιας ομάδας $G$. Ένας μορφισμός μεταξύ δύο $G$-γραφημάτων $\varphi : X \to Y$ για τον οποίο ισχύει $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, για κάθε $g \in G$ και κάθε $x \in E(X) \cup V(X)$, λέγεται **απεικόνιση $G$-γραφημάτων** ή **μορφισμός $G$-γραφημάτων**.

**Ορισμός 4.4.1.** Έστω $X$ ένα $G$-γράφημα. Μια **δίπλωση** (fold) στο $X$ είναι ένα ζεύγος ακμών $(e_1, e_2)$ του $X$, έτσι ώστε $\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ και $e_1 \neq g\bar{e}_2$ για κάθε $g \in G$. Αν επιπροσθέτως, οι ακμές της δίπλωσης $(e_1, e_2)$ ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές, τότε η δίπλωση $(e_1, e_2)$ ονομάζεται **ελεύθερη**.

Αν, όπως στον ορισμό, έχουμε μια δίπλωση $(e_1, e_2)$ σε ένα $G$-γράφημα $X$, τότε «διπλώνοντας», δηλαδή κάνοντας τις ταυτοποιήσεις $ge_1 \equiv ge_2$ και $g\tau(e_1) \equiv g\tau(e_2)$, για κάθε $g \in G$, προκύπτει ένα $G$-γράφημα $X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ (τα σύνολα κορυφών και ακμών, οι απεικονίσεις γραφήματος και η δράση κληρονομούνται από το $X$ και ορίζονται με τον φυσιολογικό τρόπο). Η φυσική προβολή $\pi : X \to X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ είναι επιμορφισμός $G$-γραφημάτων και λέγεται **απεικόνιση δίπλωσης** . Αν η δίπλωση είναι ελεύθερη, τότε, διπλώνοντας, το πλήθος των τροχιών των γεωμετρικών ακμών μειώνεται κατά ένα.

**Παρατήρηση 4.4.2.** Η συνθήκη $e_1 \neq g\bar{e}_2$ εγγυάται ότι στο γράφημα $X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ η εικόνα $\pi(ge_1) = \pi(ge_2)$ των ακμών $ge_1, ge_2$ που ταυτοποιούνται δεν ισούται με την αντίστροφή της. Εγγυάται, επίσης, ότι η δράση της $G$ στο $X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ είναι χωρίς αντιστροφές.

**Παρατήρηση 4.4.3.** Αν το $X$ είναι ένα $G$-δέντρο με μια δίπλωση $(e_1, e_2)$, τότε είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το $X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ είναι και αυτό $G$-δέντρο (βλ. Άσκηση 8). Επιπλέον, αν η δίπλωση είναι ελεύθερη και η σταθεροποιούσα κάθε ακμής του $X$ είναι τετριμμένη, τότε και η σταθεροποιούσα κάθε ακμής του $X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ είναι τετριμμένη.

**Ορισμός 4.4.4.** Έστω $\varphi : X \to Y$ μια απεικόνιση γραφημάτων και $e_1$, $e_2$ ένα ζεύγος ακμών του $X$ με την ίδια αρχή. Αν $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$, τότε λέμε ότι η $\varphi$ επιδέχεται τη δίπλωση $(e_1, e_2)$.

Εφόσον η $\varphi$ διατηρεί τις δράσεις οι οποίες είναι χωρίς αντιστροφές, στον προηγούμενο ορισμό έχουμε πράγματι δίπλωση, δηλαδή $e_1 \neq g\bar{e}_2$ για κάθε $g \in G$.

**Λήμμα 4.4.5.** *Έστω $\varphi : X \to Y$ μια απεικόνιση $G$-γραφημάτων η οποία επιδέχεται τη δίπλωση $(e_1, e_2)$. Τότε η $\varphi$ παραγοντοποιείται ως ακολούθως:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Αφού η $\pi$ είναι επί, ορίζουμε την $\widetilde{\varphi}$ μέσω του τύπου $\widetilde{\varphi}\big(\pi(x)\big) = \varphi(x)$, $x \in E(X) \cup V(X)$, και παρατηρούμε ότι είναι καλά ορισμένη. □

**Πρόταση 4.4.6.** *Έστω $G$ μια ομάδα και $\varphi : X \to Y$ μια απεικόνιση $G$-γραφημάτων. Υποθέτουμε ότι η $G$ δρα στο $X$ με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών και ότι το γράφημα πηλίκο $X/G$ είναι πεπερασμένο. Τότε υπάρχει ένα $G$-γράφημα $\widetilde{X}$, επίσης με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών, ένας επιμορφισμός $G$-γραφημάτων $\varepsilon : X \to \widetilde{X}$ και μια απεικόνιση $G$-γραφημάτων $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$, έτσι ώστε $\widetilde{\varphi} \circ \varepsilon = \varphi$ και η $\widetilde{\varphi}$ δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση.*

*Απόδειξη.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X_1 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{X} \arrow[dll, "\widetilde{\varphi}"] \\ & Y & & \end{tikzcd}$$

Αν η $\varphi$ δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση, τότε $X = \widetilde{X}$ και $\widetilde{\varphi} = \varphi$. Αν η $\varphi$ επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση, τότε «διπλώνοντας» προκύπτει γράφημα της μορφής $X_1 = X/\langle e_1 \equiv e_2 \rangle$ και το πλήθος των τροχιών των γεωμετρικών ακμών μειώνεται κατά ένα, δηλαδή $|E^+(X_1/G)| = |E^+(X/G)| - 1$, όπου με $E^+$ συμβολίζουμε το πλήθος των γεωμετρικών ακμών. Εφόσον το γράφημα πηλίκο $X/G$ είναι πεπερασμένο και με κάθε ελεύθερη δίπλωση το πλήθος των τροχιών των γεωμετρικών ακμών μειώνεται κατά ένα, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και με διαδοχικές εφαρμογές του προηγούμενου λήμματος, θα προκύψει έπειτα από πεπερασμένες το πλήθος διπλώσεις, η απεικόνιση $G$-γραφημάτων $\widetilde{\varphi}$ που δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση. Η $\varepsilon$ είναι η σύνθεση των διπλώσεων. □

**Θεώρημα 4.4.7.** *Έστω $\varphi : X \to Y$ μια απεικόνιση $G$-γραφημάτων, όπου τα $X, Y$ είναι δέντρα και οι σταθεροποιούσες ακμών του $X$ είναι τετριμμένες. Υποθέτουμε ότι η $\varphi$ δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση και ότι για κάθε ακμή $e$ του $X$ ισχύει ότι*

$$G_{\varphi(e)} = \bigcap_{y \in E(Y)} G_y.$$

*Τότε η επαγόμενη απεικόνιση γραφημάτων $\widehat{\varphi} : X/G \to Y/G$, $[x] \mapsto [\varphi(x)]$, είναι $1-1$ (εδώ ως συνήθως το $[\cdot]$ συμβολίζει τροχιά).*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι η $\widehat{\varphi}$ δεν είναι $1-1$. Τότε υποδιαιρώντας (για να αποφύγουμε διάκριση περιπτώσεων) μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν είναι $1-1$ στις κορυφές. Έστω, λοιπόν, $v, w$ δύο κορυφές του $X$ σε διαφορετικές τροχιές, έτσι ώστε οι εικόνες τους $\varphi(v)$, $\varphi(w)$ ανήκουν στην ίδια τροχιά. Τότε υπάρχει $g \in G$ με $\varphi(v) = g\varphi(w) = \varphi(gw)$. Αντικαθιστώντας την κορυφή $w$ με την $gw$, έχουμε ότι

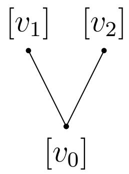
$$\varphi(v) = \varphi(w), \text{ όπου } v, w \text{ σε διαφορετικές τροχιές.} \quad \text{(I)}$$

Μεταξύ των κορυφών που ικανοποιούν την (I) επιλέγουμε ζεύγος, για το οποίο διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό, έστω $v, w$ που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ τους και θεωρούμε τη γεωδαισιακή $p = [v, w]$ που τις ενώνει. Εφόσον οι $v, w$ είναι σε διαφορετικές τροχιές, το μήκος $n$ της $p$ είναι θετικό. Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $\varphi(p)$ είναι κλειστό: $\alpha\big(\varphi(p)\big) = \varphi(v) = \varphi(w) = \tau\big(\varphi(p)\big)$. Εφόσον το $Y$ είναι δέντρο και το $\varphi(p)$ είναι κλειστό μονοπάτι του $Y$ θετικού μήκους, το μονοπάτι $\varphi(p)$ περιέχει παλινδρόμηση. Αυτό σημαίνει ότι το $p$ έχει τη μορφή $p = p_1\bar{e}_1e_2p_2$, όπου $e_1, e_2$ ακμές του $X$ με την ίδια αρχή $u$ και $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$. Αφού η $\varphi$ δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση, οι ακμές $e_1$ και $e_2$ ανήκουν στην ίδια τροχιά. Δηλαδή, $e_1 = ge_2$, άρα $g \in G_u$ και $g \in G_{\varphi(e_1)}$, καθώς $\varphi(e_1) = g\varphi(e_2) = g\varphi(e_1)$. Από υπόθεση, έπεται ότι το στοιχείο $g$ σταθεροποιεί κάθε ακμή ή κορυφή του $Y$. Παρατηρούμε ότι ορίζεται το μονοπάτι $p_1 \cdot gp_2$ (αφού $g \in G_u$), έχει μικρότερο μήκος από το $p$ και τα άκρα του είναι $v$ και $gw$ με $\varphi(v) = \varphi(w) = g\varphi(w) = \varphi(gw)$, το οποίο αντιφάσκει στην επιλογή των κορυφών $v$ και $w$. Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Θεώρημα 4.4.8** (Grushko). *Έστω $F$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα, $G = G_1 * G_2$ και $\varphi : F \to G$ ένας επιμορφισμός. Τότε υπάρχουν υποομάδες $F_1$ και $F_2$ της $F$, έτσι ώστε $F = F_1 * F_2$ και $\varphi(F_i) = G_i$, $i = 1, 2$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε βάση $S_0$ της $F$ την οποία εκφράζουμε ως ξένη ένωση $S_0 = S \sqcup S_1$, όπου $\varphi(s) \neq 1$ για κάθε $s \in S$ και $\varphi(s) = 1$ για κάθε $s \in S_1$. Δηλαδή, $F = F(S) * F(S_1)$ με $\varphi\big(F(S_1)\big) = 1$ και $\varphi\big(F(S)\big) = G$. Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F = F(S)$ με $\varphi(s) \neq 1$ για κάθε $s \in S$.

Θεωρούμε το γράφημα Cayley $X = \Gamma(F, S)$ της $F$ ως προς $S$ το οποίο είναι δέντρο επί του οποίου η $F$ δρα ελεύθερα με γράφημα πηλίκο ένα μπουκέτο $|S|$ το πλήθος κύκλων (δηλαδή, μια τροχιά κορυφών και μια τροχιά γεωμετρικών ακμών για κάθε ελεύθερο γεννήτορα του $S$). Θεωρούμε, επίσης, το δέντρο  που αντιστοιχεί στο ελεύθερο γινόμενο $G = G_1 * G_2$ επί του οποίου δρα η $G$ με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών, σταθεροποιούσες κορυφών τα συζυγή των παραγόντων και με γράφημα πηλίκο

$Y/G \quad =$ 


όπου $v_i$ κορυφή του $Y$ και $[v_i]$ η τροχιά της, για $i = 0, 1, 2$, $G_{v_0} = \{1\}$ και $G_{v_i} = G_i$, $i = 1, 2$. Το γράφημα $Y$ γίνεται $F$-δέντρο μέσω του ομομορφισμού $\varphi$. Πιο συγκεκριμένα, για $g \in F$ και $y \in Y$ ορίζουμε δράση της $F$ στο $Y$ μέσω του τύπου $g * y = \varphi(g)y$. Η υπόθεση ότι η $\varphi$ είναι επιμορφισμός συνεπάγεται ότι $Y/F = Y/G$.

Ορίζουμε απεικόνιση $F$-γραφημάτων $\psi : X \to Y$, η οποία «αναπαριστά» τον επιμορφισμό $\varphi$ ως ακολούθως: Μια (θετική) ακμή του $X$ έχει τη μορφή $(g, s_i)$, όπου $g \in F$ και $s_i \in S$. Εφόσον $(g, s_i) = g(1, s_i)$ και η $\psi$ θέλουμε να είναι απεικόνιση $F$-γραφημάτων, αρκεί να ορισθεί η $\psi$ στις ακμές $(1, s_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Στο δέντρο $Y$ θεωρούμε τη γεωδαισιακή $p_i = [v_0, \varphi(s_i)v_0]$ από την κορυφή $v_0$ στην $\varphi(s_i)v_0 = s_i * v_0$, της οποίας το μήκος είναι θετικό αφού $\varphi(s_i) \neq 1$ και $G_{v_0} = \{1\}$. Για κάθε $i$, υποδιαιρούμε την ακμή $(1, s_i)$ του $X$ σε $n_i =$ μήκος$(p_i)$ το πλήθος ακμές και συμβολίζουμε το νέο δέντρο πάλι με $X$. Ορίζουμε την $\psi$, έτσι ώστε η γεωδαισιακή $[1, s_i]$ (του νέου πλέον $X$) να απεικονίζεται μέσω της $\psi$ ισομορφικά στην $p_i$ και την επεκτείνουμε στις τροχιές:

$$V(X) \ni g \overset{\psi}{\mapsto} \varphi(g)v_0 = g * v_0 \quad \text{και} \quad [g, s_i] = g[1, s_i] \overset{\psi}{\mapsto} [\varphi(g)v_0, \varphi(g)\varphi(s_i)v_0] = g * p_i.$$

Από την Πρόταση 4.4.6 η $\psi$ παραγοντοποιείται μέσως μιας ακολουθίας ελεύθερων διπλώσεων $\varepsilon$ και μιας απεικόνισης $\widetilde{\psi}$ η οποία δεν επιδέχεται ελεύθερη δίπλωση

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\psi"] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Εφόσον η $\varepsilon$ είναι επιμορφισμός, έχουμε $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Im}\widetilde{\psi}$ και ιδιαιτέρως $v_0 \in \mathrm{Im}\widetilde{\psi}$. Για κάθε $g \in F$ και $e \in E(\widetilde{X})$, το στοιχείο $g$ σταθεροποιεί την ακμή $\widetilde{\psi}(e)$ αν και μόνο αν $\varphi(g) = 1$ (οι σταθεροποιούσες ακμών είναι τετριμμένες) αν και μόνο αν $g*y = y$ για κάθε ακμή $y \in E(\widetilde{X}(e))$. Ικανοποιούνται, λοιπόν, οι υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και συνεπώς η επαγόμενη $\widehat{\psi}$ (της $\widetilde{\psi}$) απεικόνιση γραφημάτων

$$\widehat{\psi} : \widetilde{X}/F \to Y/F$$

είναι $1-1$. Επιλέγουμε κορυφή $w_0$ του $\widetilde{X}$ με $\widetilde{\psi}(w_0) = v_0$. Εφόσον η $\varphi$ είναι επί και $\varphi(F_w) \subseteq G_{\widetilde{\psi}(w)}$ για κάθε κορυφή $w$ του $\widetilde{X}$, το γράφημα πηλίκο $\widetilde{X}/F$ δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από μια ακμή. Άρα θα έχει τη μορφή

$$\widetilde{X}/F \quad = \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] {[w_1]} \arrow[dr, dash] & & {[w_2]} \arrow[dl, dash] \\ & {[w_0]} & \end{tikzcd}$$

και για τα αντίστοιχα δέντρα αντιπροσώπων θα έχουμε την εικόνα

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & w_1 & & & g_1v_1 = \widetilde{\psi}(w_1) \\ w_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \xrightarrow{\ \widetilde{\psi}\ } & v_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & w_2 & & & g_2v_2 = \widetilde{\psi}(w_2). \end{tikzcd}$$

Επίσης, για να είναι οι κορυφές $g_iv_i$ γειτονικές με την $v_0$, πρέπει $g_i \in G_{v_i} = G_i$, $i = 1, 2$. Αν συμβολίσουμε με $F_i$ τη σταθεροποιούσα της κορυφής $w_i$ (μέσω της δράσης της $F$), τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, $\varphi(F_i) \subseteq G_{\widetilde{\psi}(w_i)} = G_i$, $i = 0, 1, 2$, ενώ από το θεώρημα δομής έχουμε ότι $F = F_1 * F_0 * F_2$. Αντικαθιστώντας την $F_1$ με την $F_1 * F_0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F = F_1 * F_2$ και $\varphi(F_i) \subseteq G_i$, $i = 1, 2$. Τέλος, η υπόθεση ότι η $\varphi$ είναι επί μας δίνει ότι $\varphi(F_i) = G_i$, $i = 1, 2$. Πράγματι, κάθε $g \in G_1$ μπορεί να γραφεί ως $g = \varphi(x) = \varphi(x_1y_1 \cdots x_ky_k) = \varphi(x_1)\varphi(y_1) \cdots \varphi(x_k)\varphi(y_k)$, όπου $x_i \in F_1$, $y_i \in F_2$ και στη λέξη $x_1y_1 \cdots x_ky_k$ δεν παρατηρούνται αναγωγές εκτός ίσως από τα άκρα $x_1, y_k$

που μπορεί (ένα ή και τα δύο) να είναι 1. Αν επιβιώνει κάποιο $\varphi(y_i)$ [δηλαδή, $\varphi(y_i) \neq 1$ μετά από τις αναγωγές στη λέξη $\varphi(x_1)\varphi(y_1)\cdots\varphi(x_k)\varphi(y_k)$], τότε η ανηγμένη μορφή που θα προκύψει δεν μπορεί να αναπαριστά στοιχείο του παράγοντα $G_1$. Έπεται ότι μετά τις αναγωγές θα έχουμε $g = \varphi(x_{i_1})\cdots\varphi(x_{i_\nu}) \in \varphi(F_1)$. Έτσι $\varphi(F_1) = G_1$ και ομοίως $\varphi(F_2) = G_2$. □

**Παρατήρηση 4.4.9.** Το θεώρημα ισχύει ακόμη και αν η υπόθεση ότι η $F$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη παραληφθεί. Η απόδειξη παραμένει η ίδια, αλλά χρησιμοποιούμε ευθέα όρια $G$-δέντρων για να αποδείξουμε την Πρόταση 4.4.6 χωρίς την υπόθεση ότι το γράφημα πηλίκο $X/G$ είναι πεπερασμένο.

Στην περίπτωση που η ομάδα $G$ έχει περισσότερους από δύο ελεύθερους παράγοντες, τους ομαδοποιούμε και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 4.4.10.** *Έστω $F$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα, $G = G_1 * \cdots * G_n$ ένα ελεύθερο γινόμενο και $\varphi : F \to G$ ένας επιμορφισμός. Τότε υπάρχουν υποομάδες $F_1, \ldots, F_n$ της $F$ με $F = F_1 * \cdots * F_n$ και $\varphi(F_i) = G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Για μια ομάδα $G$, συμβολίζουμε με $d(G)$ το ελάχιστο πλήθος των στοιχείων που απαιτούνται για να παραχθεί η $G$.

**Πόρισμα 4.4.11.** *Αν $G = G_1 * \cdots * G_n$ και $G_i \neq 1$ για κάθε $i$, τότε*

$$d(G) = d(G_1) + \cdots + d(G_n).$$

*Απόδειξη.* Αν σε κάθε παράγοντα $G_i$ έχουμε ένα σύνολο γεννητόρων $S_i$, τότε η ένωση $\cup_{i=1}^n S_i$ είναι σύνολο γεννητόρων της $G$ και άρα $d(G) \leq d(G_1) + \cdots + d(G_n)$. Αν $d(G) = \infty$, τότε $d(G_i) = \infty$ για κάποιο $i$ και έχουμε ισότητα. Υποθέτουμε ότι $d(G) < \infty$. Τότε η $G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και υπάρχει επιμορφισμός $\varphi : F \to G$, όπου η $F$ είναι ελεύθερη ομάδα τάξεως $d(G)$. Από το προηγούμενο πόρισμα, η $F$ αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο $F = F_1 * \cdots * F_n$, έτσι ώστε $\varphi(F_i) = G_i$ για κάθε $i$. Από την ισότητα $\varphi(F_i) = G_i$, έπεται ότι $\text{rank}(F_i) \geq d(G_i)$ και έτσι $d(G) = \text{rank}(F) = \text{rank}(F_1) + \cdots + \text{rank}(F_n) \geq d(G_1) + \cdots d(G_n)$. □

Ιδιαιτέρως, μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G$ δεν μπορεί να εκφρασθεί ως ελεύθερο γινόμενο απείρου πλήθους μη τετριμμένων παραγόντων και ως εκ τούτου, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.3.8, λαμβάνουμε άμεσα το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 4.4.12.** *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο (αν δεν ληφθεί υπόψη η σειρά των παραγόντων) ως ελεύθερο γινόμενο πεπερασμένου πλήθους παραγόντων $G = G_1 * \cdots * G_n$, όπου κάθε παράγοντας $G_i$ είναι (ελευθέρως) μη αναλύσιμη ομάδα.*

# Ασκήσεις

4.1 Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα επί ενός δέντρου $X$ (χωρίς αντιστροφές).

(i) Να δειχθεί ότι $\ell(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(v_0, g^n v_0)$ για κάθε κορυφή $v_0$ του $X$.

(ii) $\ell(xgx^{-1}) = \ell(g)$ για κάθε ζεύγος στοιχείων $g, x \in G$.

(iii) Αν το $g$ είναι υπερβολικό στοιχείο της $G$, τότε το $hgh^{-1}$ είναι επίσης υπερβολικό και $A_{hgh^{-1}} = hA_g$ για κάθε $h \in G$ (όπου $A_g$ είναι ο άξονας του υπερβολικού στοιχείου $g$).

(iv) Αν η $N$ είναι κανονική υποομάδα της $G$ που περιέχει υπερβολικό στοιχείο, τότε $X_N = X_G$, όπου με $X_H$ συμβολίζουμε το ελαχιστικό $H$-αναλλοίωτο υποδέντρο του $X$ της υποομάδας $H$ (που περιέχει υπερβολικό στοιχείο).

(v) Δύο υπερβολικά στοιχεία της $G$ που μετατίθενται έχουν τον ίδιο άξονα.

4.2 Αν $\varphi$ και $\psi$ είναι δύο ελλειπτικές ισομετρίες ενός δέντρου $X$ χωρίς κοινή σταθερή κορυφή (δηλ. $Fix(\varphi) \cap Fix(\psi) = \emptyset$), τότε το γινόμενό τους $\varphi\psi$ είναι υπερβολική ισομετρία.

4.3 (i) Αν τα $T_1, \ldots, T_n$ είναι υποδέντρα ενός δέντρου $T$ τα οποία ανά δύο έχουν μη τετριμμένη τομή, τότε $\bigcap_{i=1}^n T_i \neq \emptyset$. [Υπόδειξη: Επιλέξτε σημεία σε κάθε τομή $T_i \cap T_j, i \neq j$ και θεωρήστε το «βαρύκεντρό» τους.]

(ii) Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί ενός δέντρου $T$. Αν κάθε στοιχείο της ομάδας είναι ελλειπτικό, τότε η $G$ σταθεροποιεί κορυφή [Υπόδειξη: Θεωρήστε πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ της $G$ και χρησιμοποιήστε το (i) για τα υποδέντρα που «παράγονται» από τις κορυφές που σταθεροποιούνται από κάθε γεννήτορα].

4.4 Έστω $G$ μια (μη τετριμμένη) ομάδα η οποία δρα ελεύθερα (χωρίς αντιστροφές) επί ενός διπλά άπειρου μονοπατιού $X$. Αποδείξτε ότι κάθε κορυφή του αντίστοιχου γραφήματος πηλίκο είναι άκρο ακριβώς δύο γεωμετρικών ακμών και κατά συνέπεια η $G$ είναι άπειρη κυκλική.

4.5 Έστω $T$ ένα $G$-δέντρο και έστω $g, x$ υπερβολικά στοιχεία της $G$ με αντίστοιχους άξονες $A_g, A_x$.

(i) Αν η διάμετρος $\delta(A_g \cap A_x)$ της τομής των αξόνων είναι γνήσια μικρότερη από $\max\{\ell(g), \ell(x)\}$, τότε τα στοιχεία $g$ και $x$ παράγουν μια ελεύθερη υποομάδα της $G$ τάξεως 2. [Υπόδειξη: Αν $\omega = g^{k_1}x^{m_1} \cdots g^{k_n}x^{m_n},\ k_i, m_i \in \mathbb{Z}$, τότε δείξτε ότι $\omega \neq 1$ ως εξής: Αρκεί το $\omega$ να δρα μη τετριμμένα στο $T$. Αν $v$ κορυφή της τομής $A_g \cap A_x$, τότε με επαγωγή προκύπτει ότι $[v, \omega v] \cap A_x \subseteq A_g \cap A_x$.]

(ii) Αν η τομή $A_g \cap A_x$ είναι φραγμένη, τότε υπάρχει φυσικός $n$, έτσι ώστε η υποομάδα $\langle g^n, x^n \rangle$ που παράγεται από τις δυνάμεις $g^n$ και $x^n$ να είναι ισόμορφη με την $F_2$.

4.6 Αν η $H$ είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της $F_n$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $w \in F_n$ υπάρχει $k = k(w) > 0$, έτσι ώστε $w^k \in H$, τότε η $H$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην $F_n$.

4.7 Για ένα γράφημα $X$ συμβολίζουμε με $C_0(X)$ την ελεύθερη αβελιανή ομάδα επί του συνόλου κορυφών $V(X)$ του $X$ και με $C_1(X)$ την ελεύθερη αβελιανή ομάδα επί του συνόλου των γεωμετρικών ακμών του $X$. Με άλλα λόγια, η $C_1(X)$ είναι το πηλίκο της ελεύθερης αβελιανής επί των ακμών προς την υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία $e + \overline{e}, e \in E(X)$ (το πηλίκο είναι ελεύθερη αφού $e \neq \overline{e}$ και $e = \overline{\overline{e}}$). Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ που απεικονίζει κάθε κορυφή στο 1, δηλαδή $\varepsilon\big(\sum_{i=1}^k n_i v_i\big) = \sum_{i=1}^k n_i$. Η απεικόνιση $e \mapsto \tau(e) - \alpha(e)$ επάγει ομομορφισμό $\partial : C_1(X) \to C_0(X)$. Αποδείξτε ότι:

(i) Το $X$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν $\mathrm{Im}\partial = \ker \varepsilon$.

(ii) Το $X$ δεν έχει κυκλώματα αν και μόνο αν η $\partial$ είναι $1-1$.

4.8 Έστω $X$ ένα $G$-δέντρο με μια δίπλωση $(e_1, e_2)$ και $Y = X/\langle e_1 = e_2 \rangle$ το γράφημα που προκύπτει από το $X$ διπλώνοντας. Αποδείξτε ότι:

(i) Η ομάδα $C_0(Y)$ είναι το πηλίκο της $C_0(X)$ προς την υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $g\tau(e_1) - g\tau(e_2)$, $g \in G$.

(ii) Η ομάδα $C_1(Y)$ είναι το πηλίκο της $C_1(X)$ προς την υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $ge_1 - ge_2$, $g \in G$.

(iii) Το $Y$ είναι ένα $G$-δέντρο, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση.

4.9 Έστω $G = A * B$, όπου $A, B$ μη τετριμμένες ομάδες και $g, x \in G$. Αν ο μεταθέτης $[g, x] = g^{-1}x^{-1}gx$ είναι μη τετριμμένο στοιχείο και ανήκει στον παράγοντα $A$, τότε $g, x \in A$.

4.10 Η ομάδα του Kurosh είναι η ομάδα με παράσταση

$$G = \big\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots \mid a_{n-1} = [a_n, b_n] \text{ για κάθε } n \geq 1 \big\rangle.$$

(i) Δείξτε ότι $a_n \neq 1$ για κάθε $n \geq 0$ με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι να παρατηρήσετε ότι υπάρχει ακολουθία επιμορφισμών $G \to \langle a, b \,|\, a = [a, b] \rangle \to S_3$. Ο δεύτερος είναι να εκφράσετε την $G$ ως ένα άπειρο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα της μορφής $G = F_1 *_{\langle c_1 \rangle} F_2 *_{\langle c_2 \rangle} F_3 *_{\langle c_3 \rangle} \cdots$, όπου $\langle c_i \rangle$ άπειρη κυκλική, $F_i$ είναι η ελεύθερη με βάση $\{a_i, b_i\}$ και οι μονομορφισμοί της $\langle c_i \rangle$ στους παράγοντες $F_i$ και $F_{i+1}$ δίνονται από τις απεικονίσεις $c_i \mapsto a_i$ και $c_i \mapsto [a_{i+1}, b_{i+1}]$, αντίστοιχα.

(ii) Αποδείξτε ότι

$$G = F(\{b_1\}) * \big\langle a_1, a_2, \ldots, b_2, b_3, \ldots \mid a_{n-1} = [a_n, b_n] \text{ για κάθε } n \geq 2 \big\rangle \cong \mathbb{Z} * G.$$

(iii) Αποδείξτε ότι η ομάδα $G$ δεν μπορεί να είναι ελεύθερο γινόμενο μη αναλυσίμων ομάδων (σημειώνοντας, στην αντίθετη περίπτωση, ότι το $a_0$ θα πρέπει να ανήκει σε υποομάδα η οποία είναι το ελεύθερο γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος μη αναλυσίμων ομάδων).

4.11 Ένα μη τετριμμένο ευθύ γινόμενο $H \times K$ (δηλαδή $H, K \neq \{1\}$) είναι μη αναλύσιμη ομάδα.

4.12 Έστω $G = A * B$ και $g, x$ δύο στοιχεία της $G$ που μετατίθενται. Τότε τα $g, x$ ανήκουν στο ίδιο συζυγές ενός παράγοντα ή είναι δυνάμεις του ίδιου στοιχείου.

4.13 Έστω $G$ μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα της οποίας κάθε μη τετριμμένο στοιχείο έχει άπειρη τάξη. Υποθέτουμε ότι η $G$ δρα επί ενός δέντρου $X$ χωρίς να σταθεροποιεί κορυφή και με τετριμμένες σταθεροποιούσες ακμών. Αν η $G$ περιέχει ελεύθερη υποομάδα $F$ πεπερασμένου δείκτη, τότε η $G$ είναι ελεύθερη.

4.14 Έστω $G = G_1 * \cdots * G_n$, όπου κάθε παράγοντας $G_i$ είναι πεπερασμένη ή πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα. Αν οι $A$ και $B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της $G$, τότε και η τομή τους $A \cap B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

# Βιβλιογραφία

[1] O. Bogopolski. Introduction to Group Theory, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2008.

[2] D. E. Cohen. Combinatorial Group Theory: A Topological Approach, London Mathematical Society Student Texts 14, Cambridge, 1989.

[3] http://mat.uab.cat/ dicks/SimplifiedMineyev.pdf

[4] W. Dicks and M. Dunwoody. Groups Acting on Graphs, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] W. Dicks and Z. Šunić. Orders on trees and free products of left-ordered groups, Canadian Mathematical Bulletin, **63** (2020), pp. 335–347.

[6] J. Friedman. Sheaves on graphs, their homological invar iants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture: with an appendix by Warren Dicks, Memoirs Amer. Math. Soc. **233**, no. 1100 (2014).

[7] I. Mineyev. Submultiplicativity and the Hanna Neumann conjecture, Ann. of Math. (2) **175** (2012), pp. 393–414.

[8] J.-P. Serre. Trees, Corrected 2nd printing, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[9] J. R. Stallings. Some topological proofs and extensions of Grushko's theorem, Ph.D thesis, Princeton University, 1959.

[10] J. R. Stallings. Foldings of G-trees, Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988), Springer, New York, 1991, pp. 355–368.

# Κεφάλαιο 5

# Χώροι Πηλίκο

## Περιεχόμενα



Στην Αλγεβρική Τοπολογία, για έναν τοπολογικό χώρο ορίζονται διάφορες ομάδες όπως οι ομάδες ομοτοπίας, οι ομάδες ομολογίας και οι ομάδες συνομολογίας. Φυσικά, άλλο πράγμα είναι ο ορισμός και άλλο ο υπολογισμός (ή η άντληση πληροφοριών από αυτές για τη μελέτη του χώρου). Η δομή ενός συμπλέγματος κελιών μας παρέχει τη δυνατότητα της μελέτης αυτών των ομάδων. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή κατασκευής τοπολογικών χώρων μέσω κατάλληλων σχέσεων ισοδυναμίας και ιδιαιτέρως η ανάπτυξη των εννοιών που απαιτούνται για τον ορισμό των συμπλεγμάτων κελιών και την περιγραφή των ιδιοτήτων τους.

## 5.1 Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

**Ορισμός 5.1.1.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση επί ενός συνόλου $Y$. Η **τοπολογία πηλίκο** του συνόλου $Y$ ως προς την απεικόνιση $\pi$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subseteq Y \,|\, \pi^{-1}(U) \;\text{ ανοικτό υποσύνολο του } X\}.$$

Δηλαδή, ανοικτά είναι εκείνα τα υποσύνολα του $Y$ που αντιστρέφονται (μέσω της $\pi$) σε ανοικτά υποσύνολα του $X$.

Σημειώνουμε ότι η τοπολογία πηλίκο του $Y$ ως προς την $\pi$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο $Y$ η οποία καθιστά την $\pi$ συνεχή. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η οικογένεια $\mathcal{T}_Y$ ικανοποιεί τα απαραίτητα αξιώματα προκειμένου να αποτελεί μια τοπολογία.

**Ορισμός 5.1.2.** Έστω $\pi : X \to Y$ μια επί απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων $X$ και $Y$. Η $\pi$ λέγεται **απεικόνιση πηλίκο**, αν τα ανοικτά του $Y$ είναι ακριβώς αυτά που αντιστρέφονται σε ανοικτά. Δηλαδή, το $U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y$ αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$.

Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος $Y$ έχει στην ουσία την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την $\pi$.

**Παρατήρηση 5.1.3.** Κάθε απεικόνιση πηλίκο είναι συνεχής απεικόνιση, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (Άσκηση).

**Παρατήρηση 5.1.4.** Αν η $\pi : X \to Y$ είναι απεικόνιση πηλίκο και ο $X$ είναι συμπαγής (ή συνεκτικός), τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $Y$ είναι επίσης συμπαγής (ή συνεκτικός).

**Παράδειγμα 5.1.5** (Το βασικό παράδειγμα)**.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον $X$. Συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ και με $X/\!\sim$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Θεωρούμε τη φυσική προβολή $\pi : X \to X/\!\sim$, όπου $\pi(x) = [x]$. Το σύνολο $X/\!\sim$ εφοδιασμένο με την αντίστοιχη τοπολογία πηλίκο λέγεται **χώρος πηλίκο** (ή και χώρος ταυτοποίησης).

**Ορισμός 5.1.6.** Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων λέγεται **ανοικτή** (αντ. **κλειστή**), αν απεικονίζει τα ανοικτά (αντ. κλειστά) υποσύνολα του $X$ σε ανοικτά (αντ. κλειστά) υποσύνολα του $Y$.

**Παράδειγμα 5.1.7.** Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$, όπου ο $X$ είναι συμπαγής και ο $Y$ Hausdorff, είναι κλειστή (γιατί;).

**Παράδειγμα 5.1.8.** Έστω $X, Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $X \times Y$ ο αντίστοιχος χώρος γινόμενο. Η πρώτη προβολή $\pi_1 : X \times Y \to X$ είναι ανοικτή απεικόνιση (γιατί;).

Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες των απεικονίσεων (και χώρων) πηλίκο.

**Θεώρημα 5.1.9.** *Έστω $X, Y, Z$ τοπολογικοί χώροι και $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο.*

1. *Κάθε συνεχής, επί και ανοικτή (ή κλειστή) απεικόνιση $f : X \to Y$, είναι απεικόνιση πηλίκο.*

2. *Μια απεικόνιση $f : Y \to Z$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η σύνθεση $f \circ \pi$ είναι συνεχής.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Z$ η οποία είναι σταθερή σε κάθε νήμα $\pi^{-1}(\{y\})$ της $\pi$, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{f} : Y \to Z$, έτσι ώστε $f = \tilde{f} \circ \pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f=\tilde{f}\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "\tilde{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

4. *Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $X$ με $x \sim x'$, αν και μόνο αν $\pi(x) = \pi(x')$ και θεωρούμε τον αντίστοιχο χώρο πηλίκο $X/\sim$. Τότε οι χώροι $Y$ και $X/\sim$ είναι ομοιομορφικοί. (Δηλαδή κάθε χώρος πηλίκο είναι όπως στο βασικό παράδειγμα).*

*Απόδειξη.* 1. Ας υποθέσουμε ότι η $f$ είναι ανοικτή (ομοίως αν $f$ κλειστή). Η μία κατεύθυνση έπεται άμεσα από τη συνέχεια της $f$. Αντίστροφα, αν το $U$ είναι υποσύνολο του $Y$ για το οποίο το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$, τότε η εικόνα $f\big(f^{-1}(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y$, αφού η $f$ είναι ανοικτή. Όμως η $f$ είναι και επί. Άρα $f\big(f^{-1}(U)\big) = U$ ανοικτό υποσύνολο του $Y$.
2. Πάλι η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η σύνθεση $f \circ \pi$ είναι συνεχής. Αν το $U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Z$, τότε το $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$. Όμως $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ και η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο. Έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y$, το οποίο σημαίνει ότι η $f$ είναι συνεχής.
3. Δοθέντος $y \in Y$ υπάρχει κάποιο $x \in X$, έτσι ώστε $\pi(x) = y$. Ορίζουμε $\tilde{f}(y) = f(x)$. Εφόσον η $f$ είναι σταθερή σε κάθε νήμα, η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή του $x$). Επίσης, η $\tilde{f}$ έχει ορισθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιείται η

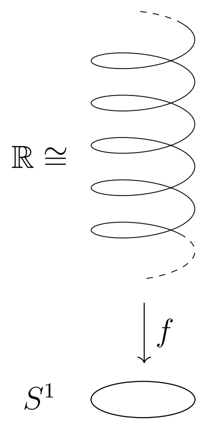
σχέση $f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x)$, για κάθε $x \in X$. Επιπροσθέτως, η $\tilde{f}$ είναι μοναδική με αυτήν την ιδιότητα: αν έχουμε απεικόνιση $g : Y \to Z$ με $g \circ \pi = f$ και $y \in Y$, τότε $y = \pi(x)$ για κάποιο $x \in X$ και $\tilde{f}(y) = f(x) = g \circ \pi(x) = g(y)$. Τέλος, η συνέχεια της $\tilde{f}$ προκύπτει από τον προηγούμενο ισχυρισμό, γιατί $\tilde{f} \circ \pi = f$ συνεχής.
4. Έστω $f : X \to X/\!\sim$ η φυσική προβολή, δηλαδή $f(x) = [x]$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $f$ είναι σταθερή στα νήματα της $\pi$ και η $\pi$ στα νήματα της $f$.

Σημειώνουμε επίσης ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι απεικονίσεις πηλίκο. Συνεπώς, από το 3) υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{f} : Y \to X/\!\sim$ με $\tilde{f} \circ \pi = f$ και μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{g} : X/\!\sim \to Y$ με $\tilde{g} \circ f = \pi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] & X/\!\sim \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"]
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ έχουμε: $\tilde{f} \circ \tilde{g}[x] = \tilde{f} \circ \tilde{g} \circ f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x) = f(x) = [x]$ και έτσι $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{Id}_{X/\sim}$. Αν $y \in Y$, τότε $y = \pi(x)$ για κάποιο $x \in X$ και όπως πριν έχουμε: $\tilde{g} \circ \tilde{f}(y) = \tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \pi(x) = \tilde{g} \circ f(x) = \pi(x) = y$. Δηλαδή, $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_Y$. Συνεπώς η $\tilde{f}$ είναι 1-1 και επί (γιατί επιδέχεται δεξί και αριστερό αντίστροφο), συνεχής με αντίστροφη την $(\tilde{f})^{-1} = \tilde{g}$ η οποία είναι επίσης συνεχής. Τελικά, η $\tilde{f} : Y \to X/\!\sim$ είναι ο απαιτούμενος ομοιομορφισμός. □

Όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, το 4) του προηγούμενου θεωρήματος αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή ενός χώρου πηλίκο.

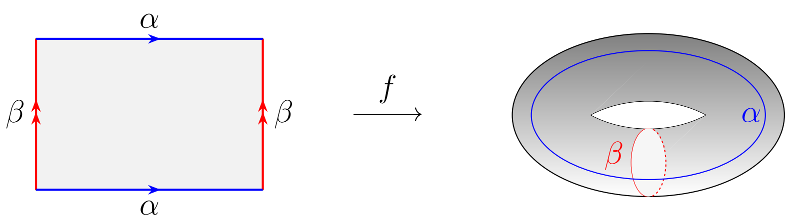



**Σχήμα 5.1:** *Η απεικόνιση πηλίκο από τον $\mathbb{R}$ στον κύκλο.*

**Παράδειγμα 5.1.10.** Στον χώρο $\mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Z}$. Τότε $S^1 \cong \mathbb{R}/\sim$. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to S^1$

με τύπο $f(x) = e^{2\pi i x}$ και παρατηρούμε ότι $x \sim y$ αν και μόνο αν $f(x) = f(y)$. Η $f$ είναι επί, συνεχής, ανοικτή (γιατί η εικόνα του ανοικτού διαστήματος $(a, b)$ αποτελείται από τα σημεία στην $S^1$ «γωνίας» μεταξύ $2\pi a$ και $2\pi b$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο της $S^1$) και συνεπώς απεικόνιση πηλίκο. Από τον τέταρτο ισχυρισμό του προηγούμενου θεωρήματος έπεται ότι $S^1 \cong \mathbb{R}/\sim$.

**Παράδειγμα 5.1.11.** (Η σπείρα (torus) ) Στον χώρο $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που παράγεται από τις «ταυτίσεις» $(0, y) \sim (1, y)$ και $(x, 0) \sim (x, 1)$, $x, y \in [0, 1]$. Τότε $I^2/\sim \cong S^1 \times S^1$. Πράγματι, έστω $f : I^2 \to S^1 \times S^1$ με $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Τότε η $f$ είναι επί, συνεχής και κλειστή (αφού $I^2$ συμπαγής και $S^1 \times S^1$ Hausdorff). Δηλαδή, η $f$ είναι απεικόνιση πηλίκο η οποία είναι άμεσο να διαπιστώσουμε ότι διατηρεί τα νήματα της φυσικής προβολής $I^2 \to I^2/\sim$. Ο ισχυρισμός έπεται από το προηγούμενο θεώρημα.




**Σχήμα 5.2:** *Η σπείρα $T = S^1 \times S^1$ ως χώρος πηλίκο.*

**Παράδειγμα 5.1.12.** (Χώροι τροχιών) Έστω $G$ μια ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός τοπολογικού χώρου $X$. Η δράση ορίζει με φυσικό τρόπο μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο $X$, όπου δύο στοιχεία του χώρου είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια τροχιά. Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο συμβολίζεται με $X/G$ και αναφέρεται ως χώρος τροχιών της δράσης.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε τη δράση της αβελιανής ομάδας $\mathbb{Z}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ με μετατοπίσεις (δηλ. $g * x = g + x$) δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1 \times \cdots S^1}_{n-\text{φορές}}$.

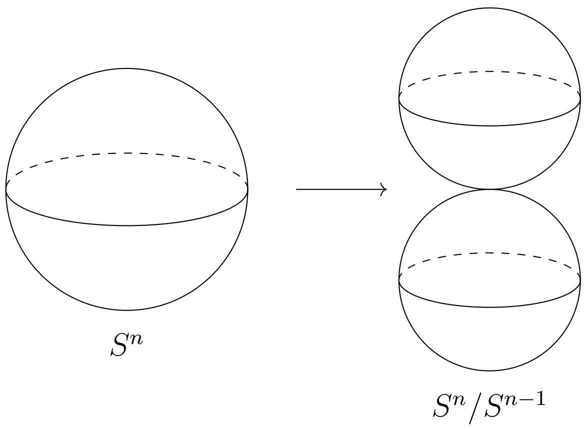
**Παράδειγμα 5.1.13.** (Ο πραγματικός προβολικός χώρος) Η ομάδα $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, με τον συνήθη πολλαπλασιασμό, δρα στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $n \geq 1$, με ομοιομορφισμούς: $g * (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (gx_1, \ldots, gx_{n+1})$. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$), είναι ο αντίστοιχος χώρος τροχιών. Η τροχιά ενός σημείου του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (δηλαδή ένα στοιχείο του προβολικού χώρου $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{R}^*)$, είναι ο μονοδιάστατος γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το σημείο αυτό εκτός από την αρχή των αξόνων. Ο περιορισμός $\psi = \pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{RP}^n$ της απεικόνισης πηλίκο $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι συνεχής και επί, όπου $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι η $n$-διάστατη (μοναδιαία) σφαίρα. Εφόσον η σφαίρα είναι συμπαγής και συνεκτική, έπεται ότι και ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι συμπαγής και συνεκτικός.

**Παράδειγμα 5.1.14.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $A_1, \ldots, A_k$ μια πεπερασμένη οικογένεια ξένων, κλειστών υποσυνόλων του $X$. Ορίζουμε στον $X$ σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x, y \in A_i$ για κάποιο $i$ ή $x = y$ αν τα $x$, $y$ δεν ανήκουν στην ένωση $\cup_{i=1}^k A_i$. Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο $X/\!\sim\, = X/(A_1, \ldots, A_k)$ προκύπτει από τον $X$ θεωρώντας κάθε $A_i$ ως ένα σημείο.

Στο σχήμα 5.3 βλέπουμε για $n = 2$ τον χώρο $X/A$, όπου $X = S^n$ και

$$A = \big\{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in S^n\big\}$$

ο υπόχωρος της σφαίρας $S^n$ που είναι ομοιομορφικός με την $S^{n-1}$. Ο χώρος $X/A$ αποτελείται από δύο αντίτυπα της $S^n$ που έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, την εικόνα του $A$.




**Σχήμα 5.3:** *Ο χώρος πηλίκο $S^n/S^{n-1}$.*

**Παράδειγμα 5.1.15.** Στον χώρο $X = \mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με $x \sim y$, αν τα $x, y$ είναι μη-μηδενικά. Τότε έχουμε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, την $[0] = \{0\}$ και την $[1] = \mathbb{R}^*$. Δηλαδή, ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο $X/\sim$ αποτελείται από δύο στοιχεία. Παρατηρούμε ότι ο $X/\sim$ δεν είναι Hausdorff, αφού το μονοσύνολό του $[1]$ δεν είναι κλειστό (αν ήταν, τότε το $[0]$ θα ήταν ανοικτό και κατά συνέπεια το $\{0\} = \pi^{-1}([0])$ θα ήταν ανοικτό στον $\mathbb{R}$).

## 5.2 Χώροι Επισύναψης

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε έναν χώρο πηλίκο ο οποίος δεν είναι Hausdorff. Γενικότερα, για έναν χώρο πηλίκο είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε αν ικανοποιούνται κάποια από τα συνήθη διαχωριστικά αξιώματα. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μια κατηγορία χώρων πηλίκο οι οποίοι είναι φυσιολογικοί, όχι απλά Hausdorff. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό:

**Ορισμός 5.2.1.** Ένας τοπολογικός χώρος $X$ λέγεται **φυσιολογικός** (normal), αν τα μονοσύνολά του είναι κλειστά και για κάθε ζεύγος $A$, $B$ ξένων, κλειστών υποσυνόλων του $X$, υπάρχουν ξένα, ανοικτά υποσύνολα του $X$ που περιέχουν τα $A$ και $B$ αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος και κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός.

**Ορισμός 5.2.2.** Η ξένη ένωση μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων $(X_a)_{a\in I}$ είναι η ένωση των (ξένων) τοπολογικών χώρων $X_a \times \{a\}$. Συμβολίζουμε με $\bigsqcup_{a\in I} X_a$. Δηλαδή:

$$\bigsqcup_{a\in I} X_a = \bigcup_{a\in I} \big(X_a \times \{a\}\big) = \big\{(x,a) \,:\, a \in I \text{ και } x \in X_a\big\}$$

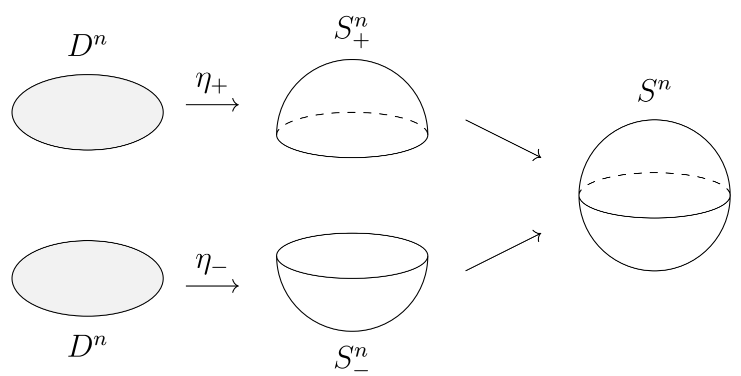
Η ξένη ένωση $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ γίνεται τοπολογικός χώρος ως εξής: ένα υποσύνολο $U$ είναι ανοικτό στο $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ αν και μόνο αν η τομή $U \cap \big(X_a \times \{a\}\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\big(X_a \times \{a\}\big)$ για κάθε $a \in I$. Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι η πεπερασμένη ξένη ένωση συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.

Κάθε χώρος $X_a$ θεωρείται ως υποσύνολο (υπόχωρος) του $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ μέσω της εμφύτευσης $i_a : X_a \hookrightarrow \bigsqcup_{a\in I} X_a$, όπου $i_a(x) = (x,a)$.

**Ορισμός 5.2.3.** Έστω $X, Y$ δύο τοπολογικοί χώροι, $A$ ένα κλειστό υποσύνολο του $X$ και $f : A \to Y$ συνεχής (το $A$ θεωρείται ως τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία, την τοπολογία του υπόχωρου). Ορίζουμε τον χώρο πηλίκο $Y \cup_f X = (Y \sqcup X)/a \sim f(a)$, για κάθε $a \in A$, και λέμε ότι ο χώρος $Y \cup_f X$ προκύπτει από την **επισύναψη του** $X$ **στον** $Y$ **κατά μήκος του** $A$ **διά μέσου της** $f$. Δηλαδή, είναι ο χώρος πηλίκο της ξένης ένωσης $Y \sqcup X$ ως προς τη διαμέριση: $\{x\}$, $x \in X \setminus A$ και $\Big\{\{y\} \cup f^{-1}(y)\Big\}$, $y \in Y$.

**Παράδειγμα 5.2.4.** Για κάθε $n \geq 1$ και $Y = \{x_0\}$ έναν χώρο μονοσύνολο, θεωρούμε τη σταθερή απεικόνιση $f : \partial D^n \to \{x_0\}$. Τότε ο χώρος $\{x_0\} \cup_f D^n$ είναι στην ουσία ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ και είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $S^n$ (βλ. Άσκηση 11).

**Παράδειγμα 5.2.5.** Αν $i : \partial D^n \hookrightarrow D_n$ είναι η ένθεση, δηλαδή $i(x) = x$, τότε ο χώρος $D^n \cup_i D^n$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $S^n$. Πράγματι, θεωρούμε τις απεικονίσεις $\eta_+, \eta_- : D^n \to S^n$ με $\eta_+(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ και $\eta_-(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|^2})$, οι οποίες δίνουν ομοιομορφισμούς από τον δίσκο $D^n$ στο πάνω $S^n_+ = \big\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\big\}$ και κάτω ημισφαίριο $S^n_- = \big\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\big\}$, αντίστοιχα. Η απεικόνιση $\phi : D_n \sqcup D_n \to S^n$ που δίνεται από την $\eta_+$ στο πρώτο αντίτυπο του δίσκου και από την $\eta_-$ στο δεύτερο, είναι επί, συνεχής και κλειστή (αφού $D_n \sqcup D_n$ συμπαγής και $S^n$ Hausdorff). Συνεπώς η $\phi$ είναι απεικόνιση πηλίκο για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι σταθερή σε κάθε νήμα της απεικόνισης πηλίκο που αντιστοιχεί στον ορισμό του χώρου $D^n \cup_i D^n$. Από το Θεώρημα 5.1.9 (4), έπεται ότι $D^n \cup_i D^n \cong S^n$.




**Σχήμα 5.4:** $D^n \cup_i D^n \cong S^n$.

**Πρόταση 5.2.6.** *Έστω $X$ και $Y$ ένα ζεύγος (ξένων) τοπολογικών χώρων, $A$ ένα κλειστό υποσύνολο του $X$, $f : A \to Y$ συνεχής, $Z_f = Y \cup_f X$ ο χώρος που προκύπτει από τον $Y$ με την επισύναψη του $X$ κατά μήκος του $A$ μέσω της $f$ και $\pi : Y \cup X \to Z_f$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.*

1. *Ο περιορισμός $\pi|_Y : Y \to Z_f$ είναι κλειστή απεικόνιση η οποία απεικονίζει ομοιομορφικά τον $Y$ σε έναν κλειστό υπόχωρο του $Z_f$.*

2. *Ο περιορισμός* $\pi|_{X-A} : X - A \to Z_f$ *είναι ανοικτή απεικόνιση η οποία απεικονίζει ομοιομορφικά το* $X - A$ *σε έναν ανοικτό υπόχωρο του* $Z_f$.

*Απόδειξη.* 1. Ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι συνεχής και $1-1$, αφού διαφορετικά στοιχεία του $Y$ δεν ταυτοποιούνται μεταξύ τους. Αν το $\Gamma$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $Y$, τότε το $\pi^{-1}\big(\pi(\Gamma)\big) = \Gamma \cup f^{-1}(\Gamma)$ είναι κλειστό στον $Y \cup X$, αφού το σύνολο $\Gamma$ είναι κλειστό στον $Y$ και το $f^{-1}(\Gamma)$ είναι κλειστό στον υπόχωρο $A$ και έτσι κλειστό στον $X$. Άρα το $\pi(\Gamma)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Z_f$, αφού η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο, που σημαίνει ότι ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι κλειστή απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, η εικόνα του $Y$ μέσω της $\pi$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Z_f$ και ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι συνεχής, $1-1$ και κλειστή.
2. Όπως πριν, αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός $\pi|_{X-A}$ είναι ανοικτή απεικόνιση. Έστω, λοιπόν, $U$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $X - A$. Εφόσον η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο, η εικόνα του $\pi(U)$ είναι ανοικτό στον $Z_f$ αν και μόνο αν το $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y \cup X$. Όμως, από τον ορισμό της σχέσεως ισοδυναμίας (μέσω της οποίας ορίζεται ο $Z_f$) έχουμε ότι $U = \pi^{-1}\big(\pi(U)\big)$ (οι όποιες ταυτοποιήσεις σημείων του $X$ λαμβάνουν χώρα στον υπόχωρο $A$). Εφόσον το $U$ είναι ανοικτό στον $X - A$ και το $X - A$ είναι ανοικτό στον $Y \cup X$, έπεται ότι το $U$ είναι ανοικτό στον $Y \cup X$ και τελικά το $\pi(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Z_f$. □

**Παρατήρηση 5.2.7.** Λόγω της προηγούμενης πρότασης, μπορούμε να θεωρούμε τον χώρο $Y$ ως κλειστό υπόχωρο του $X \cup_f Y$ και τον $X - A$ ως ανοικτό υπόχωρο του $X \cup_f Y$, ταυτίζοντάς τους με τις εικόνες τους μέσω της $\pi$. Έτσι ο $Z_f$ μπορεί να θεωρηθεί ως ξένη ένωση των $Y$ και $X - A$.

**Θεώρημα 5.2.8.** *Έστω* $X$ *και* $Y$ *ένα ζεύγος (ξένων) τοπολογικών χώρων,* $A$ *ένα κλειστό υποσύνολο του* $X$, $f : A \to Y$ *συνεχής και* $Z_f = Y \cup_f X$. *Αν οι χώροι* $X$ *και* $Y$ *είναι φυσιολογικοί, τότε και ο χώρος* $Z_f$ *είναι φυσιολογικός.*

*Απόδειξη.* Όπως πριν, συμβολίζουμε με $\pi : Y \cup X \to Z_f$ την αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα μονοσύνολα του $Z_f$ είναι κλειστά. Έστω $z \in Z_f$. Αν $z \in \pi(Y)$, τότε το $\{z\}$ είναι κλειστό, αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά στον $Y$ και ο περιορισμός $\pi|_Y : Y \to Z_f$ είναι κλειστή απεικόνιση. Αν $z \notin \pi(Y)$, τότε η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(z)$ είναι μονοσύνολο του $X$ και άρα κλειστό στον $X$. Εφόσον ο $X$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Y \cup X$, το $\pi^{-1}(z)$ είναι επίσης κλειστός υπόχωρος του $Y \cup X$. Αφού η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο, έπεται ότι το $\{z\}$ είναι κλειστό στον $Z_f$.

Έστω $A_1$ και $A_2$ δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα του $Z_f$. Τότε τα $A_1 \cap \pi(Y)$ και $A_2 \cap \pi(Y)$ είναι ξένα, κλειστά υποσύνολα του $\pi(Y)$. Από την κανονικότητα του $\pi(Y)$ (είναι ομοιομορφικός με τον $Y$), υπάρχουν ξένες ανοικτές περιοχές $U_1$ και $U_2$ των $A_1 \cap \pi(Y)$ και $A_2 \cap \pi(Y)$, αντίστοιχα, των οποίων, επιπροσθέτως, οι κλειστότητες είναι ξένες. Εφόσον το $\pi(Y)$ είναι κλειστό στον $Z_f$, οι κλειστότητες των $U_1$ και $U_2$ ταυτίζονται με τις κλειστότητές τους στον $Z_f$.

Θεωρούμε τα ξένα και κλειστά υποσύνολα

$$B_1 = A_1 \cup \overline{U_1} \ \text{ και } \ B_2 = A_2 \cup \overline{U_2}$$

του $Z_f$ και τα ξένα κλειστά υποσύνολα

$$C_1 = \pi^{-1}(B_1) \cap X \ \text{ και } \ C_2 = \pi^{-1}(B_2) \cap X$$

του $X$. Εφόσον ο $X$ είναι κανονικός, υπάρχουν ξένες, ανοικτές περιοχές $V_1$ και $V_2$ (στον $X$) των $C_1$ και $C_2$, αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι τα

$$\Gamma_1 = \pi(V_1 - A) \cup U_1 \ \text{ και } \ \Gamma_2 = \pi(V_2 - A) \cup U_2$$

είναι ανοικτά υποσύνολα του $Z_f$. Πράγματι, εφόσον η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι αντίστροφες εικόνες τους $\pi^{-1}(\Gamma_1)$ και $\pi^{-1}(\Gamma_2)$ είναι ανοικτά στον $Y \cup X$. Παρατηρούμε ότι $\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap Y = \pi^{-1}(U_1)$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y$, ενώ

$$\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X = \big((V_1 - A) \cup \pi^{-1}(U_1)\big) \cap X = (V_1 - A) \cup f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big).$$

Εφόσον το $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big)$ είναι ανοικτό στον υπόχωρο $A$ του $X$, υπάρχει ανοικτό $O$ του $X$ τέτοιο, ώστε $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) = A \cap O$. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) = A \cap O = A \cap O \cap V_1,$$

αφού $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) \subseteq C_1 \subseteq V_1$. Έτσι

$$\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X = (V_1 - A) \cup (A \cap O \cap V_1) = (V_1 - A) \cup (O \cap V_1),$$

όπου τα $V_1 - A$ και $O \cap V_1$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $X$. Έπεται ότι το $\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X$ είναι ανοικτό και στον $X$, που σημαίνει ότι είναι ανοικτό στον $Y \cup X$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το $\pi^{-1}(\Gamma_2) \cap X$ είναι ανοικτό στον $Y \cup X$.

Τα $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ είναι ανοικτές περιοχές των $A_1$ και $A_2$, αντίστοιχα: Έστω $a \in A_1$. Αν $a \in \pi(Y)$, τότε $a \in U_1 \subseteq \Gamma_1$. Αν $a \notin \pi(Y)$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X - A$ με $a = \pi(x)$. Εφόσον το $A_1$ περιέχεται στο $B_1$, έπεται ότι $x \in C_1 \subseteq V_1$, δηλαδή $x \in V_1 - A$ και έτσι $a \in \Gamma_1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $A_2 \subseteq \Gamma_2$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι τα $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ είναι ξένα. Τα $U_1$ και $U_2$ έχουν επιλεγεί ξένα, όπως και τα $V_1$, $V_2$. Αφού ο περιορισμός της $\pi$ στο $X - A$ είναι ομοιομορφισμός, έχουμε ότι τα $\pi(V_1 - A)$ και $\pi(V_2 - A)$ είναι ξένα. Από τον εγκλεισμό $\pi(V_2 - A) \subseteq Z_f - \pi(Y)$, προκύπτει ότι $\pi(V_2 - A) \cap U_1 = \emptyset$, αφού $U_1 \subseteq \pi(Y)$. Ομοίως, $\pi(V_1 - A) \cap U_2 = \emptyset$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Συνοψίζοντας, τα $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ είναι ξένες, ανοικτές περιοχές των $A_1$, $A_2$, αντίστοιχα, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της φυσιολογικότητας του $Z_f$. $\square$

## 5.3 Συμπλέγματα Κελιών

Τα συμπλέγματα κελιών αποτελούν μια ευρεία και σημαντική κλάση τοπολογικών χώρων για τους οποίους υπάρχει μέθοδος υπολογισμού της θεμελιώδους ομάδας και των ομάδων ομολογίας.

Ένα $n$-**κελί** $e^n$ είναι ένας χώρος ομοιομορφικός με τον ανοικτό δίσκο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ στον $\mathbb{R}^n$.

**Ορισμός 5.3.1.** Ένα **σύμπλεγμα κελιών** είναι ένας τοπολογικός χώρος $X$, ο οποίος ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1. Αρχίζουμε με ένα διακριτό σύνολο $X^0$ (δηλ. διακριτό τοπολογικό χώρο), του οποίου τα στοιχεία αναφέρονται ως 0-κελιά.

2. Κατασκευάζουμε τον $n$-σκελετό $X^n$ από τον $X^{n-1}$ επισυνάπτοντάς του μια οικογένεια κελιών $e_a^n$ διάστασης $n$ μέσω (συνεχών πάντα) απεικονίσεων
$$\phi_a^n : \partial D_a^n = S^{n-1} \to X^{n-1}.$$
Δηλαδή έχουμε
$$\phi : \sqcup_a \partial D_a^n \to X^{n-1} \;\; \text{και} \;\; X^n = X^{n-1} \cup_\phi \left( \sqcup_a D_a^n \right),$$
όπου $\phi$ είναι η συνεχής απεικόνιση της οποίας ο περιορισμός σε κάθε $\partial D_a^n$ είναι η $\phi_a^n$. Συνολοθεωρητικά, $X^n = X^{n-1} \bigsqcup_a e_a^n$.

3. Η ανωτέρω διαδικασία είτε σταματάει σε κάποιο πεπερασμένο βήμα και $X = X^n$, $n < \infty$ είτε συνεχίζει και έχουμε $X = \cup_n X^n$ (λόγω της Πρότασης 5.2.6 μπορούμε να θεωρούμε τον χώρο $X^{n-1}$ ως υπόχωρο του $X^n$). Στη δεύτερη περίπτωση, ο $X$ εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία. Δηλαδή, ένα υποσύνολο $A$ του $X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν η τομή $A \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X^n$ για κάθε $n$ (ή, ισοδύναμα, το $A$ είναι ανοικτό στον $X$ αν και μόνο το $A \cap X^n$ είναι ανοικτό στον $X^n$).

Η σύνθεση $\Phi_a^n : D_a^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_a D_a^n \xrightarrow{\pi} X^n \hookrightarrow X$ αναφέρεται ως **χαρακτηριστική απεικόνιση** και επεκτείνει την $\phi_a^n$ υπό την έννοια ότι $\Phi_a^n|_{\partial D_a^n} = \pi \circ \phi_a^n$. Έχοντας ταυτίσει το $X^{n-1}$ με την εικόνα του μέσω της $\pi$, η προηγούμενη ισότητα γίνεται $\Phi_a^n|_{\partial D_a^n} = \phi_a^n$. Επιπλέον, από την Πρόταση 5.2.6, η $\Phi_a^n$ είναι ομοιομορφισμός στο εσωτερικό του δίσκου $D_a^n$ και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το κελί $e_a^n$ «κολλάει» στον $X$.

Αν $X = X^n$ για κάποιο $n$, τότε λέμε ότι το σύμπλεγμα κελιών $X$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Η **διάστασή** του είναι το μικρότερο τέτοιο $n$. Ένα σύμπλεγμα κελιών ονομάζεται **πεπερασμένο**, αν αποτελείται από πεπερασμένα το πλήθος κελιά. Από τους ορισμούς, έπεται εύκολα ότι ένα πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών είναι συμπαγής χώρος. Ο επαγωγικός ορισμός ενός συμπλέγματος κελιών $X$ μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε επαγωγικά επιχειρήματα κάτι που, όπως θα διαπιστώσουμε, είναι πολύ αποδοτικό. Για παράδειγμα, προκύπτει άμεσα με επαγωγή, ότι ο σκελετός $X^n$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε σύμπλεγμα κελιών είναι χώρος Hausdorff και έτσι, μεταξύ άλλων, τα συμπαγή του υποσύνολα είναι κλειστά. Δεν είναι πολύ πιο δύσκολο όμως να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο:

**Θεώρημα 5.3.2.** *Κάθε σύμπλεγμα κελιών $X$ είναι φυσιολογικός χώρος. Ιδιαιτέρως, ο $X$ είναι Hausdorff.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 5.2.8, έπεται επαγωγικά, ότι κάθε σκελετός $X^n$ του $X$ είναι φυσιολογικός χώρος. Υποθέτουμε λοιπόν, για τη συνέχεια, ότι το σύμπλεγμα κελιών $X$ έχει άπειρη διάσταση. Τα μονοσύνολα είναι κλειστά στον $X$, αφού η τομή $\{x\} \cap X^n$ είναι κλειστό στον $X^n$, για κάθε $x \in X$.

Έστω $A$ και $B$ δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα του $X$. Ορίζουμε $\Gamma_0 = A \cup B$ και για κάθε $n > 0$, ορίζουμε

$$\Gamma_n = A \cup B \cup X^1 \cup \cdots \cup X^n.$$

Ορίζουμε, επίσης, συνεχή απεικόνιση $\varphi_0 : \Gamma_0 \to [0,1]$, η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο του $A$ στο $0$ και κάθε στοιχείο του $B$ στο $1$. Για $n > 0$, ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία συνεχών απεικονίσεων $\varphi_n : \Gamma_n \to [0,1]$, όπου η κάθε μια επεκτείνει την προηγούμενη, ως εξής: Σημειώνουμε πρώτα ότι η τομή $\Gamma_n \cap X^{n+1}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{n+1}$, ο οποίος είναι φυσιολογικός χώρος. Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, ο περιορισμός της $\varphi_n$ στο $\Gamma_n \cap X^{n+1}$ επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση $\psi : X^{n+1} \to [0,1]$. Εφόσον τα $\Gamma_n$ και $X^{n+1}$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\Gamma_{n+1}$, επί της τομής των οποίων οι $\varphi_n$ και $\psi$ «συμφωνούν», ορίζεται συνεχής απεικόνιση $\varphi_{n+1} : \Gamma_{n+1} \to [0,1]$ που επεκτείνει την $\varphi_n$ (και την $\psi$, βλ. Λήμμα 6.1.4). Μέσω των διαδοχικών επεκτάσεων $\varphi_n$, ορίζεται απεικόνιση $\varphi : X \to [0,1]$, η οποία επεκτείνει καθεμία από τις $\varphi_n$ και είναι συνεχής, αφού ο $X$ είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς τα $X^n$, $n \geq 0$. Η $\varphi$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $A$, λαμβάνει την τιμή $1$ σε κάθε σημείο του $B$ και τα ζητούμενα ανοικτά που διαχωρίζουν τα $A$ και $B$ είναι οι αντίστροφες εικόνες μέσω της $\varphi$ των $[0, 1/3)$ και $(2/3, 1]$, αντίστοιχα. □

Έχοντας εξασφαλίσει ότι ένα σύμπλεγμα κελιών είναι χώρος Hausdorff, είναι εύκολο να δούμε κάποιες πρόσθετες ιδιότητες. Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών με κελιά $e_a^n$ και αντίστοιχες χαρακτηριστικές απεικονίσεις $\Phi_a^n : D_a^n \to X$.

1. $\Phi_a^n(D_a^n) = \overline{e_a^n}$ για κάθε $n$.

   Πράγματι, εφόσον ο χώρος $D_a^n$ είναι συμπαγής και ο $X$ Hausdorff, η εικόνα $\Phi_a^n(D_a^n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$ η οποία, αφού περιέχει το κελί, περιέχει και την κλειστότητά του, δηλαδή $\overline{e_a^n} \subseteq \Phi_a^n(D_a^n)$. Για τον άλλο εγκλεισμό, λόγω συνέχειας έχουμε
   $$\Phi_a^n(D_a^n) = \Phi_a^n(\overline{\mathrm{Int} D_a^n}) \subseteq \overline{\Phi_a^n(\mathrm{Int} D_a^n)} = \overline{e_a^n}.$$

2. Για κάθε κελί $e_a^n$ το σύνολο $\overline{e_a^n} - e_a^n$ περιέχεται σε μια ένωση πεπερασμένων το πλήθος κελιών διάστασης μικρότερης του $n$.

   Παρατηρούμε ότι $\overline{e_a^n} - e_a^n = \Phi_a^n(S^{n-1})$ και άρα το $\overline{e_a^n} - e_a^n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X$ (και άρα κλειστό αφού $X$ Hausdorff) που περιέχεται στο $X^{n-1}$. Για κάθε $m < n$, η τομή $X^m \cap (\overline{e_a^n} - e_a^n)$ είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς και ως εκ τούτου μπορεί να τέμνει μόνο πεπερασμένα το πλήθος κελιά $e_1^m, \ldots, e_{k_m}^m$ της διαφοράς $X^m - X^{m-1}$, αφού αυτά είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $X^m$ (τα οποία περιέχουν αντίτυπα κλειστών δίσκων των οποίων τα συμπληρώματα μαζί με τα κελιά δίνουν ανοικτό κάλυμμα του $X^m \cap (\overline{e^n_a} - e^n_a)$). Έπεται ότι

$$\overline{e^n_a} - e^n_a \subseteq \bigcup_{m<n} \{e^m_1, \dots, e^m_{k_m}\}.$$

3. Ένα υποσύνολο $K$ του $X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν η τομή $K \cap \overline{e^n_a}$ είναι κλειστό εντός του $\overline{e^n_a}$ για κάθε κελί $e^n_a$ του $X$.

   Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν το $K$ είναι κλειστό στο $X$, τότε η τομή $K \cap \overline{e^n_a}$ είναι κλειστό στο $\overline{e^n_a}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $K \cap \overline{e^n_a}$ είναι κλειστό στο $\overline{e^n_a}$ για κάθε κελί. Εφόσον το $\overline{e^n_a}$ είναι κλειστό στον $X$, η προηγούμενη υπόθεση είναι ισοδύναμη με την απαίτηση το $K \cap \overline{e^n_a}$ να είναι κλειστό στον $X$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, υποθέτουμε επίσης ότι η τομή $K \cap X^{n-1}$ είναι κλειστό στον $X^{n-1}$ (και άρα στον $X$). Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$\left(\Phi^n_a\right)^{-1}(K \cap X^n) = \left(\Phi^n_a\right)^{-1}(K \cap \overline{e^n_a} \cap X^n),$$

   αφού $\Phi^n_a(D^n_a) = \overline{e^n_a}$. Καθώς το $K \cap \overline{e^n_a} \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X^n$, συμπεραίνουμε ότι το $\left(\Phi^n_a\right)^{-1}(K \cap X^n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $D^n_a$. Αυτό σημαίνει ότι το $K \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X^n$ αφού η

$$\Phi^n_a : D^n_a \to \overline{e^n_a}$$

   είναι απεικόνιση πηλίκο (γιατί;). Τελικά, το $K \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X^n$ για κάθε $n$, και συνεπώς το $K$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.

**Παράδειγμα 5.3.3.** Η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ επιδέχεται τη δομή ενός μονοδιάστατου συμπλέγματος κελιών, με τους ακέραιους ως 0-κελιά και τα διαστήματα $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, ως 1-κελιά.

**Παράδειγμα 5.3.4.** Όπως εύκολα διαπιστώνουμε από το Σχήμα 5.2, η σπείρα $T$ έχει τη δομή ενός συμπλέγματος κελιών με ένα 0-κελί (την εικόνα των κορυφών του τετραγώνου), δύο 1-κελιά (των οποίων οι κλειστότητες είναι οι «κύκλοι» $\alpha$ και $\beta$) και ένα 2-κελί (το εσωτερικό του τετραγώνου).

**Παράδειγμα 5.3.5.** Η σφαίρα $S^n$, $n > 0$, έχει δομή συμπλέγματος κελιών με ένα 0-κελί και ένα $n$-κελί: σε ένα μονοσύνολο $\{x_0\}$ επισυνάπτουμε ένα $n$-κελί μέσω της χαρακτηριστικής απεικονίσεως $\Phi : D^n \to \{x_0\}$ που απεικονίζει κάθε σημείο του συνόρου στο $x_0$ (βλ. Άσκηση 11).

Από το Παράδειγμα 5.2.5, διαπιστώνουμε, επίσης, ότι μπορούμε να δούμε τη σφαίρα $S^n$, $n \geq 0$, ως σύμπλεγμα κελιών και με ένα διαφορετικό τρόπο: με ακριβώς δύο $m$-κελιά σε κάθε διάσταση $m \leq n$, έτσι ώστε ο $m$-σκελετός να είναι η $S^m$.

**Παράδειγμα 5.3.6.** Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$ (βλ. Παράδειγμα 5.1.13) είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα κελί διάστασης $m$ για κάθε $m \in \{0, 1 \ldots, n\}$.

Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n,\ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_0, x_1, \ldots, x_n],$$

και τον υπόχωρο

$$K_m = \big\{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n\ :\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\big\}$$

ο οποίος, βλέπουμε εύκολα, ότι είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{RP}^m$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση $\Phi^m : D^m \to K_m$ με τύπο

$$\Phi^m(y_1, \ldots, y_m) = [y_1, \ldots, y_m, \sqrt{1 - \|(y_1, \ldots, y_m)\|^2}, 0 \ldots, 0]$$

είναι συνεχής, επί και κλειστή (αφού ο $\mathbb{RP}^m$ είναι Hausdorff, Άσκηση 5). Επιπλέον, ο περιορισμός $\Psi$ της $\Phi^m$ στο εσωτερικό του δίσκου $D^m$ είναι 1-1. Παρατηρούμε ότι

$$\Phi^m(\mathrm{Int}D^m) = \big\{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n\ :\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0, x_m \neq 0\big\} = K_m \setminus K_{m-1}.$$

Εφόσον $(\Phi^m)^{-1}(K_m \setminus K_{m-1}) = \mathrm{Int}D^m$, η $\Psi : \mathrm{Int}D^m \to K_m \setminus K_{m-1}$ είναι κλειστή ως περιορισμός κλειστής (γιατί;) και άρα ομοιομορφισμός. Τελικά, οι απεικονίσεις επισύναψης των κελιών είναι οι $\phi^m : S^{m-1} = \partial D^m \to K_{m-1}$ με $\phi^m(y) = [y, 0, \ldots, 0]$ και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές απεικονίσεις οι $\Phi^m$. Έχουμε λοιπόν,

$$X^0 = \{\text{σημείο}\} \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots \subset X^n = \mathbb{R}^n,$$

όπου $X^m = K_m \cong \mathbb{RP}^m$ για κάθε $m \in \{1, \ldots, m\}$ και κάθε διαφορά $X^m \setminus X^{m-1}$ είναι ένα $m$-κελί.

# Ασκήσεις

5.1 Έστω $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο και $A$ ένα υποσύνολο του $X$. Ο *κορεσμός* (saturation) του $A$ είναι η ένωση όλων των νημάτων που τέμνουν το $A$, δηλαδή είναι το σύνολο $\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup_{y\in\pi(A)} \pi^{-1}(y)$. Το $A$ λέγεται *κορεσμένο* (saturated) αν και μόνο αν $A = \pi^{-1}\pi(A)$. Αποδείξτε ότι η $\pi$ είναι ανοικτή (κλειστή) αν και μόνο αν ο κορεσμός κάθε ανοικτού (κλειστού) υποσυνόλου $A$ του $X$ είναι ανοικτό (κλειστό) υποσύνολο του $X$.

5.2 Ο περιορισμός μιας απεικόνισης πηλίκο σε ένα κορεσμένο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο είναι απεικόνιση πηλίκο.

5.3 Ένας τοπολογικός χώρος $X$ του οποίου τα μονοσύνολα είναι κλειστά, λέγεται *κανονικός* (regular), αν για κάθε στοιχείο $x \in X$ και κάθε κλειστό υποσύνολο $B$ του $X$ που δεν περιέχει το $x$, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $X$ που περιέχουν το $x$ και το $B$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν ο $X$ είναι κανονικός και το $A$ κλειστό υποσύνολό του, τότε ο χώρος πηλίκο $X/A$ είναι Hausdorff. Αν επιπροσθέτως ο χώρος $X$ είναι φυσιολογικός (normal), τότε και ο $X/A$ είναι φυσιολογικός.

5.4 Έστω $X$ και $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ δύο συνεχείς απεικονίσεις, έτσι ώστε $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι απεικόνιση πηλίκο. Αν επιπλέον, ο $X$ είναι Hausdorff, τότε και ο $Y$ είναι Hausdorff.

5.5 Έστω $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο. Αν η $\pi$ είναι κλειστή και ο $X$ είναι φυσιολογικός, τότε ο $Y$ είναι φυσιολογικός και ιδιαιτέρως Hausdorff.

5.6 Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{RP}^1$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο $S^1$.

5.7 Αποδείξτε ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι Hausdorff, χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος 5.3.2.

5.8 Αν η $G$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός χώρου Hausdorff $X$, τότε ο χώρος τροχιών $X/G$ είναι επίσης Hausdorff.

5.9 Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ αν και μόνο αν τα σημεία $(x_0, y_0)$ και $(x_1, y_1)$ ανήκουν σε κάποιον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να περιγραφεί ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο.

5.10 Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, $n > 0$, ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό $\lambda$. Ποιος είναι ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο;

5.11 Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $S^n$. Υπόδειξη: χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή, θεωρήστε ομοιομορφισμό $f : \mathrm{Int}(D^n) \to S^n \setminus \{N\}$ και την απεικόνιση $\varphi : D^n \to S^n$ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \mathrm{Int}(D^n) \\ N, & \text{αν } x \in \partial D^n \end{cases}$$

5.12 Έστω $X = S^1 \times I$ και $A = S^1 \times \{1\}$. Να δειχθεί ότι $X/A \cong D^2$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $X \cong Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ και θεωρήστε την απεικόνιση $f : Y \to D^2$ με τύπο $f(x) = 2(|x| - 1/2)x$.

5.13 Κάθε συμπαγής υπόχωρος $K$ ενός συμπλέγματος κελιών $X$, περιέχεται στην ένωση πεπερασμένων το πλήθος κελιών του $X$.
Υπόδειξη: Αν όχι, τότε επιλέγουμε σημείο $x_a \in K \cap e^n_a$ για κάθε κελί $e^n_a$ για το οποίο η τομή είναι μη κενή. Κάθε υποσύνολο του συνόλου που αποτελείται από όλα τα $x_a$ είναι κλειστό.

5.14 Ένα σύμπλεγμα κελιών $X$ είναι συμπαγής χώρος αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο.

5.15 Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών και $Y$ ένας τοπολογικός χώρος. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν ο περιορισμός $f|_{\overline{e}} : \overline{e} \to Y$ είναι συνεχής για κάθε κελί $e$ του $X$.

Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών. Ένα σύμπλεγμα κελιών $Y$ λέγεται **υποσύμπλεγμα** του $X$, αν το $Y$ είναι υπόχωρος του $X$ και ο $n$-σκελετός $Y^n$ του $Y$ ισούται με $X^n \cap Y$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Διαφορετικά, η δομή του συμπλέγματος $Y$ καθορίζεται από τον υπόχωρο $Y$ και τη δομή του $X$ ως συμπλέγματος κελιών.

5.16 Έστω $Y$ ένα υποσύμπλεγμα ενός συμπλέγματος κελιών $X$.

(i) Κάθε κελί του $Y$ είναι κελί του $X$.

(ii) Ένα κελί $e$ του $X$ είναι κελί του $Y$ αν και μόνο αν η τομή $e \cap Y$ είναι μη κενή.

5.17 Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών και $Y$ η ένωση μιας οικογένειας $O$ κελιών του $X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το υποσύνολο $Y$ είναι υποσύμπλεγμα του $X$.

(ii) Το $Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X$.

(iii) Το $Y$ περιέχει την κλειστότητα κάθε κελιού της οικογένειας $O$.

5.18 Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών.

(i) Αυθαίρετες τομές και αυθαίρετες ενώσεις υποσυμπλεγμάτων του $X$ είναι υποσυμπλέγματα του $X$.

(ii) Κάθε σκελετός $X^n$ του $X$ είναι υποσύμπλεγμα του $X$.

(iii) Κάθε ένωση $n$-κελιών του $X$ με τον $(n-1)$-σκελετό $X^{n-1}$ είναι υποσύμπλεγμα του $X$.

(iv) Κάθε κελί του $X$ περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα του $X$.

# Βιβλιογραφία

[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] A. T. Lundell and S. Weingram. Topology of CW-complexes, Van Nostrand, New York, 1969.

[4] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[5] J. W. Vick. Homology Theory, An Introduction to Algebraic Topology, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 145, Springer Verlag, 1994.

# Κεφάλαιο 6

# Η Θεμελιώδης Ομάδα

## Περιεχόμενα

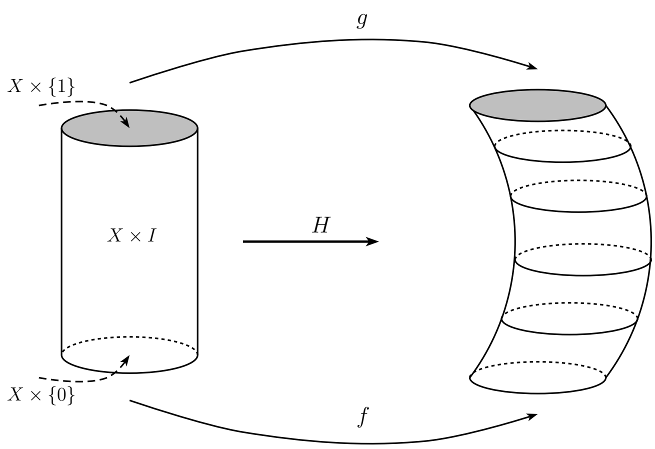


Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε το πλέον βασικό αντικείμενο της αλγεβρικής τοπολογίας, τη θεμελιώδη ομάδα. Προκειμένου να γίνει αυτό, ορίζουμε πρώτα την έννοια της ομοτοπίας μεταξύ συνεχών απεικονίσεων τοπολογικών χώρων και αποδεικνύουμε, μεταξύ άλλων, ότι η έννοια της ομοτοπίας μεταξύ μονοπατιών ενός τοπολογικού χώρου είναι σχέση ισοδυναμίας. Η θεμελιώδης ομάδα ενός χώρου $X$ σε ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των μονοπατιών του $X$ με αρχή και τέλος το σημείο αναφοράς εφοδιασμένο με κατάλληλο γινόμενο.

## 6.1 Ομοτοπία

**Ορισμός 6.1.1.** Έστω $X$, $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Μια **ομοτοπία** από την $f$ στην $g$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ τέτοια, ώστε $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

Αν υπάρχει ομοτοπία $H$ από την $f$ στην $g$, λέμε ότι οι $f$ και $g$ είναι **ομοτοπικές** και




**Σχήμα 6.1:** *Σχηματικά η έννοια της ομοτοπίας.*

συμβολίζουμε με $f \simeq g$ ή και $f \overset{H}{\simeq} g$, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε συγκεκριμένη ομοτοπία.

Μια ομοτοπία ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $H_t : X \longrightarrow Y$, $t \in [0,1]$, έτσι ώστε $H_0 = f$ και $H_1 = g$. Συνήθως σκεφτόμαστε την παράμετρο $t$ ως χρόνο και την ομοτοπία $H$ ως «μετασχηματισμό» της $f$ στην $g$, καθώς ο χρόνος πηγαίνει από το 0 στο 1. Η συνέχεια της $H$ εγγυάται ότι ο μετασχηματισμός γίνεται με συνεχή τρόπο χωρίς «σπασίματα» ή «άλματα».

**Παράδειγμα 6.1.2.** Για κάθε τοπολογικό χώρο $X$, κάθε δύο συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομοτοπικές. Πράγματι, ορίζουμε τη («γραμμική») ομοτοπία $H : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μέσω του τύπου $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Γενικότερα, αν ο $Y$ είναι κυρτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε κάθε δύο συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικές, αφού σε αυτήν την περίπτωση ο ίδιος τύπος για την ομοτοπία δίνει ότι $H(x,t) \in Y$ για κάθε $x \in X$ και $t \in [0,1]$.

Στα επόμενα δύο λήμματα παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της ομοτοπίας.

**Λήμμα 6.1.3.** *Για κάθε ζεύγος τοπολογικών χώρων $X$ και $Y$, η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από τον $X$ στον $Y$.*

*Απόδειξη.* Αποδεικνύουμε ότι η σχέση που ορίζεται μέσω της ομοτοπίας, όπως πριν, είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- Αν $f : X \longrightarrow Y$, τότε είναι άμεσο ότι $f \simeq f$. Πράγματι, ορίζουμε $H(x,t) = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $t \in [0,1]$.

- Αν η $H$ είναι μια ομοτοπία από την $f$ στην $g$ (δηλαδή $f \overset{H}{\simeq} g$), τότε η $\widetilde{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ είναι ομοτοπία από την $g$ στην $f$ και άρα $g \simeq f$.

- Αν $f \overset{F}{\simeq} g$ και $g \overset{G}{\simeq} h$, τότε ορίζουμε ομοτοπία $H$ από την $f$ στην $h$ ως εξής:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & \text{αν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ G(x,2t-1), & \text{αν } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

  Είναι άμεσο ότι η παραπάνω ομοτοπία $H$ είναι καλά ορισμένη, ενώ η συνέχειά της έπεται από το ακόλουθο λήμμα.

$\square$

**Λήμμα 6.1.4** (Λήμμα της συγκόλλησης). *Αν $F_1, \ldots, F_n$ είναι ένα πεπερασμένο κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου $X$ αποτελούμενο από κλειστά υποσύνολά του και $f : X \to Y$ είναι μια απεικόνιση από τον $X$ σε έναν τοπολογικό χώρο $Y$ τέτοια, ώστε ο περιορισμός της $f|_{F_i}$ σε κάθε $F_i$ είναι συνεχής, τότε και η $f$ είναι συνεχής.*

Εφόσον δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, καθένα από τα υποσύνολα $F_i$ του $X$ θεωρείται ότι είναι εφοδιασμένο με τη σχετική τοπολογία.

*Απόδειξη.* Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f$ αντιστρέφει τα κλειστά υποσύνολα του $Y$ σε κλειστά υποσύνολα του $X$. Αν το $A$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $Y$, τότε

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(f^{-1}(A) \cap F_i\big) = \bigcup_{i=1}^{n} \big((f|_{F_i})^{-1}(A)\big).$$

Εφόσον ο περιορισμός $f|_{F_i}$ της $f$ σε κάθε $F_i$ είναι συνεχής, έπεται ότι καθένα από τα σύνολα $(f|_{F_i})^{-1}(A)$ είναι κλειστό στον $F_i$ και άρα κλειστό στον $X$. Συνεπώς, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών. $\square$

**Λήμμα 6.1.5.** *Η ομοτοπία διατηρείται από συνθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, έστω $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ και $g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z$ συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων. Αν $f_0 \simeq f_1$ και $g_0 \simeq g_1$ , τότε $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_0"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_0"'] & Z \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Αν η $F$ είναι ομοτοπία από την $f_0$ στην $f_1$ και η $G$ ομοτοπία από την $g_0$ στην $g_1$, τότε η $H(x,t) = G\big(F(x,t), t\big)$, δηλαδή $H_t = G_t \circ F_t$, είναι ομοτοπία από τη σύνθεση $g_0 \circ f_0$ στην $g_1 \circ f_1$. □

**Ορισμός 6.1.6.** Έστω $X$, $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $A$ ένας υπόχωρος του $X$. Μια ομοτοπία $H$ μεταξύ δύο απεικονίσεων $f,\ g : X \longrightarrow Y$ λέγεται **ομοτοπία σε σχέση με το** $A$, αν $H(a,t) = f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in [0,1]$.

Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι $f$ και $g$ είναι ομοτοπικές σε σχέση με το $A$ και γράφουμε $f \simeq_A g$. Σημειώνουμε ότι για να έχουμε $f \simeq_A g$, απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι $f$ και $g$ να ταυτίζονται στο $A$.

**Ορισμοί 6.1.7.** Ένα **μονοπάτι** σε έναν τοπολογικό χώρο $X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$. Τα σημεία $f(0)$ και $f(1)$ λέγονται **άκρα** του μονοπατιού. Αν $f(0) = f(1)$, τότε το μονοπάτι λέγεται **κλειστό**. Το μονοπάτι $f$ λέγεται **θηλειά** στο $x_0$, αν καθένα από τα δύο άκρα του είναι ίσο με το $x_0$.

Δύο μονοπάτια $f, g : [0,1] \to X$ με τα ίδια άκρα, δηλαδή $f(0) = g(0)$ και $f(1) = g(1)$, λέγονται **ομοτοπικά**, αν αυτά είναι ομοτοπικά σε σχέση με τα άκρα τους, δηλαδή $f \simeq_A g$, όπου $A = \{0,1\} = \partial I$. Πιο αναλυτικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ομοτοπία $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, έτσι ώστε:

- $H(s,0) = f(s)$ και $H(s,1) = g(s)$, για κάθε $s \in [0,1]$,
- $H(0,t) = f(0) = g(0)$ και $H(1,t) = f(1) = g(1)$, για κάθε $t \in [0,1]$.

Αν τα $f$ και $g$ είναι ομοτοπικά μονοπάτια, τότε θα συμβολίζουμε απλά με $f \simeq g$ (εννοώντας φυσικά $f \simeq_{\{0,1\}} g$). Πολλές φορές, επίσης, θα συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα $[0,1]$ απλά με $I$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι αν πάρουμε ένα μονοπάτι και θεωρήσουμε μια αναπαραμέτρηση αυτού, τότε το καινούριο μονοπάτι που προκύπτει είναι ομοιοτοπικό με το αρχικό.

**Λήμμα 6.1.8.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος, $f$ ένα μονοπάτι του $X$ και $\phi : [0,1] \to [0,1]$ μια συνεχής απεικόνιση τέτοια, ώστε $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 1$. Τότε το μονοπάτι $f$ είναι ομοτοπικό με το $f \circ \phi$.*

*Απόδειξη.* Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η απεικόνιση $H : [0,1]\times[0,1]\to X$ με τύπο

$$H(s,t) = f\big(t\phi(s) + (1-t)s\big)$$

είναι ομοτοπία από το μονοπάτι $f$ στο $f \circ \phi$ . □

Η απόδειξη του Λήμματος 6.1.3 στην περίπτωση των ομοτοπιών μεταξύ μονοπατιών, δίνει την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 6.1.9.** *Η ομοτοπία μονοπατιών σε έναν τοπολογικό χώρο, είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μονοπατιών του χώρου με τα ίδια άκρα.*

Συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση ομοτοπίας του μονοπατιού $f$.

## 6.2 Η Θεμελιώδης Ομάδα

Αρχίζουμε με τον ορισμό του γινομένου διαδοχικών μονοπατιών και αποδεικνύουμε τις βασικές του ιδιότητες.

**Ορισμός 6.2.1** (Γινόμενο μονοπατιών)**.** Αν $f$ και $g$ είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια, δηλαδή $f(1) = g(0)$, σε έναν τοπολογικό χώρο $X$, τότε το **γινόμενο** των $f$ και $g$ είναι το μονοπάτι $f \cdot g$ που ορίζεται ως εξής:

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{αν } 0 \le s \le 1/2 \\ g(2s-1), & \text{αν } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι το γινόμενο είναι καλά ορισμένο (αφού ορίζεται για διαδοχικά μονοπάτια) και συνεχής απεικόνιση από το λήμμα της συγκόλλησης, με άλλα λόγια είναι πράγματι μονοπάτι στον $X$. Το γινόμενο μονοπατιών επάγει ένα γινόμενο στις αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπίας ως εξής:

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

φυσικά, πάντα με την προϋπόθεση ότι $f(1) = g(0)$.

Το παραπάνω γινόμενο στις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών είναι καλά ορισμένο. Πράγματι, αν έχουμε άλλα μονοπάτια $f'$, $g'$ με $f \overset{F}{\simeq} f'$ και $g \overset{G}{\simeq} g'$, τότε $f \cdot g \overset{H}{\simeq} f' \cdot g'$, όπου

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{αν } 0 \leq s \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq t \leq 1 \\ G(2s-1,t), & \text{αν } \frac{1}{2} \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Αν $f$ είναι ένα μονοπάτι στον $X$, τότε ορίζουμε το **αντίστροφο μονοπάτι** $f^{-1}$ μέσω του τύπου $f^{-1}(s) = f(1-s)$. Επίσης, με $C_x$ συμβολίζουμε το **σταθερό μονοπάτι** στο $x \in X$, δηλαδή $C_x(s) = x$, για κάθε $s \in [0,1]$.

**Πρόταση 6.2.2.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $f, g, h$ μονοπάτια στον $X$.*

1. *Αν ορίζεται το γινόμενο $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$, τότε ορίζεται επίσης το γινόμενο $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$ και $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$.*

2. *Αν $f(0) = x_0$ και $f(1) = x_1$, τότε $[f] \cdot [C_{x_1}] = [C_{x_0}] \cdot [f] = [f]$.*

3. *$[f] \cdot [f^{-1}] = [C_{x_0}]$ και $[f^{-1}] \cdot [f] = [C_{x_1}]$.*

*Απόδειξη.* Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $f \cdot (g \cdot h) \simeq (f \cdot g) \cdot h$, το οποίο, όπως εύκολα μπορεί να ελέγξει ο αναγνώστης, προκύπτει από την ακόλουθη ομοτοπία:

$$H_1(t,s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{2-s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \\ g(4t-2+s), & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s \leq t \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s \\ h\left(\frac{4t-3+s}{1+s}\right), & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Για τον δεύτερο, θα δείξουμε ότι $C_{x_0} \cdot f \simeq f$ (ομοίως αποδεικνύεται ότι $f \cdot C_{x_1} \simeq f$). Παρατηρούμε ότι ο ακόλουθος τύπος ορίζει ομοτοπία από το μονοπάτι $f$ στο $C_{x_0} \cdot f$

$$H_2(t,s) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}s \\ f\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{1}{2}s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, η ομοτοπία που δείχνει ότι $f \cdot f^{-1} \simeq C_{x_0}$ είναι

$$H_3(t,s) = \begin{cases} f\big(2t(1-s)\big), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f\big((2-2t)(1-s)\big), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ανάλογα ορίζεται και η ομοτοπία από το μονοπάτι $f^{-1} \cdot f$ στο $C_{x_1}$. □

**Ορισμός 6.2.3.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $x_0$ ένα σημείο του $X$. Ορίζουμε $\pi_1(X, x_0)$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των θηλειών του $X$ στο $x_0$:

$$\pi_1(X, x_0) = \Big\{ [f] \,/\, f : [0,1] \to X \text{ συνεχής με } f(0) = f(1) = x_0 \Big\}.$$

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται άμεσα το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.2.4.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ εφοδιασμένο με την πράξη $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ αποτελεί ομάδα, η οποία καλείται* ***θεμελιώδης ομάδα του*** $X$ ***στο*** $x_0$. *Το μοναδιαίο στοιχείο είναι η κλάση ομοτοπίας $[C_{x_0}]$ του σταθερού μονοπατιού στο $x_0$ και το αντίστροφο στοιχείο του $[f]$ είναι η κλάση ομοτοπίας του αντίστροφου μονοπατιού (θηλειάς) $f^{-1}$, δηλαδή $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.*

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ανεξαρτησία της θεμελιώδους ομάδας του $X$ στο $x_0$ (ως προς ισομορφισμό) από το σημείο αναφοράς $x_0$ με την προϋπόθεση ότι περιοριζόμαστε στην ίδια κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα.

**Θεώρημα 6.2.5** (Αλλαγή σημείου αναφοράς)**.** *Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος, $x_0, x_1$ δύο σημεία του $X$ και $h : [0,1] \to X$ ένα μονοπάτι από το $x_0$ στο $x_1$. Η απεικόνιση*

$$\Phi_h : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \ \text{ με } \ \Phi_h([f]) = [h^{-1} f h]$$

*είναι ισομορφισμός ομάδων.*

*Απόδειξη.* Για κάθε ζεύγος θηλειών $f, g$ στο $x_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_h([f] \cdot [g]) &= \Phi_h([f \cdot g]) = [h^{-1}] \cdot [f \cdot g] \cdot [h] \\ &= [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [g] \cdot [h] = [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [C_{x_0}] \cdot [g] \cdot [h] \\ &= [h^{-1}] \cdot [f] \cdot [h] \cdot [h^{-1}] \cdot [g] \cdot [h] = \Phi_h([f]) \cdot \Phi_h([g]). \end{aligned}$$

Δηλαδή, η απεικόνιση $\Phi_h$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Επιπλέον, είναι ισομορφισμός γιατί, όπως εύκολα παρατηρούμε, επιδέχεται αντίστροφη την $\Phi_{h^{-1}}$. □

**Παρατήρηση 6.2.6.** Λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, αν ο χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε πολλές φορές γράφουμε για τη θεμελιώδη ομάδα του $X$ απλά $\pi_1(X)$, χωρίς να προσδιορίζουμε σημείο αναφοράς.

**Ορισμός 6.2.7.** Ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος $X$ λέγεται **απλά συνεκτικός**, αν κάθε κλειστό μονοπάτι στον $X$ είναι ομοτοπικό με σημείο (σταθερό μονοπάτι), με άλλα λόγια, αν $\pi_1(X) = \{1\}$.

**Παρατήρηση 6.2.8.** Έπεται άμεσα από τους ορισμούς ότι ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος $X$ είναι απλά συνεκτικός αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο μονοπάτια του $X$ με τα ίδια άκρα είναι ομοτοπικά.

**Παράδειγμα 6.2.9.** Κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, αν η $f : I = [0, 1] \to X$ είναι θηλειά στο $x_0 \in X$, τότε, λόγω κυρτότητας, ορίζεται η ομοτοπία $H : I \times I \to X$ με τύπο $H(s, t) = (1 - t)f(s) + tx_0$, που δείχνει ότι $f \simeq C_{x_0}$.

**Πρόταση 6.2.10.** *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X$, η απεικόνιση*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

*που ορίζεται με $\varphi([f]) = [\varphi \circ f]$, είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ I \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\varphi\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Για το καλώς ορισμένο, αν $[f] = [g]$, τότε υπάρχει ομοτοπία $H$ από την $f$ στην $g$ και η σύνθεση $\varphi \circ H$ δίνει ομοτοπία από την $\varphi \circ f$ στην $\varphi \circ g$ που σημαίνει ότι $[\varphi \circ f] = [\varphi \circ g]$. Το ότι είναι ομομορφισμός έπεται εύκολα από τους σχετικούς ορισμούς ως εξής: $\varphi_*\big([f] \cdot [g]\big) = \varphi_*\big([f \cdot g]\big) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g])$. □

Ο ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ καλείται ο **ομομορφισμός που επάγεται από την** $\varphi$ ή απλά ο **επαγόμενος ομομορφισμός**.

**Πρόταση 6.2.11.** *Έστω $\varphi : X \to Y$ και $\psi : Y \to Z$ δύο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων, $x_0 \in X$ και $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$, $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1\big(Z, \psi(\varphi(x_0))\big)$ οι αντίστοιχοι επαγόμενοι ομομορφισμοί.*

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

2. $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$.

3. *Αν $\varrho : X \to Y$ συνεχής και $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \varrho$, τότε $\varphi_* = \varrho_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.*

*Απόδειξη.* Έστω $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.
1. $\big(\psi \circ \varphi\big)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi(\varphi \circ f)] = \psi_*\big([\varphi \circ f]\big) = \big(\psi_* \circ \varphi_*\big)([f])$.
2. $\mathrm{Id}_*([f]) = [\mathrm{Id} \circ f] = [f]$.
3. Αν $\varphi \overset{F}{\simeq}_{\{x_0\}} \varrho$, τότε $\varphi \circ f \overset{H}{\simeq}_{\{0,1\}} \varrho \circ f$, όπου $H(s, t) = F\big(f(s), t\big)$. □

**Πόρισμα 6.2.12.** *Η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογικό αναλλοίωτο. Δηλαδή, αν ο $\varphi : X \to Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Αφού ο $\varphi : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός, υπάρχει ομοιομορφισμός $\psi : Y \to X$ τέτοιος, ώστε $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$. Συνεπώς, για τους αντίστοιχους επαγόμενους ομομορφισμούς έχουμε $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$ και $\psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Έπεται ότι ο ομομορφισμός $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ είναι $1-1$ και επί, αφού επιδέχεται αριστερό και δεξί αντίστροφο, δηλαδή είναι ισομορφισμός. □

## 6.3 Συστολές και Ομοτοπικές Ισοδυναμίες

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ομοτοπικής ισοδυναμίας, η οποία ως έννοια είναι πολύ ασθενέστερη από αυτήν του ομοιομορφισμού.

**Ορισμός 6.3.1.** Μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων λέγεται **ομοτοπική ισοδυναμία**, αν υπάρχει συνεχής $\psi : Y \to X$, έτσι ώστε $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_X$. Η $\psi$ καλείται ομοτοπική αντίστροφος της $\varphi$.

Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι χώροι $X$ και $Y$ είναι **ομοτοπικά ισοδύναμοι** ή ότι έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας και συμβολίζουμε με $X \simeq Y$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων.

**Λήμμα 6.3.2.** *Έστω $X$, $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι, $\varphi, \psi : X \to Y$ δύο ομοτοπικές (πάντα συνεχείς) απεικονίσεις και $H$ μια ομοτοπία από την $\varphi$ στην $\psi$. Για ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$, θεωρούμε το μονοπάτι $h(t) = H(x_0, t)$ από το $\varphi(x_0)$ στο $\psi(x_0)$ και τον ισομορφισμό $\Phi_h : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ που ορίζεται από το μονοπάτι $h$, δηλαδή, $\Phi_h([f]) = [h^{-1} f h]$. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(Y,\varphi(x_0)) \arrow[d, "\Phi_h"] \\ & \pi_1(Y,\psi(x_0)) \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Έστω $f$ θηλειά στο $x_0$. Θα δείξουμε ότι $\psi_*([f]) = \Phi_h\big(\varphi_*([f])\big)$, ισοδύναμα, $\varphi \circ f \simeq h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. Έστω $h_t$ ο περιορισμός του μονοπατιού $h$ στο $[0, t]$, δηλαδή,

$h_t(s) = h(st)$ και $H_t \circ f$ το μονοπάτι $H(f(s), t)$, όπου $s \in I$. Μέσω της μονοπαραμετρικής οικογένειας μονοπατιών $h_t \cdot (H_t \circ f) \cdot h_t^{-1}, t \in I$, ορίζεται ομοτοπία από το μονοπάτι $C_{\varphi(x_0)} \cdot (\varphi \circ f) \cdot C_{\varphi(x_0)}$ στο $h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. Όμως τα μονοπάτια $C_{\varphi(x_0)} \cdot (\varphi \circ f) \cdot C_{\varphi(x_0)}$ και $\varphi \circ f$ είναι ομοτοπικά, γιατί το ένα προκύπτει από το άλλο με μια αναπαραμέτρηση (βλ. Λήμμα 6.1.8). Τελικά, $\varphi \circ f \simeq h \cdot (\psi \circ f) \cdot h^{-1}$. □

**Θεώρημα 6.3.3.** *Έστω $\varphi : X \to Y$ μια ομοτοπική ισοδυναμία και $x_0 \in X$. Τότε η $\varphi$ επάγει ισομορφισμό $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\psi : Y \to X$ μια ομοτοπική αντίστροφος της $\varphi$. Τότε υπάρχουν ομοτοπίες $H$ και $H'$, έτσι ώστε $\varphi \circ \psi \overset{H}{\simeq} \mathrm{Id}_Y$ και $\psi \circ \varphi \overset{H'}{\simeq} \mathrm{Id}_X$. Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μονοπάτι $h_1$ από το $x_0$ στο $\psi(\varphi(x_0))$, έτσι ώστε:

$$\Phi_{h_1} = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big),$$

όπου $\Phi_{h_1}$ είναι ο ισομορφισμός που ορίζεται από το μονοπάτι $h_1$. Άρα η $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big)$ είναι $1-1$ και η $\psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \to \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big)$ επί. Εφαρμόζοντας ξανά το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μονοπάτι $h_2$ από το $\varphi(x_0)$ στο $\varphi\big(\psi(\varphi(x_0))\big)$, έτσι ώστε:

$$\Phi_{h_2} = \varphi_* \circ \psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1\big(X, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))\big),$$

όπου $\Phi_{h_2}$ είναι ο ισομορφισμός που ορίζεται από το μονοπάτι $h_2$. Έπεται ότι ο ομομορφισμός $\psi_* : \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \to \pi_1\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big)$ είναι $1-1$ και άρα είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, η $\varphi_* = \psi_*^{-1} \circ \Phi_{h_1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big)$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. □

**Ορισμός 6.3.4.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $A$ ένας υπόχωρος του $X$. Μια συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$ λέγεται **συστολή** (retraction), αν $r(a) = a$ για κάθε $a \in A$.

Αν συμβολίσουμε με $i : A \hookrightarrow X$ την ένθεση του $A$ στον $X$, τότε η $r : X \to A$ είναι συστολή αν και μόνο αν $r \circ i = \mathrm{Id}_A$, δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "Id_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

**Παρατήρηση 6.3.5.** Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε συστολή είναι απεικόνιση πηλίκο, αφού επιδέχεται δεξιό αντίστροφο.

**Πρόταση 6.3.6.** *Αν η $r : X \to A$ είναι συστολή, τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει μονομορφισμό $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ και η συστολή $r$ επάγει επιμορφισμό $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$, για κάθε στοιχείο $a$ του $A$.*

*Απόδειξη.* Από τη σχέση $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ προκύπτει ότι $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}$. □

**Ορισμός 6.3.7.** Μια συστολή $r : X \to A$ λέγεται **περιστολή** ή **συστέλλουσα παραμόρφωση** (deformation retraction), αν επιπροσθέτως $i \circ r \simeq_A \mathrm{Id}_X$ (η σύνθεση $i \circ r$ είναι ομοτοπική με την $\mathrm{Id}_X$ σε σχέση με το $A$). Δηλαδή, υπάρχει ομοτοπία $H : X \times I \to X$, τέτοια ώστε:

1. $H(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$.

2. $H(x, 1) = r(x)$, για κάθε $x \in X$.

3. $H(a, t) = a$, για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$.

Αν υπάρχει περιστολή $r : X \to A$, λέμε ότι ο χώρος $X$ περιστέλλεται στον υπόχωρο $A$. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ του $A$ στον $X$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπική αντίστροφο την $r$.

**Παρατήρηση 6.3.8.** Για να περιστέλλεται ο χώρος $X$ σε έναν υπόχωρό του $A$ αρκεί να υπάρχει ομοτοπία $H : X \times I \to X$ με αρχή $\mathrm{Id}_X$ και τέλος εντός του $A$, η οποία να αφήνει αναλλοίωτο κάθε στοιχείο του $A$, δηλαδή:

$1'$. $H(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$.

$2'$. $H(x, 1) \in A$, για κάθε $x \in X$.

$3'$. $H(a, t) = a$, για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$.

Με άλλα λόγια, ο χώρος $X$ μπορεί να μετασχηματισθεί συνεχώς στον $A$ με τέτοιο τρόπο, ώστε τα σημεία του $A$ να μένουν σταθερά κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε συστολή μέσω του τύπου $r(x) = H(x, 1) \in A$.

**Θεώρημα 6.3.9.** *Έστω $A$ ένας υπόχωρος ενός χώρου $X$ και $r : X \to A$ μια συστέλλουσα παραμόρφωση. Τότε η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει ισομορφισμό $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$, για κάθε $a \in A$.*

Αν και το θεώρημα αποτελεί πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.3, αφού η ένθεση είναι ομοτοπική ισοδυναμία, δίνουμε μια ανεξάρτητη πιο άμεση απόδειξη.

*Απόδειξη.* Όπως πριν, από τη σχέση $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ προκύπτει ότι $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}$, όπου $r_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ και $i_* : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$. Εφόσον $i \circ r \simeq_A \mathrm{Id}_X$, έχουμε ιδιαιτέρως ότι $i \circ r \simeq_{\{a\}} \mathrm{Id}_X$ και έτσι $i_* \circ r_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,a)}$ λόγω της Πρότασης 6.2.11. Έπεται ότι η $i_*$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την $r_*$. □

**Ορισμός 6.3.10.** Ένας χώρος $X$ λέγεται **συμπτύξιμος** (contractible) ή **συσταλτός**, αν περιστέλλεται σε σημείο του, δηλαδή, αν υπάρχει περιστολή $r : X \to \{x_0\}$, όπου $x_0$ σημείο του $X$.

Κάθε συμπτύξιμος χώρος είναι λοιπόν ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο. Η συμπτυξιμότητα, ως έννοια, είναι ισχυρότερη από την απλή συνεκτικότητα.

**Πρόταση 6.3.11.** *Κάθε συμπτύξιμος χώρος είναι απλά συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Εφόσον κάθε περιστολή επάγει ισομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες και $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}$, μένει να δείξουμε ότι ο $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός. Αν $H : X \times I \to X$ είναι η αντίστοιχη ομοτοπία, τότε για κάθε σημείο $x_1$ του $X$ ο τύπος $f(t) = H(x_1, t)$ ορίζει μονοπάτι από το $x_1$ στο $x_0$ και άρα ο $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός. □

**Παράδειγμα 6.3.12.** Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ δεν είναι μόνο απλά συνεκτικός, όπως ήδη έχουμε δει, είναι συμπτύξιμος. Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε η απεικόνιση $r : \mathbb{R}^n \to \{x_0\}$ με $r(x) = x_0$ είναι περιστολή. Πράγματι, η σχετική ομοτοπία ορίζεται ως εξής $H(x,t) = x(1-t) + x_0 t$, $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$.

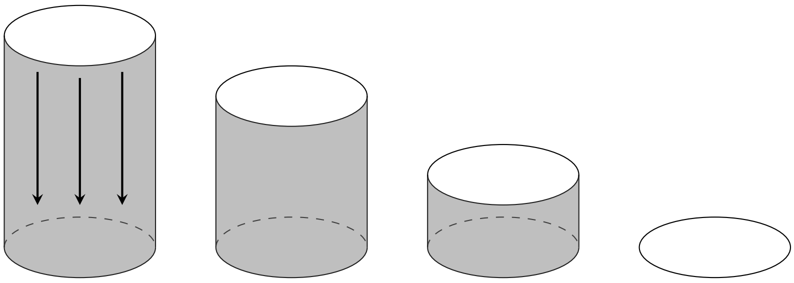
**Παράδειγμα 6.3.13.** Θεωρούμε την κλειστή μοναδιαία σφαίρα $S^n$ και την ένθεση $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Η απεικόνιση $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ με

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}\,,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η συνήθης Ευκλείδεια νόρμα, είναι συστολή. Μέσω του ακόλουθου τύπου ορίζεται ομοτοπία $H : \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ που δείχνει ότι είναι περιστολή:

$$H(x,t) = x(1-t) + \frac{x}{\|x\|} \cdot t\,.$$

Άρα ο χώρος $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ περιστέλλεται στη σφαίρα $S^n$ και έτσι $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq S^n$.



**Σχήμα 6.2:** *Κάθε κύλινδρος περιστέλλεται σε κύκλο.*

**Παράδειγμα 6.3.14.** Η ομοτοπία $H : \big(S^1 \times I\big) \times I \to S^1 \times I$ με τύπο $H\big((x,s),t\big) = \big(x, s(1-t)\big)$ δείχνει ότι ο κύλινδρος $S^1 \times I$ περιστέλλεται στη βάση του που είναι κύκλος. Ομοίως προκύπτει ότι κάθε κύλινδρος περιστέλλεται σε κύκλο και έτσι έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου.

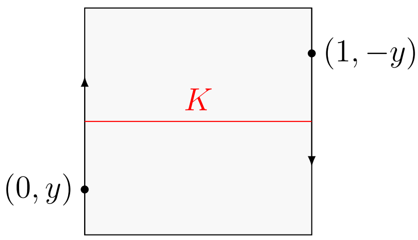
**Παράδειγμα 6.3.15.** Υπενθυμίζουμε ότι η ταινία του Möbius είναι (ως προς ομοιομορφισμό) ο χώρος πηλίκο

$$M = [0,1] \times [-1,1]/\sim,$$

όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $(0,y) \sim (1,-y)$, για κάθε $y \in [-1,1]$. Η ομοτοπία $H : M \times I \to M$ που δίνεται από τον τύπο

$$H\big([(x,y)],t\big) = [(x, y(1-t))],$$

όπου με $[(x,y)]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $(x,y)$ και της οποίας η συνέχεια έπεται από το Θεώρημα 5.1.9, δείχνει ότι η ταινία του Möbius περιστέλλεται στον «κεντρικό» κύκλο $K = [0,1] \times \{0\}$ και συνεπώς είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τον κύκλο.




Ως εφαρμογή των προηγουμένων θα αποδείξουμε ότι η σφαίρα $S^n$ είναι απλά συνεκτικός χώρος για $n > 1$, αρχίζοντας από το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 6.3.16** (Lebesgue)**.** *Έστω $(X,d)$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $X$. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο $A$ του $X$ με διάμετρο μικρότερη του $\delta$ περιέχεται σε ένα από τα ανοικτά σύνολα της κάλυψης.*

Ο αριθμός $\delta$ καλείται **αριθμός του Lebesgue** για το κάλυμμα $\mathcal{U}$.

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι η διάμετρος του $A$ ορίζεται ως το sup $\{d(x,y),\ x,y \in A\}$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει ανοικτό $U_x \in \mathcal{U}$ με $x \in U_x$. Αφού το ανοικτό $U_x$ περιέχει το $x$, υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x, 2r_x)$ με $B(x, 2r_x) \subseteq U_x$, για κάποιο $r_x > 0$. Εφόσον οι μπάλες $B(x, r_x)$, $x \in X$, αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του $X$, από τη συμπάγεια του $X$ έπεται ότι $X = \cup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$ για κάποια $x_1, \ldots, x_n \in X$. Έστω $\delta = \min\{r_{x_i},\ i = 1, \ldots, n\}$ και $A$ υποσύνολο του $X$ με διάμετρο μικρότερη από $\delta$. Έστω $y \in A$. Τότε $y \in B(x_i, r_{x_i})$ για κάποιο $i$. Για κάθε $z \in A$, έχουμε ότι $d(z,y) \le \delta$ και άρα $d(x_i, z) \le d(x_i, y) + d(y, z) < r_{x_i} + \delta \le 2r_{x_i}$. Δηλαδή, $A \subseteq B(x_i, 2r_{x_i}) \subseteq U_{x_i} \in \mathcal{U}$. □

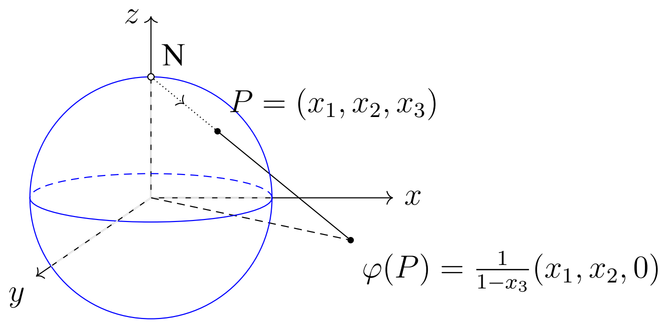
**Πρόταση 6.3.17.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών και απλά συνεκτικών υποσυνόλων του $U$ και $V$. Αν η τομή $U \cap V$ είναι μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική, τότε ο $X$ είναι απλά συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Σημειώνουμε πρώτα ότι ο χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός ως ένωση κατά τόξα συνεκτικών με μη-κενή τομή. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε θηλειά είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. Έστω $x_0 \in U \cap V$ και $\lambda : [0,1] \to X$ μια θηλειά στο $x_0$. Εφόσον η $\lambda$ είναι συνεχής, οι αντίστροφες εικόνες $\lambda^{-1}(U)$ και $\lambda^{-1}(V)$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $[0,1]$. Έστω $\delta$ ο αριθμός του Lebesgue αυτού του καλύμματος και $n$ ένας φυσικός τέτοιος, ώστε $\frac{1}{n} < \delta$. Θεωρούμε τη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ του διαστήματος $[0,1]$, σε τμήματα με μήκος μικρότερο του $\delta$, όπου $t_i = i/n$. Τότε $\lambda([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$, όπου $U_i = U$ ή $V$. Ενώνουμε το $x_0$ με το $\lambda(t_i)$ μέσω ενός μονοπατιού $\gamma_i$ που βρίσκεται εντός της τομής $U_i \cap U_{i-1}$ (αυτό μπορεί να γίνει αφού τα σημεία $x_0$, $\lambda(t_i)$ ανήκουν στην τομή που είναι κατά τόξα συνεκτική). Για κάθε $i \ge 1$, συμβολίζουμε με $\lambda_i$ το τμήμα του μονοπατιού $\lambda$ από το $\lambda(t_{i-1})$ στο $\lambda(t_i)$, δηλαδή $\lambda_i(s) = \lambda\big((1-s)t_{i-1} + st_i\big)$, $s \in [0,1]$. Τότε το μονοπάτι $\gamma_{i-1}\lambda_i\gamma_i^{-1}$ περιέχεται στο $U_{i-1}$ το οποίο είναι απλά συνεκτικό και

$$\begin{aligned}
\lambda &\simeq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \\
&\simeq (\lambda_1\gamma_1^{-1}) \cdot (\gamma_1\lambda_2\gamma_2^{-1}) \cdots (\gamma_{i-1}\lambda_i\gamma_i^{-1}) \cdots (\gamma_{n-1}\lambda_n) \\
&\simeq C_{x_0} \cdots C_{x_0}.
\end{aligned}$$

Άρα $[\lambda] = [C_{x_0}] = 1$ και συνεπώς η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ είναι τετριμμένη. □

**Παρατήρηση 6.3.18.** Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών υποσυνόλων του $U$ και $V$, με μη-κενή τομή, έτσι ώστε τα $U$, $V$ και $U \cap V$ είναι κατά




**Σχήμα 6.3:** *Η στερεογραφική προβολή.*

τόξα συνεκτικά. Αν $x_0 \in U \cap V$, τότε από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι

$$\pi_1(X, x_0) = \big\langle \pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_0) \big\rangle$$

που για την ακρίβεια σημαίνει πως η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ παράγεται από τις υποομάδες της $(i_U)_*\big(\pi_1(U, x_0)\big)$ και $(i_V)_*\big(\pi_1(V, x_0)\big)$, όπου με $i_U$ και $i_V$ συμβολίζουμε τις ενθέσεις των $U$ και $V$ στον $X$, αντίστοιχα.

**Πρόταση 6.3.19.** *Η σφαίρα $S^n$ είναι απλά συνεκτικός χώρος, για $n \geq 2$.*

*Απόδειξη.* Έστω $N = (0, \dots, 0, 1)$ και $S = (0, \dots, 0, -1)$ ο «βόρειος» και «νότιος» πόλος της $S^n$, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα ανοικτά σύνολα $U = S^n \setminus \{N\}$ και $V = S^n \setminus \{S\}$, καθένα από τα οποία είναι ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}^n$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τη στερεογραφική προβολή $\varphi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ που είναι η συνεχής απεικόνιση που δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Η απεικόνιση $\varphi$ είναι ομοιομορφισμός, καθώς επιδέχεται αντίστροφη $\psi$ που δίνεται από τον τύπο

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = \frac{(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1},$$

όπου $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Έτσι $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$. Οι χώροι $S^n \setminus \{N\}$ και $S^n \setminus \{S\}$ είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους μέσω της ανακλάσεως $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Έπεται ότι τα $U$ και $V$ είναι συμπτύξιμα και ιδιαιτέρως απλά συνεκτικά. Επίσης, η τομή τους είναι κατά τόξα συνεκτική, αφού $U \cap V \cong S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και $n \geq 2$. Το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση. $\square$

**Πόρισμα 6.3.20.** *Ο χώρος* $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *είναι απλά συνεκτικός, για* $n \geq 3$.

*Απόδειξη.* Έχουμε δει ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ περιστέλλεται στη σφαίρα $S^{n-1}$ και άρα έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας. □

# Ασκήσεις

6.1 Αποδείξτε ότι ο ισομορφισμός του θεωρήματος 6.2.5 είναι φυσικός με την ακόλουθη έννοια. Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και $x_1, x_2 \in X$. Αν με $y_1$ και $y_2$ συμβολίσουμε τις εικόνες των $x_1$ και $x_2$ μέσω της $f$, αντίστοιχα, τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Phi_h"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "\Phi_{f\circ h}"] \\ \pi_1(X, x_2) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, y_2) \end{tikzcd}$$

6.2 Μια *τοπολογική ομάδα* είναι μια ομάδα $G$ εφοδιασμένη με μια τοπολογία, έτσι ώστε οι απεικονίσεις του πολλαπλασιασμού $\mu : G \times G \to G$ και της αντιστροφής $i : G \to G$ που δίνονται από $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $i(g) = g^{-1}$, αντίστοιχα, να είναι συνεχείς. Έστω $x_0$ το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Αν $f, g \in \pi_1(G, x_0)$, ορίζουμε $f \circ g \in \pi_1(G, x_0)$ ως εξής: $(f \circ g)(s) = f(s)g(s) = \mu\big(f(s), g(s)\big)$.
(α) Δείξτε ότι η πράξη $\circ$ επάγει πράξη ομάδας στο $\pi_1(G, x_0)$, η οποία ταυτίζεται με τον συνήθη πολλαπλασιασμό της θεμελιώδους ομάδας. (Υπόδειξη: υπολογίστε το γινόμενο $(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g)$.)
(β) Δείξτε ότι η ομάδα $\pi_1(G, x_0)$ είναι αβελιανή.

6.3 Έστω $X$ τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Ο χώρος $X$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο.
(β) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_X : X \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
(γ) Κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$, για αυθαίρετο χώρο $Y$, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
(δ) Κάθε απεικόνιση $g : Y \to X$, για αυθαίρετο χώρο $Y$, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

6.4 Έστω $f : S^n \to Y$ μια (συνεχής) απεικόνιση σε έναν χώρο $Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Η $f$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
(β) Η $f$ μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$.

6.5 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_0 \in A, Y$ ένας τοπολογικός χώρος και $\phi : (A, a_0) \to (Y, y_0)$ συνεχής (δηλ. $\phi(a_0) = y_0$). Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to Y$ της $\phi$, τότε η $\phi$ επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες.

6.6 Έστω $X$ και $Y$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Ο *κύλινδρος* $M_f$ της $f$ είναι ο χώρος πηλίκο $(X \times I) \bigsqcup Y/ \sim$ , όπου $(x, 0) \sim f(x)$ για κάθε $x \in X$.
(α) Δείξτε ότι ο περιορισμός της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο $\pi$ σε καθένα από τα $X \times \{1\}$ και $Y$ είναι ομοιομορφισμός.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση $r : M_f \to \pi(Y)$.
(γ) Κάθε απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων παραγοντοποιείται ως μια εμφύτευση ακολουθούμενης από μια ομοτοπική ισοδυναμία.

6.7 Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος. Ο *κώνος επί του* $X$, $CX$ είναι ο χώρος πηλίκο $X \times [0, 1]/ \sim$ , όπου $(x, t) \sim (y, s)$ αν και μόνο αν $(x, t) = (y, s)$ ή $s = t = 1$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $CX$ είναι συμπτύξιμος [Υπόδειξη: θεωρήστε δεδομένο ότι (λόγω της συμπάγειας του $I = [0, 1]$) η απεικόνιση $\pi \times \mathrm{Id} : X \times I \times I \to CX \times I$ είναι απεικόνιση πηλίκο, όπου $\pi : X \times I \to CX$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο].

6.8 Έστω $A, B$ υποσύνολα των $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $-A = A$ και $-B = B$. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται *περιττή*, αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Για κάθε απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$, έτσι ώστε $f(x) = f(-x)$.
2. Για κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$ έτσι ώστε $f(x) = 0$.
3. Δεν υπάρχει περιττή απεικόνιση $f : S^n \to S^{n-1}$.
4. Δεν υπάρχει απεικόνιση $f : D^n \to S^{n-1}$, η οποία να είναι περιττή στο σύνορο $S^{n-1}$ του δίσκου.
5. Κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ δεν είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

6.9 Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $CX$ ο κώνος του $X$. Ταυτίζουμε τον $X$ με τον υπόχωρο $X \times \{0\}$ του κώνου μέσω της εμφύτευσης $X \ni x \mapsto [(x, 0)]$. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής επέκταση $g : CX \to Y$ της $f$.

6.10 Αποδείξτε ότι $CS^n \cong D^{n+1}$. Αυτό δείχνει ότι η προηγούμενη άσκηση γενικεύει την Άσκηση 4.

6.11 Έστω $X$ και $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι, $A$ κλειστό υποσύνολο του $X$, $f : A \to Y$ συνεχής και $Z_f = X \bigcup_f Y$ ο χώρος που προκύπτει από τον $Y$ με την επισύναψη του $X$ κατά μήκος του $A$ μέσω της $f$. Αν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον $X$ στον $A$, τότε υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον $X \bigcup_f Y$ στον $Y$ (εδώ θεωρούμε τον $Y$ ως υπόχωρο του $X \bigcup_f Y$, αφού γνωρίζουμε ότι εμφυτεύεται μέσω της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο).

6.12 Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων. Ο *κώνος* $C(f)$ της $f$ είναι ο χώρος πηλίκο $M_f/(X \times \{1\})$, διαφορετικά $C(f) = \dfrac{CX \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}$. Αποδείξτε ότι ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ δίνουν ομοτοπικά ισοδύναμους κώνους [Υπόδειξη: αν $H$ είναι η ομοτοπία, τότε θεωρήστε την απεικόνιση με $y \mapsto y \in Y$ και $(x, t) \mapsto (x, 2t)$, για $t \in [0, 1/2]$, $(x, t) \mapsto H(x, 2t - 1)$, για $t \in [1/2, 1]$].

# Βιβλιογραφία


[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[4] J. R. Munkres. Topology, 2nd end., Prentice-Hall, 2000.

[5] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.

# Κεφάλαιο 7

# Χώροι Επικάλυψης

## Περιεχόμενα

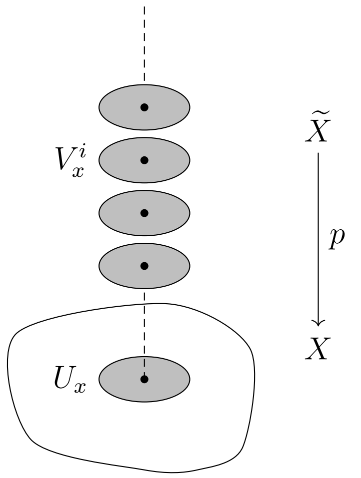


Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του χώρου επικάλυψης (covering space) ενός τοπολογικού χώρου και αποδεικνύονται κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων επικάλυψης μέσω των οποίων μελετάται η θεμελιώδης ομάδα και σε κάποιες περιπτώσεις υπολογίζεται. Υπολογίζουμε τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων και παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές τους, μεταξύ των οποίων και μια τοπολογική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας.

## 7.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

**Ορισμός 7.1.1.** Ένας **χώρος επικάλυψης** ενός τοπολογικού χώρου $X$ είναι ένα ζεύγος $(\widetilde{X}, p)$ αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο $\widetilde{X}$ και μια συνεχή, επί απεικόνιση $p : \widetilde{X} \to X$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε σημείο $x \in X$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_x$ του $x$, έτσι ώστε η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(U_x)$ είναι ξένη ένωση ανοικτών $V_j^x$, $j \in J$, καθένα από τα οποία απεικονίζεται ομοιομορφικά μέσω της $p$ στο $U_x$. Μια τέτοια περιοχή $U_x$

του $x$ λέγεται **στοιχειώδης περιοχή** του $x$, τα αντίστοιχα ανοικτά $V_j^x$ λέγονται **συνιστώσες** της στοιχειώδους περιοχής $U_x$ και συνήθως το εκφράζουμε γράφοντας $U_x = \coprod_{j\in J} V_j^x$ όπου κάθε $p\,|_{V_j^x}\colon V_j^x \to U_x$ είναι ομοιομορφισμός. Η απεικόνιση $p$ αναφέρεται ως **απεικόνιση επικάλυψης** ή **προβολή επικάλυψης**. Πολλές φορές, επίσης, θα λέμε απλά τον $\widetilde{X}$ χώρο επικάλυψης, χωρίς να αναφερόμαστε στην $p$. Η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(x)$ του $x$ μέσω της $p$ λέγεται **νήμα** του $x$ ως προς την $p$.

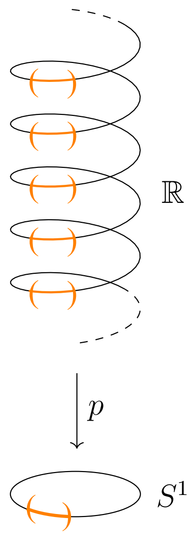



**Παράδειγμα 7.1.2.** Κάθε ομοιομορφισμός είναι απεικόνιση επικάλυψης.

**Παράδειγμα 7.1.3.** Θεωρούμε τον κύκλο $S^1$ ως το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών μέτρου $1$. Ο χώρος $\mathbb{R}$ επικαλύπτει τον κύκλο μέσω της απεικονίσεως $p : \mathbb{R} \to S^1$ που δίνεται από τον τύπο $p(x) = e^{2\pi i x}$. Πράγματι, για κάθε $e^{2\pi i x} \in S^1$, έστω $U_x$ το ανοικτό ημικύκλιο με κέντρο το $e^{2\pi i x}$. Τότε

$$p^{-1}(U_x) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} (x - \frac{1}{4} + k, x + \frac{1}{4} + k).$$

Σημειώνουμε ότι η $p$ είναι περιοδική με περίοδο $1$ και ανοικτή, γιατί απεικονίζει τα βασικά σε ανοικτά. Πράγματι, η εικόνα του ανοικτού διαστήματος $(\alpha, \beta)$ αποτελείται από τα σημεία του κύκλου γωνίας μεταξύ $2\pi\alpha$ και $2\pi\beta$ που είναι ανοικτό υποσύνολο του κύκλου. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε περιορισμός $p_k : V_k^x = (x - \frac{1}{4} + k, x + \frac{1}{4} + k) \to U_x$ είναι $1{-}1$, επί, συνεχής ως περιορισμός συνεχούς και ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής στο ανοικτό $V_k^x$. Δηλαδή η $p_k$ είναι πράγματι ομοιομορφισμός. Αντί για την περιοχή $U_x$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ως στοιχειώδη περιοχή οποιοδήποτε κυκλικό τμήμα με κέντρο το $e^{2\pi i x}$ και μήκος μικρότερο από $1/2$ (βλέπε Σχήμα 7.1)




**Σχήμα 7.1:** *Η επικάλυψη του κύκλου από την πραγματική ευθεία.*

**Παράδειγμα 7.1.4.** Αν $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X_2$ είναι απεικονίσεις επικάλυψης, τότε και το γινόμενό τους $p_1 \times p_2 : \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Ιδιαιτέρως, η απεικόνιση $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ με $p(x, y) = \left(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}\right)$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

**Παράδειγμα 7.1.5.** Για κάθε θετικό ακέραιο $n$, η απεικόνιση $p : S^1 \to S^1$ με $p(z) = z^n$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, θεωρούμε πρώτα τη ρίζα της μονάδας $\omega = e^{2\pi i/n}$. Αν $x \in S^1$ και $y$ μια $n$-οστή ρίζα του $x$, τότε

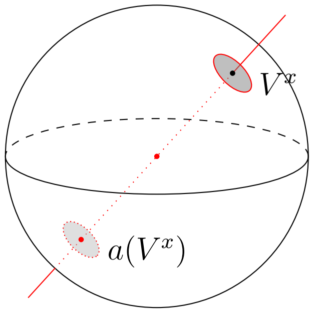
$$p^{-1}(x) = \{y, y\omega, y\omega^2, \ldots, y\omega^{n-1}\}.$$

Αν συμβολίσουμε με $U_x$ το συμπλήρωμα $S^1 \setminus \{x\}$ του $x$ και με $V_0^x$ το ανοικτό κυκλικό τμήμα με άκρα τα $y, y\omega$ (με άλλα λόγια $V_0^x = \{z \in S^1 \ : \ 0 < \arg(z/y) < 2\pi/n\}$, όπου με $\arg(z)$ συμβολίζουμε το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού $z$), τότε οι ανοικτές περιοχές $V_i^x = \omega^i V_0^x$, $i = 0, \ldots, n-1$ είναι ξένες μεταξύ τους, $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} V_i^x$ και κάθε περιορισμός $p|_{V_i^x} : V_i^x \to U_x$ είναι ομοιομορφισμός.

**Παράδειγμα 7.1.6.** Η απεικόνιση πηλίκο $\pi : S^n \to S^n/\sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$ στη σφαίρα $S^n$ (δηλαδή ταυτοποιούμε αντιποδικά σημεία), είναι απεικόνιση επικάλυψης και το νήμα του $\pi(x)$ είναι το δισύνολο $\{x, -x\}$.

Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι η $\pi$ είναι ανοικτή. Έστω $U$ ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας $S^n$. Εφόσον η αντιποδική απεικόνιση $\alpha : S^n \to S^n$, με $\alpha(x) = -x$, είναι ομοιομορφισμός, η εικόνα $\alpha(U)$ του $U$ μέσω της $\alpha$ είναι ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας. Έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = U \cup \alpha(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας και αφού η $\pi$ είναι απεικόνιση πηλίκο το $\pi(U)$ είναι ανοικτό, που σημαίνει ότι η $\pi$ είναι ανοικτή.

Έστω $y \in S^n/\sim$. Τότε $\pi^{-1}(y) = \{x, \alpha(x)\}$ για κάποιο $x \in S^n$. Εφόσον η απόσταση (στον $\mathbb{R}^{n+1}$) των $x, \alpha(x)$ ισούται με 2, μπορούμε να επιλέξουμε ανοικτή περιοχή $V^x$ του $x$ στη σφαίρα $S^n$ τέτοια, ώστε $V^x \cap \alpha(V^x) = \emptyset$ (όπως στο ακόλουθο σχήμα). Τότε $\pi^{-1}\big(\pi(V^x)\big) = U \cup \alpha(V^x)$ και ο περιορισμός $\pi : V^x \to \pi(V^x)$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι $1-1$, επί, συνεχής (ως περιορισμός συνεχούς) και ανοικτή (ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό). Ομοίως, ο περιορισμός $\pi : \alpha(V^x) \to \pi(\alpha(V^x)) = \pi(V^x)$ είναι ομοιομορφισμός και έτσι το ανοικτό $\pi(V^x)$ είναι στοιχειώδης περιοχή του $y$ με αντίστοιχες συνιστώσες τα ανοικτά $V^x$ και $\alpha(V^x)$.




Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι οι χώροι $\mathbb{RP}^n$ και $S^n/\sim$ είναι ομοιομορφικοί. Υπενθυμίζουμε πως ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$, είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$, όπου η σχέση ισοδυναμίας στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ορίζεται ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιο μη μηδενικό πραγματικό αριθμό $\lambda$. Για να δείξουμε ότι $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\sim$, θεωρούμε τη σύνθεση

$$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{\pi} S^n/\sim$$

όπου $r$ είναι η συστολή $x \mapsto x/\|x\|$ και $\pi$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο. Η $\varphi$ είναι απεικόνιση πηλίκο ως σύνθεση απεικονίσεων πηλίκο και παρατηρούμε ότι $\varphi(x) = \varphi(y)$ αν και μόνο αν $x \sim y$ (εδώ το $\lambda$ είναι $\|x\|/\|y\|$ ή $-\|x\|/\|y\|$). Το Θεώρημα 5.1.9 ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Το ενδιαφέρον μας για τους χώρους επικάλυψης πηγάζει εν μέρει από τις ακόλουθες πολύ σημαντικές ιδιότητες που απολαμβάνουν σε σχέση με μονοπάτια και ομοτοπίες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

**Ορισμός 7.1.7.** Έστω $\varphi : Y \to X$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$. Μια **ανύψωση** (lift) της $\varphi$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\widetilde{\varphi} : Y \to X$, έτσι ώστε $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

**Πρόταση 7.1.8** (Μοναδικότητα των ανυψώσεων)**.** *Έστω $\varphi : Y \to X$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων, $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$ και $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2 : Y \to \widetilde{X}$ δύο ανυψώσεις της $\varphi$. Αν ο χώρος $Y$ είναι συνεκτικός και $\widetilde{\varphi}_1(y_0) = \widetilde{\varphi}_2(y_0)$ για κάποιο $y_0 \in Y$, τότε $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2$.*

*Απόδειξη.* Έστω $A = \{y \in Y : \widetilde{\varphi}_1(y) = \widetilde{\varphi}_2(y)\}$. Το $A$ είναι μη κενό, αφού το $y_0$ ανήκει στο $A$. Θα δείξουμε ότι το $A$ είναι ανοικτό και κλειστό, οπότε το συμπέρασμα θα προκύψει από τη συνεκτικότητα του $Y$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι το $A$ είναι ανοικτό, θεωρούμε $y$ στο $A$, στοιχειώδη περιοχή $U$ του $\varphi(y)$ και τη συνιστώσα $V_1$ του $p^{-1}(U)$ που περιέχει το $\widetilde{\varphi}_1(y) = \widetilde{\varphi}_2(y)$. Τότε η τομή $V = \widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_1)$ είναι ανοικτή περιοχή του $y$, η οποία περιέχεται στο $A$ και ως εκ τούτου το $A$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $a \in A$, τότε $\widetilde{\varphi}_1(a) = \widetilde{\varphi}_2(a)$, γιατί τα σημεία $\widetilde{\varphi}_1(a)$ και $\widetilde{\varphi}_2(a)$ ανήκουν στην ίδια συνιστώσα (την $V_1$) και στο ίδιο νήμα.

Θα δείξουμε ότι το $A$ είναι κλειστό αποδεικνύοντας ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Έστω $y \notin A$, δηλαδή $\widetilde{\varphi}_1(y) \neq \widetilde{\varphi}_2(y)$. Εφόσον τα $\widetilde{\varphi}_1(y)$ και $\widetilde{\varphi}_2(y)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ανήκουν στο ίδιο νήμα $p^{-1}\big(\varphi(y)\big)$, ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες, έστω $V_1$ και $V_2$, αντίστοιχα. Κάθε στοιχείο της τομής $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_2)$ απεικονίζεται στο $V_1$ μέσω της $\widetilde{\varphi}_1$ και στο $V_2$ μέσω της $\widetilde{\varphi}_2$. Άρα η τομή $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_2)$ είναι ανοικτή περιοχή του $y$, η οποία περιέχεται στο συμπλήρωμα του $A$ και συνεπώς το συμπλήρωμα του $A$ είναι ανοικτό. □

**Πρόταση 7.1.9** (Ύπαρξη ανυψώσεων μονοπατιών)**.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$ και $f : I \to X$ ένα μονοπάτι με $f(0) = x$. Αν $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{f} : I \to \widetilde{X}$ του $f$ με $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

*Απόδειξη.* Από το λήμμα του Lebesgue 6.3.16 υπάρχει φυσικός $n$ τέτοιος, ώστε κάθε διάστημα της μορφής $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, του $I$ απεικονίζεται μέσω της $f$ σε μια στοιχειώδη περιοχή $U_k$, δηλαδή $f\big([\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\big) \subseteq U_k$. Έστω $V_0$ η συνιστώσα της $U_0$ που περιέχει το $\tilde{x}$. Ορίζουμε την $\tilde{f}$ πρώτα στο διάστημα $[0,\frac{1}{n}]$ ως εξής:

$$\tilde{f} = \big(p|_{V_0}\big)^{-1} \circ f.$$

Τότε $\tilde{f}(0) = \big(p|_{V_0}\big)^{-1}(f(x_0)) = \tilde{x}$. Υποθέτουμε ότι η $\tilde{f}$ έχει ορισθεί έως και στο διάστημα $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$. Επεκτείνουμε τον ορισμό της στο $[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n}]$ ως εξής: Επιλέγουμε συνιστώσα $V_{k+1}$ της στοιχειώδους περιοχής $U_{k+1}$ που περιέχει το σημείο $\tilde{f}(\frac{k+1}{n})$. Αυτό έχει νόημα, γιατί $p\big(\tilde{f}(\frac{k+1}{n})\big) = f(\frac{k+1}{n}) \in U_{k+1}$. Ορίζουμε την $\tilde{f}$ στο $[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n}]$ μέσω του τύπου

$$\tilde{f} = \big(p|_{V_{k+1}}\big)^{-1} \circ f.$$

Τότε $\big(p|_{V_{k+1}}\big)^{-1} \circ f(\frac{k+1}{n}) = \tilde{f}(\frac{k+1}{n})$, αφού τα δύο αυτά σημεία ανήκουν στο ίδιο νήμα και στην ίδια συνιστώσα. Δηλαδή, ο «νέος» τύπος συμφωνεί με τον «παλιό» και έχουμε πράγματι επέκταση. Η συνέχεια της $\tilde{f}$ έπεται από το λήμμα της συγκόλλησης 6.1.4, ενώ η μοναδικότητα από τη συνεκτικότητα του $I$ και την προηγούμενη πρόταση. □

**Πρόταση 7.1.10.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$ και $f, g : I \to X$ δύο ομοτοπικά μονοπάτια. Αν οι $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ είναι ανυψώσεις των $f$ και $g$, αντίστοιχα, με $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, τότε $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$. Ιδιαιτέρως, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Δηλαδή, ανυψώσεις με την ίδια αρχή ομοτοπικών μονοπατιών, είναι ομοτοπικές και συνεπώς έχουν το ίδιο τέλος.

*Απόδειξη.* Έστω $H : I \times I \to X$ μια ομοτοπία από το μονοπάτι $f$ στο μονοπάτι $g$. Εφόσον οι στοιχειώδεις περιοχές αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του $X$, οι αντίστροφες εικόνες τους μέσω της ομοτοπίας $H$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $I \times I$. Συνεπώς, από το λήμμα του Lebesgue, υπάρχει φυσικός $n$ τέτοιος, ώστε κάθε τετράγωνο του $I \times I$ πλευράς $1/n$ να απεικονίζεται μέσω της $H$ σε μια στοιχειώδη περιοχή. Διαμερίζουμε το $I \times I$ σε «μικρά» τετραγωνάκια πλευράς $1/n$. Πιο συγκεκριμένα, αν θέσουμε $T_{ij} = [\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]$, τότε υπάρχει στοιχειώδης περιοχή $U_{ij}$, έτσι ώστε $H(T_{ij}) \subseteq U_{ij}$, για κάθε $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Θα ανυψώσουμε την ομοτοπία $H$ σε ομοτοπία $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$. Ο ορισμός της $\widetilde{H}$ θα γίνει διαδοχικά σε κάθε τετράγωνο $T_{0,0}, T_{1,0}, \dots,$ της πρώτης γραμμής μετά της δεύτερης $T_{0,1}, T_{1,1}, \dots$ κ.ο.κ. Στο σημείο $(0,0)$ ορίζουμε $\widetilde{H}(0,0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ και σημειώνουμε ότι $p \circ \widetilde{H}(0,0) = H(0,0)$. Υποθέτοντας ότι η $\widetilde{H}$ έχει ορισθεί σε όλα τα τετράγωνα πριν το $T_{ij}$, ιδιαιτέρως έχει ορισθεί στο σημείο $(i/n, j/n)$, επεκτείνουμε τον ορισμό της στο

$T_{ij}$ ως εξής: Έχουμε ότι $H(T_{ij}) \subseteq U_{ij}$ και $p \circ \widetilde{H}(i/n, j/n) = H(i/n, j/n) \in U_{ij}$. Θεωρούμε, λοιπόν, τη συνιστώσα $V_{ij}$ της στοιχειώδους περιοχής $U_{ij}$ που περιέχει το σημείο $\widetilde{H}(i/n, j/n)$ και επεκτείνουμε την $\widetilde{H}$ στο $T_{ij}$ μέσω του τύπου

$$\widetilde{H}|_{T_{ij}} = \left(p|_{V_{ij}}\right)^{-1} \circ H.$$

Έτσι έχουμε $p \circ \widetilde{H} = H$ και στο τετραγωνάκι $T_{ij}$. Από την επιλογή της συνιστώσας $V_{ij}$ έπεται ότι ο τύπος της επέκτασης συμφωνεί με τον «προηγούμενο» στο σημείο $(i/n, j/n)$. Επιπροσθέτως, ο τύπος της επέκτασης στο $T_{ij}$ συμφωνεί με τον τύπο της $\widetilde{H}$ στις πλευρές του $T_{ij}$ που η $\widetilde{H}$ είχε ήδη ορισθεί (δηλαδή τον «παλιό»). Πράγματι, οι πλευρές του $T_{ij}$ που μπορεί να παρουσιαστεί αλληλοκάλυψη των τύπων είναι οι $A = \{\frac{i}{n}\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ και $B = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}$. Σε κάθε περίπτωση, από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε συμφωνία των δύο τύπων, γιατί μέσω των περιορισμών αυτών στα $A$ και $B$ ορίζονται μονοπάτια με την ίδια αρχή $\widetilde{H}(i/n, j/n)$ που αποτελούν ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού. Από το λήμμα της συγκόλλησης, η $\widetilde{H}$ είναι συνεχής.

Τέλος, ελέγχουμε ότι πράγματι η $\widetilde{H}$ είναι ομοτοπία από την ανύψωση $\tilde{f}$ στην $\tilde{g}$. Τα μονοπάτια $\widetilde{H}(s, 0)$ και $\tilde{f}(s)$ είναι ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού (του $f$) με την ίδια αρχή $\widetilde{H}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων μονοπατιών έπεται ότι $\widetilde{H}(s, 0) = \tilde{f}(s)$, για κάθε $s \in I$. Το μονοπάτι $\widetilde{H}(0, t)$ είναι σταθερό ως ανύψωση του σταθερού μονοπατιού $H(0, t) = f(0) = g(0)$. Συνεπώς, $\widetilde{H}(0, t) = \widetilde{H}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, για κάθε $t \in I$. Ομοίως προκύπτει ότι $\widetilde{H}(s, 1) = \tilde{g}(s)$, για κάθε $s \in I$, αφού και τα δύο μονοπάτια είναι ανυψώσεις του μονοπατιού $g$ που έχουν την ίδια αρχή $\widetilde{H}(0, 1) = \tilde{g}(0)$. Επίσης, το μονοπάτι $\widetilde{H}(1, t)$ είναι σταθερό ως ανύψωση του σταθερού μονοπατιού $f(1) = g(1)$ και έτσι $\widetilde{H}(1, t) = \widetilde{H}(1, 0) = \tilde{f}(1) = \widetilde{H}(1, 1) = \tilde{g}(1)$, για κάθε $t \in I$. □

Ένα από τα κύρια αντικείμενα της μελέτης μας είναι η θεμελιώδης ομάδα ενός τοπολογικού χώρου. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ιδιότητες των χώρων επικάλυψης οι οποίες συσχετίζονται με τη θεμελιώδη ομάδα τόσο του χώρου επικάλυψης όσο και του επικαλυπτόμενου χώρου.

**Λήμμα 7.1.11.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$. Αν ο $X$ είναι συνεκτικός, τότε ο πληθάριθμος $|p^{-1}(x)|$ είναι σταθερός, καθώς $x \in X$. Δηλαδή, $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$ για κάθε ζεύγος σημείων $x, y$ του $X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x_0 \in X$ και $A = \{y \in X : |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x_0)|\}$. Το $A$ είναι μη κενό, αφού περιέχει το $x_0$.

Το $A$ είναι ανοικτό. Πράγματι, για κάθε $x \in A$ θεωρούμε στοιχειώδη περιοχή $U_x$ του $x$. Εφόσον κάθε συνιστώσα της αντίστροφης εικόνας $p^{-1}(U_x)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε νήμα, έχουμε ότι $|p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|$, για κάθε $y \in U_x$. Άρα $x \in U_x \subseteq A$ που σημαίνει ότι το $A$ είναι ανοικτό.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το συμπλήρωμα $X \setminus A$ του $A$ είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών, ένα ανοικτό για κάθε πληθάριθμο διαφορετικό του $|p^{-1}(x_0)|$. Από τη συνεκτικότητα του $X$ έπεται ότι $A = X$. □

**Πρόταση 7.1.12.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$ και $x_0 \in X$. Τότε για κάθε $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ο επαγόμενος ομομορφισμός $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, η εικόνα του μονομορφισμού $p_*$ αποτελείται από τις κλάσεις ομοτοπίας θηλειών στο $x_0$, των οποίων οι ανυψώσεις με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειές (δηλ. έχουν τέλος το $\tilde{x}_0$).*

*Απόδειξη.* Έστω $[\tilde{f}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ με $p_*([\tilde{f}]) = 1$, ισοδύναμα $p \circ \tilde{f} \simeq C_{x_0}$. Η $\tilde{f}$ είναι ανύψωση της $p \circ \tilde{f}$ που έχει την ίδια αρχή με την ανύψωση $C_{\tilde{x}_0}$ του σταθερού μονοπατιού $C_{x_0}$. Εφόσον τα μονοπάτια $p \circ \tilde{f}$ και $C_{x_0}$ είναι ομοτοπικά, από την Πρόταση 7.1.10 έπεται ότι και οι ανυψώσεις τους (αφού έχουν την ίδια αρχή) είναι ομοτοπικές, δηλαδή $[\tilde{f}] = [C_{\tilde{x}_0}] = 1$, που αποδεικνύει ότι η $p_*$ είναι μονομορφισμός.

Για τον πρόσθετο ισχυρισμό, έστω $[f] \in \operatorname{Im} p_*$. Τότε $[f] = p_*([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}]$, δηλαδή $p \circ \tilde{g} \simeq f$, για κάποια θηλειά $\tilde{g}$ στο $\tilde{x}_0$. Αν θεωρήσουμε μια ανύψωση $\tilde{f}$ του $f$ με αρχή $\tilde{x}_0$, τότε τα μονοπάτια $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ είναι ανυψώσεις με την ίδια αρχή των ομοτοπικών μονοπατιών $f$ και $p \circ \tilde{g}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 7.1.10, $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$. Αφού το μονοπάτι $\tilde{g}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$ και το ομοτοπικό του $\tilde{f}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$. □

**Πρόταση 7.1.13.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$, $x_0 \in X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε*

$$|p^{-1}(x_0)| = [\pi_1(X, x_0) : p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)].$$

Υπενθυμίζουμε ότι με $[G : H]$ συμβολίζουμε τον δείκτη μιας υποομάδας $H$ σε μια ομάδα $G$.

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με $H$ την υποομάδα $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : \Big\{\text{Δεξιά σύμπλοκα της } H \text{ στην } \pi_1(X, x_0)\Big\} \to p^{-1}(x_0)$$

ως ακολούθως: αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε $\Phi\big(H[f]\big) = \tilde{f}(1)$, όπου $\tilde{f}$ η ανύψωση της $f$ με αρχή το $\tilde{x}_0$.

- Η $\Phi$ είναι καλά ορισμένη: Αν $\Phi\big(H[f]\big) = \Phi\big(H[g]\big)$, τότε $[f] = [h][g]$ για κάποιο στοιχείο $[h] \in H$ και ως εκ τούτου $f \simeq h \cdot g$. Θεωρούμε ανυψώσεις $\tilde{f}, \tilde{h}$ και $\tilde{g}$ με αρχή $\tilde{x}_0$ των μονοπατιών $f, h$ και $g$, αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση η ανύψωση $\tilde{h}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$ και συνεπώς ορίζεται το γινόμενο $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$. Τα μονοπάτια $\tilde{f}$ και $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ είναι ομοτοπικά ως ανυψώσεις με την ίδια αρχή $\tilde{x}_0$ των ομοτοπικών μονοπατιών $f$ και $h \cdot g$, αντίστοιχα. Ιδιαιτέρως, έχουν το ίδιο τέλος, δηλαδή, $\tilde{f}(1) = (\tilde{h} \cdot \tilde{g})(1) = \tilde{g}(1)$.

- Η απεικόνιση $\Phi$ είναι επί: Είναι άμεση συνέπεια της κατά τόξα συνεκτικότητας του $\widetilde{X}$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, θεωρούμε μονοπάτι $\tilde{f}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$ και παρατηρούμε ότι $\Phi\big(H[p \circ \tilde{f}]\big) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$.

- Η απεικόνιση $\Phi$ είναι $1-1$: Ας υποθέσουμε ότι $\Phi\big(H[f]\big) = \Phi\big(H[f]\big)$. Τότε οι αντίστοιχες ανυψώσεις $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ (όπως στον ορισμό της $\Phi$) έχουν το ίδιο τέλος. Αυτό σημαίνει ότι ορίζεται το γινόμενο μονοπατιών $\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1}$ και είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$. Άρα, από την προηγούμενη πρόταση, $[p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1})] \in H$. Όμως $H \ni [p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1})] = [f] \cdot [g]^{-1}$, που σημαίνει ότι τα στοιχεία $[f]$ και $[g]$ ορίζουν το ίδιο δεξιό σύμπλοκο της $H$, δηλαδή, $H[f] = H[g]$.

Τελικά, αφού $\Phi$ είναι $1-1$ και επί, έχουμε τη ζητούμενη ισότητα μεταξύ της πληθικότητας του νήματος $p^{-1}(x_0)$ και του πλήθους των δεξιών συμπλόκων της $H$ στην $\pi_1(X, x_0)$. $\square$

## 7.2 Η Θεμελιώδης Ομάδα του Κύκλου

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, υπολογίζουμε τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων.

**Θεώρημα 7.2.1.** *Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι άπειρη κυκλική.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι $\pi_1(S^1, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση για την επικάλυψη $p : \mathbb{R} \to S^1$, με $p(x) = e^{2\pi i x}$ και $x_0 = 1$. Εφόσον $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ και η ομάδα $p_*\big(\pi_1(\mathbb{R}, 0)\big)$ είναι τετριμμένη (ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι απλά συνεκτικός), έχουμε μια

$1-1$ και επί απεικόνιση $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, όπου η εικόνα $\Phi([f])$ ενός στοιχείου $[f]$ της $\pi_1(S^1, 1)$ είναι το τέλος $\tilde{f}(1)$, ανυψώσεως $\tilde{f}$ της $f$ με αρχή το $0$.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \to (\mathbb{Z}, +)$ είναι ισομορφισμός ομάδων. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\Phi$ είναι ομομορφισμός. Έστω, λοιπόν, $[f]$ και $[g]$ δύο στοιχεία της $\pi_1(S^1, 1)$ και $\tilde{f}, \tilde{g}$ ανυψώσεις των $f, g$, αντίστοιχα, με αρχή το $0$. Θεωρουμε τη μεταφορά $\tilde{g}_1(s)$ με αρχή το $\tilde{f}(1) = n$, δηλαδή, $\tilde{g}_1(s) = n + \tilde{g}(s)$ και παρατηρούμε ότι

$$p \circ \tilde{g}_1(s) = e^{2\pi i \tilde{g}_1(s)} = e^{2\pi i (n+\tilde{g}(s))} = e^{2\pi i n} e^{2\pi i \tilde{g}(s)} = p \circ \tilde{g}(s) = g(s).$$

Από τον τρόπο επιλογής του μονοπατιού $\tilde{g}_1(s)$ ορίζεται το γινόμενο μονοπατιών $\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1$ και $p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1) = f \cdot g$, που σημαίνει ότι το μονοπάτι $\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1$ είναι ανύψωση του $f \cdot g$ με αρχή το $0$. Συνεπώς,

$$\Phi\big([f]\cdot[g]\big) = \Phi\big([f\cdot g]\big) = (\tilde{f}\cdot\tilde{g}_1)(1) = \tilde{g}_1(1) = n+\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)+\tilde{g}(1) = \Phi\big([f]\big)+\Phi\big([g]\big).$$

□

**Πόρισμα 7.2.2.** *Οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικοί, αν $n \neq 2$.*

*Απόδειξη.* Με ένα απλό επιχείρημα συνεκτικότητας διαπιστώνουμε ότι ο $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ένα σημείο από τον πρώτο χώρο, ο χώρος που προκύπτει έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, ενώ οποιοδήποτε σημείο και να αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{R}^2$ ο χώρος που προκύπτει είναι συνεκτικός.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $n > 2$ και ότι $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$ μέσω ενός ομοιομορφισμού $\varphi$. Τότε $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(\mathbf{0})\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και έτσι $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Εφόσον ο χώρος $\mathbb{R}^m \setminus \mathbf{0}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τη σφαίρα $S^{m-1}$, προκύπτει ότι $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^{n-1})$, που μας οδηγεί σε αντίφαση, αφού η πρώτη ομάδα είναι άπειρη κυκλική, ενώ η δεύτερη τετριμμένη όταν $n > 2$. □

Όπως θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών, οι χώροι $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικοί οποτεδήποτε $m \neq n$.

**Θεώρημα 7.2.3.** *Η θεμελιώδης ομάδα του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{RP}^n$, για $n \geq 2$, είναι κυκλική τάξεως $2$.*

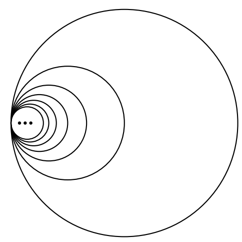
*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.1.6 και τα σχόλια που το ακολουθούν, ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ επικαλύπτεται από τη σφαίρα $S^n$ και κάθε νήμα αποτελείται από δύο στοιχεία. Εφόσον η σφαίρα $S^n$ είναι απλά συνεκτικός χώρος για $n \geq 2$ (βλ. Πρόταση 6.3.19), έπεται ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $\mathbb{RP}^n$ αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία και ως εκ τούτου είναι κυκλική τάξεως 2. $\square$

**Παρατήρηση 7.2.4.** Αφού ο χώρος $\mathbb{RP}^1$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο (βλ. Άσκηση 6), η θεμελιώδης ομάδα του είναι επίσης άπειρη κυκλική.

Συνοψίζοντας,

$$\pi_1(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{για } n = 1 \\ 1, & \text{για } n \geq 2 \end{cases} \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{για } n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{για } n \geq 2. \end{cases}$$

**Παράδειγμα 7.2.5.** (Υπεραριθμήσιμη θεμελιώδης ομάδα) Για κάθε φυσικό $n \geq 1$, συμβολίζουμε με $K_n$ τον κύκλο του επιπέδου με κέντρο το σημείο $(1/n, 0)$ και ακτίνα $1/n$. Θεωρούμε την ένωση $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ των κύκλων και την εφοδιάζουμε με την τοπολογία του υπόχωρου που κληρονομεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Ο χώρος $X$ είναι γνωστός ως «σκουλαρίκι της Χαβάης» (Hawaiian earing) και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συμπαγής.



Για κάθε $n \geq 1$ η απεικόνιση $r_n : X \to K_n$ που είναι η ταυτοτική στον $K_n$ και απεικονίζει κάθε άλλο κύκλο $K_m, m \neq n$ στο σημείο $x_0 = (0, 0)$ είναι μια συστολή. Οι συστολές αυτές επάγουν μια ακολουθία επιμορφισμών

$$(r_n)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(K_n, x_0) = \mathbb{Z}.$$

Από την ακολουθία των επιμορφισμών, προκύπτει απεικόνιση

$$r : \pi_1(X, x_0) \to \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z} \quad \text{με} \quad [\gamma] \mapsto \big((r_1)_*([\gamma]), (r_2)_*([\gamma]), \dots\big),$$

όπου $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}$ είναι η ομάδα καρτεσιανό γινόμενο (πράξη κατά «συν/νη») αριθμησίμων το πλήθος αντιτύπων της άπειρης κυκλικής. Η απεικόνιση $r$ είναι επί, γιατί για κάθε ακολουθία ακέραιων $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ μπορούμε να ορίσουμε θηλειά $\gamma$ του $X$ στο $x_0$ η οποία τυλίγεται $\lambda_n$ φορές γύρω από τον κύκλο $K_n$ φορές στο διάστημα $[1 - 1/n, 1 - 1/(n + 1)]$ και της οποίας η κλάση ομοτοπίας $[\gamma]$ απεικονίζεται στην ακολουθία $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. Είναι άμεσο ότι η

$\gamma$ είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)]$. Η $\gamma$ είναι, επίσης, συνεχής στο 1, εφόσον κάθε ανοικτή περιοχή $U \subseteq X$ του $x_0$ περιέχει, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος, όλους τους κύκλους $K_n$ και ως εκ τούτου η αντίστροφη εικόνα $\gamma^{-1}(U)$ είναι ανοικτό ως το συμπλήρωμα μιας πεπερασμένης ένωσης κλειστών. Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}$ είναι υπεραριθμήσιμη ομάδα (κάθε πραγματικός αριθμός αναπαρίσταται από μια ακολουθία ακεραίων) και άρα, αφού η $r$ είναι επί, η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμη.

Έχοντας υπολογίσει τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων, κλείνουμε αυτή την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι η θεμελιώδης ομάδα του καρτεσιανού γινομένου δύο χώρων είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο των θεμελιωδών ομάδων των χώρων.

**Πρόταση 7.2.6.** *Έστω $X_1$, $X_2$ ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων και $X_1 \times X_2$ το καρτεσιανό τους γινόμενο με την τοπολογία γινόμενο. Αν τα $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ είναι σημεία αναφοράς των δύο χώρων και $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, τότε*

$$\pi_1(X_1 \times X_2, x) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2).$$

*Απόδειξη.* Για $i = 1, 2$, συμβολίζουμε με $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ την προβολή στον $i$-παράγοντα. Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της τοπολογίας γινόμενο είναι ότι μια απεικόνιση $f : Y \to X_1 \times X_2$, όπου $Y$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, είναι συνεχής αν και μόνο αν η σύνθεσή της $p_i \circ f$ με κάθε προβολή $p_i$ είναι συνεχής.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i \circ f"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, κάθε θηλειά $f$ στο $x$ στον χώρο γινόμενο, μας δίνει μια θηλειά $p_1 \circ f$ στο $x_1$ εντός του πρώτου χώρου και μια θηλειά $p_2 \circ f$ στο $x_2$ στον δεύτερο χώρο. Έτσι ορίζεται απεικόνιση

$$\varphi : \pi_1(X_1 \times X_2, x) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$$

με $\varphi([f]) = ([p_1 \circ f], [p_2 \circ [f]) = \big(p_{1*}([f]), p_{2*}([f])\big)$. Κάθε ομοτοπία $H$ μεταξύ θηλειών στο $x$ καθορίζεται πλήρως από το ζεύγος των ομοτοπιών $p_1 \circ H$ και $p_2 \circ H$ μεταξύ θηλειών στα $x_1$ και $x_2$, αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι η $\varphi$ είναι $1-1$, ενώ είναι άμεσο ότι είναι επί και ομομορφισμός. □

**Παρατήρηση 7.2.7.** Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μια πεπερασμένη οικογένεια τοπολογικών χώρων, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ ο αντίστοιχος χώρος γινόμενο, $x_i \in X_i$ σημεία αναφοράς και $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Με επαγωγή (ή απευθείας όπως πριν) έχουμε ισομορφισμό

$$\pi_1(X_1 \times \cdots \times X_n, x) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \cdots \times \pi_1(X_n, x_n).$$

**Παράδειγμα 7.2.8.** Αν $T = S^1 \times S^1$ είναι η σπείρα, τότε $\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Γενικότερα, για τη θεμελιώδη ομάδα της $n$-διάστατης σπείρας, έχουμε ότι $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Δηλαδή, το ευθύ γινόμενο $n$ το πλήθος αντιτύπων της άπειρης κυκλικής.

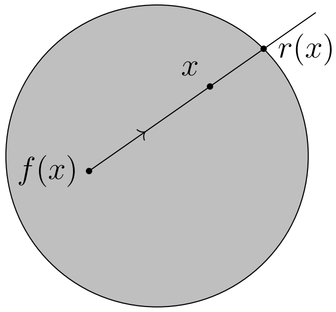
# 7.3 Εφαρμογές

## Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

**Λήμμα 7.3.1.** *Δεν υπάρχει συστολή από τον κλειστό δίσκο $D^2$ στο σύνορό του $S^1$.*

*Απόδειξη.* Αν υπήρχε συστολή $r : D^2 \to S^1$, τότε η ένθεση $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ θα έδινε μονομορφισμό $i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D^2, x_0)$, όπου $x_0 \in S^1$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί, αφού η πρώτη ομάδα είναι άπειρη και η δεύτερη πεπερασμένη (τετριμμένη). □

**Θεώρημα 7.3.2.** *Αν η $f : D^2 \to D^2$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in D^2$ τέτοιο, ώστε $f(x) = x$.*




*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$. Θα ορίσουμε συστολή $r : D^2 \to S^1$ η ύπαρξη της οποίας σε συνδυασμό με το προηγούμενο λήμμα μας δίνει την επιθυμητή αντίφαση. Εφόσον $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ημιευθεία $[f(x), x)$ με αρχή το $f(x)$ που διέρχεται από το $x$. Ορίζουμε ως $r(x)$ το σημείο τομής της παραπάνω ημιευθείας με το σύνορο του δίσκου $S^1$ (όπως στο παραπάνω σχήμα). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $r$ είναι συνεχής, ενώ είναι άμεσο ότι $r(a) = a$ για κάθε $a \in S^1$. □

## Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας

Πρώτα, εισάγουμε την έννοια του βαθμού για συνεχείς απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του.

Έστω $\varphi : S^1 \to S^1$ μια συνεχής απεικόνιση. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1 προκύπτει ότι κλάση ομοτοπίας $\alpha$ του μονοπατιού $f(s) = e^{2\pi i s}$, $s \in I$, είναι γεννήτορας της άπειρης κυκλικής $\pi_1(S^1, 1)$. Θεωρούμε μονοπάτι $h$ στον κύκλο από το σημείο $\varphi(1)$ στο 1. Η σύνθεση

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(S^1, \varphi(1)) \xrightarrow{\Phi_h} \pi_1(S^1, 1) ,$$

όπου $\Phi_h([g]) = [h^{-1}gh]$ είναι ο ισομορφισμός της αλλαγής σημείου αναφοράς, ως ενδομορφισμός άπειρης κυκλικής απεικονίζει τον γεννήτορα σε πολλαπλάσιό του. Δηλαδή, υπάρχει ακέραιος $n$ τέτοιος, ώστε $(\Phi_h \circ \varphi_*)(\alpha) = n \cdot \alpha$. Ο **βαθμός** της $\varphi$ ορίζεται ως ο ακέραιος $n$ και συμβολίζεται με deg$\varphi$.

Ο βαθμός της $\varphi$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του μονοπατιού $h$, γιατί η ομάδα $\pi_1(S^1, 1)$ είναι αβελιανή. Πράγματι, αν $\gamma$ είναι ένα άλλο μονοπάτι από το $\varphi(1)$ στο 1 και $[g]$ ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας $G = \pi_1(S^1, 1)$, τότε

$$[\gamma^{-1}g\gamma] = [\gamma^{-1}][g][\gamma] = \underbrace{[\gamma^{-1}h]}_{\in G}\underbrace{[h^{-1}g\gamma]}_{\in G} = [h^{-1}g\gamma][\gamma^{-1}h] = [h^{-1}gh].$$

**Παρατήρηση 7.3.3.** Έπεται άμεσα από τον ορισμό ότι ο βαθμός μιας σταθερής απεικόνισης ισούται με $0$ και ο βαθμός της απεικονίσεως $x \mapsto x^m$ ισούται με $m$.

Ο βαθμός είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο:

**Λήμμα 7.3.4.** *Αν οι $\varphi, \psi : S^1 \to S^1$ είναι δύο ομοτοπικές (συνεχείς) απεικονίσεις, τότε deg$\varphi$ = deg$\psi$.*

*Απόδειξη.* Έστω $H$ μια ομοτοπία από την $\varphi$ στην $\psi$, $\gamma$ μονοπάτι από το $\psi(1)$ στο 1 και $h$ το μονοπάτι από το $\varphi(1)$ στο $\psi(1)$ που ορίζεται μέσω του τύπου $h(t) = H(1, t)$. Από το Λήμμα 6.3.2 έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(S^1, \varphi(1)) \arrow[d, "\Phi_h"] & \\
 & \pi_1(S^1, \psi(1)) \arrow[r, "\Phi_\gamma"] & \pi_1(S^1, 1)
\end{tikzcd}$$

Εφόσον ο βαθμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του μονοπατιού και

$$\Phi_\gamma \circ \psi_* = \Phi_\gamma \circ \Phi_h \circ \varphi_* = \Phi_{h\cdot\gamma} \circ \varphi_*$$

έχουμε ότι $\deg\varphi = \deg\psi$. □

**Θεώρημα 7.3.5** (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας)**.** *Έστω $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0$ ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού $n$ με μιγαδικούς συντελεστές. Τότε υπάρχει μιγαδικός αριθμός $x$, έτσι ώστε $f(x) = 0$.*

*Απόδειξη.* Με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}$. Ιδιαιτέρως, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in S^1$ και έτσι ορίζεται η συνεχής απεικόνιση $\hat{f} : S^1 \to S^1$ με τύπο

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

- Εφόσον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x$ με $\|x\| \leq 1$ (δηλαδή στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο), μπορούμε να ορίσουμε ομοτοπία $H : S^1 \times I \to S^1$ μέσω του τύπου

  $$H(x,t) = \frac{f(tx)}{\|f(tx)\|}$$

  από τη σταθερή απεικόνιση $\frac{f(0)}{\|f(0)\|}$ στην $\hat{f}$. Έπεται ότι $\deg\hat{f} = 0$.

- Όπως πριν, έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x$ με $\|x\| \geq 1$ (δηλαδή στο συμπλήρωμα του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου). Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε ομοτοπία $F : S^1 \times I \to S^1$ με

  $$F(x,t) = \frac{K(x,t)}{\|K(x,t)\|},$$

  όπου $K(x,t) = x^n + t(a_1x^{n-1} + ta_2x^{n-2} + \cdots + t^{n-1}a_n)$, $x \in S^1, t \in I$. Σημειώνουμε ότι $K(x,t) = t^n f(x/t) \neq 0$, για $t \neq 0$, αφού $\|x/t\| \geq 1$. Επίσης, $K(x,0) \neq 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $F$ είναι ομοτοπία από την $x^n$ στην $\hat{f}$ και άρα $\deg\hat{f} = n$.

Τελικά, $0 = \deg\hat{f} = n > 0$, που είναι άτοπο. □

## Το θεώρημα των Borsuk-Ulam

Άλλη μια σπουδαία εφαρμογή όσων έχουμε δει μέχρι τώρα είναι το θεώρημα των Borsuk-Ulam.

**Θεώρημα 7.3.6** (Borsuk-Ulam). *Έστω $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε υπάρχει σημείο $x \in S^2$ με $f(x) = f(-x)$. Ιδιαιτέρως, η $f$ δεν είναι $1-1$.*

Ερμηνεύοντας το θεώρημα θα μπορούσε κάποιος να πει ότι υπάρχουν πάντα δύο αντιποδικά σημεία στην επιφάνεια της Γης με ίση θερμοκρασία και πίεση (υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία και η πίεση μεταβάλλονται συνεχώς). Το θεώρημα, που ισχύει γενικότερα για $n \geq 2$, αποδείχθηκε πρώτα από τον Karol Borsuk, ο οποίος αποδίδει τη διατύπωση του προβλήματος στον Stanislaw Ulam. Όταν $n = 1$, δηλαδή για συνεχείς απεικονίσεις $f : S^1 \to \mathbb{R}$, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Για περισσότερες πληροφορίες και εφαρμογές ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [4].

Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο:

**Θεώρημα 7.3.7.** *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : S^2 \to S^1$ η οποία να διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, δηλαδή τέτοια, ώστε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^2$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι υπάρχει συνεχής $f : S^2 \to S^1$ που να διατηρεί τα αντιποδικά σημεία. Έχουμε δείξει ότι οι απεικονίσεις πηλίκο

$$p_2 : S^2 \to S^2/[x \sim -x] \cong \mathbb{RP}^2 \quad \text{και} \quad p_1 : S^1 \to S^1/[x \sim -x] \cong S^1$$

είναι επικαλύψεις. Αφού η $f$ διατηρεί αντιποδικά σημεία, επάγει συνεχή απεικόνιση $g : \mathbb{RP}^2 \to S^1$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Ο επαγόμενος ομομορφισμός $g_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2) \to \pi_1(S^1)$ (σε οποιοδήποτε σημείο αναφοράς και αν ληφθεί) είναι τετριμμένος, αφού η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $\mathbb{RP}^2$ είναι πεπερασμένη (κυκλική τάξεως δύο), ενώ η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου δεν περιέχει μη τετριμμένα στοιχεία πεπερασμένης τάξης, ως άπειρη κυκλική.

Θεωρούμε μια κλάση ομοτοπίας μονοπατιών $[\alpha]$ στη σφαίρα $S^2$ με άκρα αντιποδικά σημεία. Τότε τα άκρα της κλάσεως $[f \circ \alpha]$ είναι αντιποδικά σημεία της $S^1$. Έτσι η $[f \circ \alpha]$ είναι «ανύψωση» της κλάσης $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ (που αποτελείται από θηλειές), η οποία έχει διαφορετικά άκρα. Συνεπώς, η κλάση $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ δεν ανήκει στην εικόνα της $p_{1*}$ και ως εκ τούτου δεν ισούται με κλάση ομοτοπίας σταθερού μονοπατιού. Όμως, από τη μεταθετικότητα του διαγραμμάτος προκύπτει η αντίφαση ότι η κλάση $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ ισούται με κλάση ομοτοπίας σταθερού μονοπατιού, αφού $[p_1 \circ f \circ \alpha] = g_*[p_2 \circ \alpha]$ και η $g_*$ είναι τετριμμένη. $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.6.* Αν υποθέσουμε ότι $f(x) \neq f(-x)$ για κάθε $x \in S^2$, τότε ορίζεται συνεχής απεικόνιση $g : S^2 \to S^1$ με

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Παρατηρούμε ότι $g(-x) = g(-x)$, για κάθε $x \in S^2$, το οποίο αντιφάσκει στο προηγούμενο θεώρημα. $\square$

**Πόρισμα 7.3.8.** *Έστω $A_1$, $A_2$ και $A_3$ τρία κλειστά υποσύνολα της σφαίρας $S^2$, έτσι ώστε $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα $A_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων $\{x, -x\}$.*

*Απόδειξη.* Για το τυχαίο $x \in S^2$ θεωρούμε τις αποστάσεις του από τα $A_i$, $d_i(x) = d(x, A_i) = inf\{d(x, a_i) : a_i \in A_i\}$ και την απεικόνιση $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x) = \big(d_1(x), d_2(x)\big)$, η συνέχεια της οποίας έπεται από τη συνέχεια της συνήθους μετρικής $d$ του $\mathbb{R}^3$. Από το θεώρημα των Borsuk-Ulam, υπάρχει $x_0 \in S^2$ με $f(x_0) = f(-x_0)$. Δηλαδή, $d_1(x_0) = d_1(-x_0)$ και $d_2(x_0) = d_2(-x_0)$. Αν μια από τις αποστάσεις $d_1(x_0)$ ή $d_2(x_0)$ είναι μηδέν, τότε το ζεύγος των σημείων $\{x_0, -x_0\}$ περιέχεται στο $A_1$ ή στο $A_2$, αντίστοιχα, αφού τα $A_1$, $A_2$ είναι κλειστά. Αν, από την άλλη, $d_1(x_0) > 0$ και $d_2(x_0) > 0$, τότε αμφότερα τα $x_0, -x_0$ δεν ανήκουν σε κάνενα από τα $A_1$ ή $A_2$ και συνεπώς το ζεύγος $\{x_0, -x_0\}$ περιέχεται στο $A_3$, αφού τα $A_1$, $A_2$ και $A_3$ καλύπτουν τη σφαίρα $S^2$. $\square$

# Ασκήσεις

7.1 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης.

(i) Αποδείξτε ότι η $p$ είναι τοπικός ομοιομορφισμός (δηλ. κάθε σημείο του $\widetilde{X}$ έχει περιοχή $U$ με $p(U)$ ανοικτό και $p|_U : U \to p(U)$ ομοιομορφισμός), ανοικτή απεικόνιση και απεικόνιση πηλίκο. Επιπλέον, αν η $p$ είναι $1-1$, τότε είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Αν για κάθε $x \in X$, το νήμα $p^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο (δηλ. το κάλυμμα είναι πεπερασμένο), τότε η $p$ είναι κλειστή απεικόνιση.

(iii) Αν ο $X$ είναι συμπαγής και Hausdorff, τότε ο $\widetilde{X}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν το κάλυμμα είναι πεπερασμένο.

7.2 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης, $A$ ένας υπόχωρος του $X$ και $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$. Δείξτε ότι ο περιορισμός $p : \widetilde{A} \to A$ είναι επικάλυψη.

7.3 Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν συστολές $r : X \to A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) $X = \mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^3 \supset A \cong \mathbb{S}^1$.
(ii) $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$, όπου $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$, και $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ το σύνορο του $X$.

7.4 Λέμε ότι ο χώρος $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, αν για κάθε συνεχή $f : X \to X$ υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$. Αποδείξτε ότι αν ο χώρος $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε:
(i) Αν $A$ υπόχωρος του $X$ για τον οποίο υπάρχει συστολή $r : X \to A$, τότε ο $A$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.
(ii) Κάθε χώρος $Y$ ομοιομορφικός με τον $X$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

7.5 Έστω $B^2$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί παράδειγμα συνεχούς απεικονίσεως $f : B^2 \to B^2$ χωρίς σταθερά σημεία.

7.6 (i) Αποδείξτε ότι η αντιποδική απεικόνιση $a : S^1 \to S^1$, $a(x) = -x$, είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, $deg(a) = 1$.
(ii) Κάθε συνεχής $f : S^1 \to S^1$ τέτοια, ώστε $deg(f) \neq 1$ έχει σταθερό σημείο. [Υπόδειξη: Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in S^1$, τότε $f \simeq a$.]

7.7 Έστω $f : S^1 \to S^1$ συνεχής ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
(i) Αποδείξτε ότι η $f$ έχει σταθερό σημείο.
(ii) Αποδείξτε ότι η $f$ απεικονίζει κάποιο σημείο $x$ στο αντιποδικό του $-x$.

7.8 Έστω $U$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $x \in U$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $U \setminus \{x\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν «μικρό» κύκλο $C$ στο $U$ γύρω από το $x$ και μελετήστε την ακολουθία των ενθέσεων $C \hookrightarrow U \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$.]

7.9 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.

7.10 Κάθε $3 \times 3$ πίνακας με στοιχεία θετικούς πραγματικούς αριθμούς έχει ένα ιδιοδιάνυσμα με θετική ιδιοτιμή. [Υπόδειξη: Η περιοχή $B = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \text{ και } |v| = 1\}$ είναι ομοιομορφική με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο.]

7.11 Έστω $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ένα πολυώνυμο, το οποίο δεν έχει ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $S^1$. Δείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου (δηλ. $|x| < 1$) ισούται με τον βαθμό της απεικονίσεως $\hat{p} : S^1 \to S^1$, όπου $\hat{p}(x) = \dfrac{p(x)}{|p(x)|}$ [Υπόδειξη: Εκφράστε το $p(x)$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων $\phi(x) \cdot \psi(x)$, έτσι ώστε το $\phi(x)$ να έχει τις ρίζες του εντός του μοναδιαίου δίσκου, το $\psi(x)$ εκτός του μοναδιαίου δίσκου και συνδυάστε τις δύο περιπτώσεις της αποδείξεως του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας που έγινε στην τάξη. Τέλος, παρατηρήστε ότι οι απεικονίσεις $af$ και $f$ είναι ομοτοπικές για κάθε $a \in S^1$ και $f : S^1 \to S^1$].

7.12 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, αποδείξτε ότι το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων έχει λύση:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2}\sin(x)y - 2x = 0 \\ \frac{1}{2}\cos(x)y + \frac{x^2}{2} - 2y = 0 \end{array} \right\}$$

7.13 Έστω $f : X \to Y$ ένας τοπικός ομοιομορφισμός μεταξύ δύο χώρων Hausdorff. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι επί και αντιστρέφει τα μονοσύνολα σε συμπαγή. Αν $\left|f^{-1}(y_1)\right| = \left|f^{-1}(y_2)\right|$ για κάθε ζεύγος σημείων $y_1, y_2$ του $Y$, τότε η $f$ είναι απεικόνιση επικάλυψης [Υπόδειξη: Αναζητήστε στοιχειώδη περιοχή του τυχαίου $y \in Y$ της μορφής $\cap_i f(U_i)$, όπου τα $U_i$ είναι ανοικτά, ξένα και απεικονίζονται ομοιομορφικά μέσω της $f$ στην ίδια ανοικτή περιοχή του $y$].

# Βιβλιογραφία

[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[4] J. Matousek. Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, Universitext 2003.

[5] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[6] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.

# Κεφάλαιο 8

# Το Θεώρημα των Seifert-Van Kampen

## Περιεχόμενα



Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου $X$, ο οποίος εκφράζεται ως ένωση $\cup_\alpha U_\alpha$ ανοικτών υποσυνόλων του, συναρτήσει των θεμελιωδών ομάδων των $U_\alpha$ και των τομών τους, καθώς και των επαγόμενων ομομορφισμών που επάγονται από τις ενθέσεις $U_\alpha \hookrightarrow X$. Το βασικό εργαλείο είναι το θεώρημα των Seifert-Van Kampen το οποίο μας δίνει, με ασθενείς υποθέσεις, τη δυνατότητα να υπολογίσουμε μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του χώρου. Ιδιαιτέρως, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα ενός γραφήματος, μιας συμπαγούς επιφανείας και γενικότερα οποιουδήποτε πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών.

## 8.1 Διατύπωση και Απόδειξη του Θεωρήματος

Αρχίζουμε διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το θεώρημα στην περίπτωση που το κάλυμμα του χώρου αποτελείται από δύο ανοικτά υποσύνολα. Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι η ένωση δύο ανοικτών, κατά τόξα συνεκτικών υποσυνόλων του $U_1$

και $U_2$ με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή. Επιλέγουμε σημείο αναφοράς $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Το μεταθετικό διάγραμμα των ενθέσεων

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_2"] & U_1 \arrow[d, hook, "j_1"] \\
U_2 \arrow[r, hook, "j_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

μας δίνει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα των αντίστοιχων επαγόμενων ομομορφισμών:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[d, "i_{2*}"] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "j_{1*}"] \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "j_{2*}"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων γινομένων, οι ομομορφισμοί $j_{1*}$ και $j_{2*}$ επάγουν ομομορφισμό $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U_1, x_0) \arrow[dr, hook, "\lambda_1"] \arrow[drr, bend left, "j_{1*}"] & & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(U_2, x_0) \arrow[ur, hook, "\lambda_2"'] \arrow[urr, bend right, "j_{2*}"'] & &
\end{tikzcd}$$

όπου $\lambda_1$ και $\lambda_2$ είναι οι ενθέσεις των παραγόντων στο ελεύθερο γινόμενο. Έτσι έχουμε $\Phi|_{\pi_1(U_1,x_0)} = j_{1*}$ και $\Phi|_{\pi_1(U_2,x_0)} = j_{2*}$. Για κάθε στοιχείο $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, παρατηρούμε ότι

$$\Phi\big(i_{1*}(g)\big) = j_{1*}\big(i_{1*}(g)\big) = j_{2*}\big(i_{2*}(g)\big) = \Phi\big(i_{2*}(g)\big).$$

Συνεπώς, ο πυρήνας της $\Phi$ περιέχει κάθε στοιχείο της μορφής $(i_{1*}(g)) \cdot (i_{2*}(g))^{-1}$, όπου $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Ατύπως, αυτό μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι μια θηλειά στο $x_0$ που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, είτε τη δούμε ως θηλειά στο $U_1$ είτε ως θηλειά στο

$U_2$, το στοιχείο που μας δίνει στη θεμελιώδη ομάδα του χώρου είναι το ίδιο. Το θεώρημα των Seifert-Van Kampen μας λέει ότι ο πυρήνας της $\Phi$ είναι η κανονική υπομάδα που παράγεται από αυτά ακριβώς τα στοιχεία.

**Θεώρημα 8.1.1** (Seifert-Van Kampen). *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $U_1$, $U_2$ δύο ανοικτά, κατά τόξα συνεκτικά υποσύνολα του $X$ με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή $U_1 \cap U_2$. Αν $X = U_1 \cup U_2$, τότε για κάθε $x_0 \in U_1 \cap U_2$ ο ομομορφισμός $\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, που ορίσθηκε πριν, είναι επί και ο πυρήνας του $\ker \Phi$ είναι η κανονική υποομάδα $N$ της $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $(i_{1*}(g)) \cdot (i_{2*}(g))^{-1}$ για $g \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$. Συνεπώς,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)\big)/N.$$

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε (χωρίς να γίνεται αναφορά) το μεταθετικό διάγραμμα και τον συμβολισμό που εισήχθη στην παράγραφο πριν τη διατύπωση του θεωρήματος. Επιπλέον, επειδή η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική, είναι χρήσιμο ο συνήθης συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί να κωδικοποιεί περισσότερες πληροφορίες από ότι συνήθως. Έστω $A$ ένα υποσύνολο του $X$. Θα γράφουμε, λοιπόν, $f \underset{A}{\simeq} g$ για να υποδηλώσουμε ότι δύο μονοπάτια $f$ και $g$ του $X$ είναι ομοτοπικά και ότι η ομοτοπία που θεωρούμε λαμβάνει χώρα στο υποσύνολο $A$ του $X$. Θα συμβολίζουμε επίσης με $[\gamma]_A$ την κλάση μιας θηλειάς $\gamma$ (που περιέχεται στο $A$) στην ομάδα $\pi_1(A, x_0)$. Τέλος, ως συνήθως, το γινόμενο μονοπατιών (ή κλάσεων) θα συμβολίζεται με τελεία $\cdot$ ενώ το γινόμενο στοιχείων στο ελεύθερο γινόμενο $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ θα συμβολίζεται με αστερίσκο $*$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό ο τύπος του ομομορφισμού

$$\Phi : \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\Phi\big([\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}\big) &= j_{\varepsilon_1 *}([\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}}) \cdot j_{\varepsilon_2 *}([\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}}) \cdots j_{\varepsilon_\nu *}([\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}) \\ &= [\gamma_1]_X \cdot [\gamma_2]_X \cdots [\gamma_\nu]_X = [\gamma_1 \cdots \gamma_\nu]_X,\end{aligned}$$

όπου $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ και διαδοχικά $\varepsilon_i$ διαφορετικά μεταξύ τους.

Ο ομομορφισμός $\Phi$ είναι επί, αφού $\Phi|_{\pi_1(U_1, x_0)} = j_{1*}$, $\Phi|_{\pi_1(U_2, x_0)} = j_{2*}$ και η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ παράγεται από τις εικόνες $\operatorname{Im} j_{1*}$, $\operatorname{Im} j_{2*}$ των ομομορφισμών $j_{1*}$, $j_{2*}$, αντίστοιχα (βλ. Παρατήρηση 6.3.18).

Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει, αν $[\gamma] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, τότε

$$\Phi\big(i_{1*}([\gamma]_{U_1\cap U_2}) * i_{2*}([\gamma]_{U_1\cap U_2})^{-1}\big) = \Phi([\gamma]_{U_1} * [\gamma]_{U_2}^{-1}) = [\gamma\gamma^{-1}]_X = 1,$$

που σημαίνει ότι $N \subseteq \ker\Phi$.

Το δύσκολο μέρος, είναι η απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού $\ker\Phi \subseteq N$. Έστω $g = [\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}}$ ένα στοιχείο του ελευθέρου γινομένου $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$, όπου $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ για κάθε $i = 1, \dots, \nu$ και διαδοχικά $\varepsilon_i$ διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι το $g$ ανήκει στον πυρήνα της $\Phi$. Τότε $[\gamma_1 \cdots \gamma_\nu]_X = 1$, ισοδύναμα $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu \underset{X}{\simeq} C_{x_0}$. Θα αποδείξουμε ότι το στοιχείο $g$ ανήκει στην υποομάδα $N$.

Έστω $H : I \times I \to X$ μια ομοτοπία από το μονοπάτι $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$ στο $C_{x_0}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Lebesgue, υποδιαιρούμε το $I \times I$ σε «τετραγωνάκια» $T_{ij}$ πλευράς $1/n$, έτσι ώστε καθένα από αυτά να απεικονίζεται μέσω της $H$ στο $U_1$ ή στο $U_2$. Δηλαδή, $T_{ij} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$, όπου $i, j \in \{1, \dots, n\}$ και $H(T_{ij}) \subseteq U_1$ ή $U_2$. Επιλέγοντας το $n$ καταλλήλως (αρκούντως μεγάλη δύναμη του 2) μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα άκρα των διαστημάτων (του [0,1]) που ορίζουν τις $\gamma_i$ στον τύπο γινόμενο $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$ είναι μέρη της υποδιαίρεσης της κάτω πλευράς του $I \times I$, δηλαδή είναι της μορφής $i/n$. Αν συμβολίσουμε με $\gamma_{ij}$ το μονοπάτι που προκύπτει από τον περιορισμό της ομοτοπίας $H$ στην οριζόντια κάτω πλευρά $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}$ του τετραγώνου $T_{i(j+1)}$, καταλλήλως αναπαραμετρικοποιημένο, τότε

$$H_0 = \gamma_1 \cdots \gamma_\nu \underset{X}{\simeq} \underbrace{(\gamma_{10} \cdots \gamma_{k0})}_{\gamma_1} \cdots \underbrace{(\gamma_{m0} \cdots \gamma_{n0})}_{\gamma_\nu},$$

αφού η ομοτοπία τη χρονική στιγμή $0$ μας δίνει την κάτω πλευρά του τετραγώνου $I \times I$ που είναι το μονοπάτι $\gamma_1 \cdots \gamma_\nu$. Ατύπως μιλώντας, η ιδέα της απόδειξης είναι να "αντικαταστήσουμε", σταδιακά κάθε $\gamma_{ij}$ με την οριζόντια πάνω πλευρά του τετραγώνου $T_{i(j+1)}$ (παραμένοντας στο ίδιο σύμπλοκο της $N$), χρησιμοποιώντας την ομοτοπία, καταλήγοντας έτσι στην πάνω πλευρά του $I \times I$ που είναι το σταθερό μονοπάτι στο $x_0$. Αυτό όμως προϋποθέτει να αντιστοιχίσουμε μια θηλειά σε κάθε $\gamma_{ij}$ για να έχουμε στοιχείο που να ανήκει σε μια από της ομάδες $\pi_1(U_1, x_0)$ ή $\pi_1(U_2, x_0)$.

Έστω $v_{ij} = (i/n, j/n)$ και $\beta_{ij} = H|_{\{i/n\}\times[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]}$ η εικόνα μέσω της $H$ της πλευράς $\{i/n\} \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ καταλλήλως αναπαραμετρικοποιημένη. Για κάθε ζεύγος δεικτών $i, j$ θεωρούμε μονοπάτι $h_{ij}$ από το $x_0$ στο $v_{ij}$ εντός της τομής $U_1 \cap U_2$ ή εντός του $U_1$ ή του $U_2$, αν το σημείο $v_{ij}$ ανήκει στην τομή $U_1 \cap U_2$ ή στο $U_1$ ή στο $U_2$, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που το $v_{ij}$ είναι το σημείο αναφοράς $x_0$, τότε επιλέγουμε ως $h_{ij}$ το σταθερό μονοπάτι στο $x_0$. Έτσι έχουμε τις παρακάτω θηλειές στο $x_0$

$$\widetilde{\gamma}_{ij} = h_{i-1,j} \cdot \gamma_{ij} \cdot h_{ij}^{-1} \quad \text{και} \quad \widetilde{\beta}_{ij} = h_{i,j-1} \cdot \beta_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}$$

καθεμία από τις οποίες περιέχεται είτε στο $U_1$ ή στο $U_2$. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $g$ παραγοντοποιείται σε γινόμενο «μικροτέρων θηλειών» στο $x_0$ που η καθεμία περιέχεται σε ένα από $U_1$, $U_2$, ως εξής:

$$g = [\gamma_1]_{U_{\varepsilon_1}} * [\gamma_2]_{U_{\varepsilon_2}} * \cdots * [\gamma_\nu]_{U_{\varepsilon_\nu}} = [\widetilde{\gamma}_{10}]_{U_{\varepsilon_1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{k0}]_{U_{\varepsilon_1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{m0}]_{U_{\varepsilon_\nu}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n0}]_{U_{\varepsilon_\nu}}.$$

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η σχέση

$$gN = [\widetilde{\gamma}_{1,j-1}]_{U_{1,j-1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n,j-1}]_{U_{n,j-1}} N \tag{8.1}$$

συνεπάγεται ότι

$$gN = [\widetilde{\gamma}_{1,j}]_{U_{1,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n,j}]_{U_{n,j}} N,$$

όπου καθένα από τα $U_{i,j-1}$ και $U_{i,j}$ ισούται με $U_1$ ή $U_2$. Σημειώνουμε πρώτα, πως αν η $\gamma$ είναι μια θηλειά στο $x_0$ που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, τότε τα στοιχεία $[\gamma]_{U_1}$ και $[\gamma]_{U_2}$ ορίζουν το ίδιο αριστερό σύμπλοκο της $N$ (δηλ. $[\gamma]_{U_1}N = [\gamma]_{U_2}N$), αφού η «διαφορά» τους $[\gamma]_{U_1} \cdot [\gamma]_{U_2}^{-1}$ ανήκει στην υποομάδα $N$. Σε συνδυασμό με την κανονικότητα της $N$, αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που στο γινόμενο στην 8.1 εμφανίζεται παράγοντας $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_1}$ με θηλειά $\widetilde{\gamma}_{i,j-1}$ που περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$, τότε αυτός μπορεί να αντικατασταθεί από τον $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_2}$ χωρίς να αλλάξει η ισότητα μεταξύ των δύο αριστερών συμπλόκων.

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της ομοτοπίας $H$ στο τετραγωνάκι $T_{ij}$ δίνει μια ομοτοπία (η οποία λαμβάνει χώρα εντός του $U_1$ ή του $U_2$) μεταξύ των μονοπατιών $\gamma_{i,j-1}$ και $\beta_{i-1,j} \cdot \gamma_{ij} \cdot \beta_{ij}^{-1}$ και άρα μια ομοτοπία μεταξύ των αντιστοίχων θηλειών $\widetilde{\gamma}_{i,j-1}$ και $\widetilde{\beta}_{i-1,j} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij} \cdot \widetilde{\beta}_{ij}^{-1}$. Πρέπει να σημειωθεί πως αν $H(T_{ij}) \subseteq U_2$ και $U_{i,j-1} = U_1$, τότε η θηλειά $\gamma_{i,j-1}$ περιέχεται στην τομή $U_1 \cap U_2$ και όπως είδαμε πριν ο παράγοντας $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_1}$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον $[\widetilde{\gamma}_{i,j-1}]_{U_2}$. Δηλαδή, δεν υπάρχει ασυμβιβαστότητα μεταξύ του ανοικτού εντός του οποίου πραγματοποιείται ο περιορισμός της ομοτοπίας και των ανοικτών που περιέχονται οι θηλειές κάθε φορά. Συνεπώς, από τη σχέση 8.1 και κάνοντας τις αντικαταστάσεις των ανοικτών $U_{i,j-1}$ όπου απαιτείται, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} gN &= [\widetilde{\beta}_{0,j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\beta}_{1j}^{-1}]_{U_{1,j}} * \cdots * [\widetilde{\beta}_{n-1,j}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\beta}_{nj}^{-1}]_{U_{1,j}} N \\ &= [\widetilde{\beta}_{0,j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} * [\widetilde{\beta}_{nj}]_{U_{n,j}}^{-1} N \\ &= [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} N, \end{aligned}$$

αφού $\widetilde{\beta}_{0,j} = \widetilde{\beta}_{nj} = C_{x_0}$, καθώς η ομοτοπία $H$ διατηρεί τα άκρα των μονοπατιών που «συνδέει» (εδώ είναι θηλειές στο $x_0$).

Τελικά, εφαρμόζοντας διαδοχικά τη συνεπαγωγή που μόλις αποδείξαμε, έχουμε

$$\begin{aligned} gN &= [\widetilde{\gamma}_{10}]_{U_{1,0}} * [\widetilde{\gamma}_{20}]_{U_{2,0}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n0}]_{U_{n,0}} N \\ &= [\widetilde{\gamma}_{11}]_{U_{1,1}} * [\widetilde{\gamma}_{21}]_{U_{2,1}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{n1}]_{U_{n,1}} N \\ &\ \vdots \\ &= [\widetilde{\gamma}_{1j}]_{U_{1,j}} * [\widetilde{\gamma}_{2j}]_{U_{2,j}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nj}]_{U_{n,j}} N \\ &\ \vdots \\ &= [\widetilde{\gamma}_{1n}]_{U_{1,n}} * [\widetilde{\gamma}_{2n}]_{U_{2,n}} * \cdots * [\widetilde{\gamma}_{nn}]_{U_{n,n}} N \\ &= [C_{x_0}] * \cdots * [C_{x_0}]\, N \\ &= [C_{x_0}]\, N = N. \end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν ότι το τυχαίο στοιχείο $g$ του πυρήνα $\ker\Phi$ ανήκει στην υποομάδα $N$ και ως εκ τούτου $\ker\Phi \subseteq N$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Παρατήρηση 8.1.2.** Η υπόθεση ότι η τομή $U_1 \cap U_2$ είναι κατά τόξα συνεκτική δεν μπορεί να παραλειφθεί, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, αν θεωρήσουμε τον κύκλο $S^1$ και τα ανοικτά $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$.

Με τον ίδιο τρόπο και φυσικά τις ανάλογες τροποποιήσεις προκύπτει η ακόλουθη πιο γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen (βλ. [3]).

**Θεώρημα 8.1.3.** *Υποθέτουμε ότι ο $X$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος καλύπτεται από μια οικογένεια $\{A_\alpha\}_\alpha$ ανοικτών και κατά τόξα συνεκτικών υποσυνόλων του, έτσι ώστε $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$. Έστω $x_0 \in \cap_\alpha A_\alpha$ και $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ο ομομορφισμός που επεκτείνει στο ελεύθερο γινόμενο τους ομομορφισμούς $j_{\alpha *} : \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ που επάγονται από τις ενθέσεις $j_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow X$.*

*I. Αν για κάθε ζεύγος δεικτών $\alpha, \beta$ η τομή $A_\alpha \cap A_\beta$ είναι κατά τόξα συνεκτική, τότε ο ομομορφισμός $\Phi$ είναι επί.*

*II. Αν επιπροσθέτως, κάθε τομή $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ είναι κατά τόξα συνεκτική, τότε $\ker\Phi = N$, όπου $N$ είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής*

$i_{\alpha\beta*}(g)i_{\beta\alpha*}(g)^{-1}$ *για* $g \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)$ *και* $i_{\alpha\beta*}$, $i_{\beta\alpha*}$ *είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί των ενθέσεων* $i_{\alpha\beta} : A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, $i_{\beta\alpha} : A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\beta$, *αντίστοιχα. Ως εκ τούτου*

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0)/N.$$

**Πόρισμα 8.1.4.** *Έστω* $X = U \cup V$, *όπου* $U, V$ *ανοικτά, κατά τόξα συνεκτικά υποσύνολα του χώρου* $X$ *με μη-κενή και κατά τόξα συνεκτική τομή και έστω* $x_0 \in U \cap V$. *Αν οι ενθέσεις της τομής* $U \cap V$ *στα* $U$ *και* $V$ *επάγουν μονομορφισμούς στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες, τότε*

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

*Ιδιαιτέρως, αν η τομή* $U \cap V$ *είναι απλά συνεκτική, τότε*

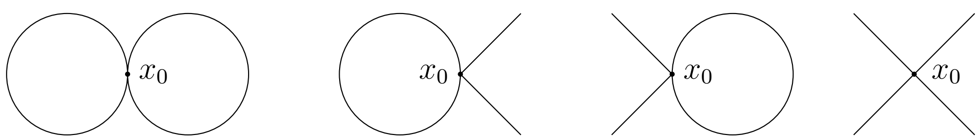
$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

Ορμώμενος κανείς από το συμπέρασμα του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen, θα μπορούσε να ορίσει την έννοια ενός «γενικευμένου» αμαλγάματος, αλλά σε αυτήν την περίπτωση δεν θα μπορούσε να εξασφαλίσει ότι οι παράγοντες εμφυτεύονται στο «γενικευμένο» αμάλγαμα, κάτι που είναι πολύ σημαντικό, όπως ήδη έχουμε επισημάνει. Με άλλα λόγια, δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα όπως τις ξέρουμε για να μελετήσει τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου. Όμως, αντί αυτού, θα χρησιμοποιούσε απευθείας τον ισομορφισμό

$$\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\big)/N$$

του θεωρήματος 8.1.1.

**Παράδειγμα 8.1.5.** (Σφήνα δύο κύκλων) Υπενθυμίζουμε ότι η σφήνα μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων $X_i$, $i \in I$, με σημεία αναφοράς $x_i \in X_i$, είναι ο χώρος πηλίκο $\vee_i X_i$ που προκύπτει από την ξένη ένωση $\sqcup_i X_i$ ταυτοποιώντας όλα τα σημεία $x_i$ μεταξύ τους σε ένα μόνο σημείο, δηλαδή, ο χώρος πηλίκο $\sqcup_i X_i/\sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $x_i \sim x_j$ για κάθε $i, j \in I$. Η (κοινή) εικόνα των $x_i$ στον χώρο πηλίκο είναι η βάση της σφήνας.




$S^1 \vee S^1$ $\qquad$ $U \cong$ $\qquad$ $V \cong$ $\qquad$ $U \cap V \cong$

Θεωρούμε τη σφήνα $S^1 \vee S^1$ δύο αντιτύπων του μοναδιαίου κύκλου με σημείο αναφοράς τη βάση $x_0$ της σφήνας. Έστω $U$ και $V$ τα ανοικτά που προκύπτουν, αν από κάθε αντίτυπο (την εικόνα του μέσα στη σφήνα για την ακρίβεια) αφαιρέσουμε ένα σημείο διαφορετικό από το $x_0$. Δηλαδή,

$$U = S^1 \vee (S^1 \setminus \{x_1\}) \text{ και } V = (S^1 \setminus \{x_2\} \vee S^1),$$

όπου $x_1 \neq x_0 \neq x_2$. Καθένα από τα $U$ και $V$ περιστέλλεται σε κύκλο και έτσι $U \simeq V \simeq S^1$, ενώ η τομή τους $U \cap V$ περιστέλλεται στο $x_0$ και άρα είναι συμπτύξιμη (ιδιαιτέρως απλά συνεκτική). Εφόσον τα ανοικτά $U$ και $V$ καλύπτουν τον χώρο και ικανοποιούνται, οι υποθέσεις του προηγούμενου πορίσματος, έχουμε

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} *_1 \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2.$$

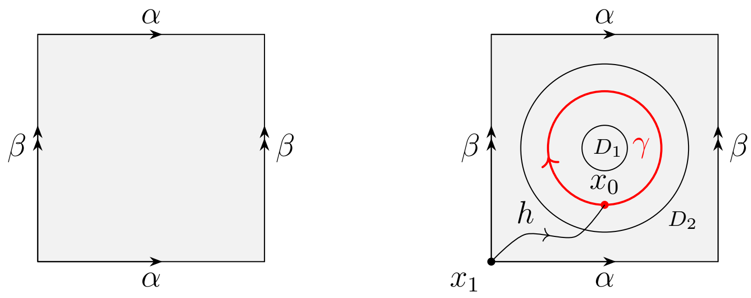
**Παράδειγμα 8.1.6.** Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται ως εξής: Έστω $X = \vee_{i \in I} S^1_i$ η σφήνα μιας οικογένειας αντιτύπων του κύκλου $S^1$ με σημείο αναφοράς τη βάση $x_0$ της σφήνας. Δηλαδή, κάθε χώρος $S^1_i$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο $S^1$. Από κάθε αντίτυπο $S^1_i$ αφαιρούμε ένα σημείο $x_i$ διαφορετικό από τη βάση της σφήνας, θεωρούμε το συμπλήρωμά τους $N = X \setminus \{x_i, i \in I\}$ και ορίζουμε τα ανοικτά $U_i = S^1_i \cup N$, $i \in I$. Καθένα από τα ανοικτά $U_i$ περιστέλλεται σε κύκλο, ενώ η τομή τους (που είναι το $N$) είναι συμπτύξιμη και έτσι απλά συνεκτική. Από τη γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen προκύπτει ότι

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{i \in I} \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή, η θεμελιώδης ομάδα μιας σφήνας αντιτύπων του κύκλου είναι το ελεύθερο γινόμενο αντιτύπων της άπειρης κυκλικής, ένα αντίτυπο της άπειρης κυκλικής για κάθε αντίτυπο του κύκλου, με άλλα λόγια είναι η ελεύθερη τάξης $|I|$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το θεώρημα των Seifert-Van Kampen για να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα της σπείρας. Αναλύουμε λεπτομερώς τη διαδικασία στο παράδειγμα αυτό, προκειμένου να προϊδεάσουμε τον αναγνώστη για τα επόμενα, γιατί στη γενική περίπτωση επισύναψης ενός κελιού διάστασης 2, ο υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας του χώρου που προκύπτει γίνεται επί της ουσίας με τον ίδιο τρόπο.

**Παράδειγμα 8.1.7.** (Η θεμελιώδης ομάδα της σπείρας (torus)). Θεωρούμε ως συνήθως την «πολυγωνική» αναπαράσταση της σπείρας $T = S^1 \times S^1$ και δύο κλειστούς δίσκους



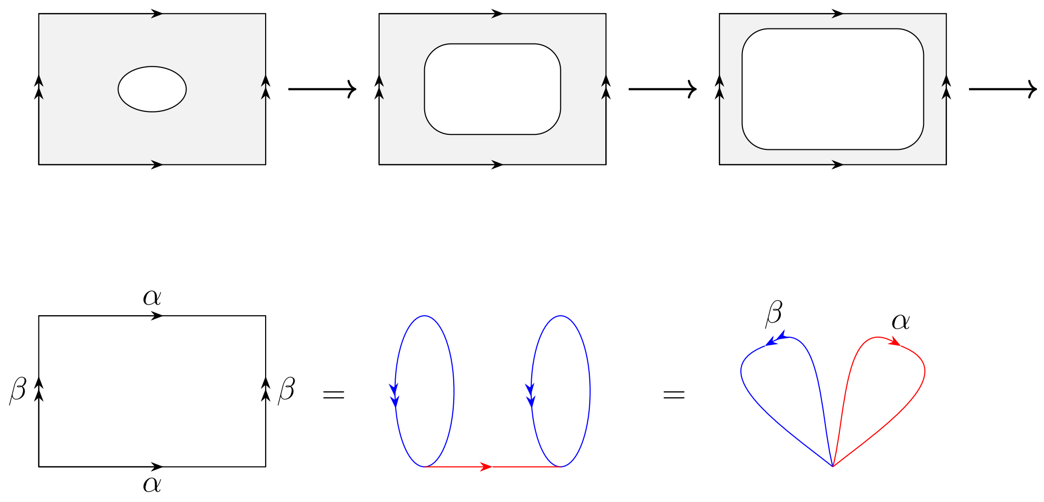

**Σχήμα 8.1:** *Η σπείρα (torus).*

$D_1$, $D_2$ με τον έναν να περιέχεται στον άλλο όπως στο σχήμα 8.1. Έστω $U$ το εσωτερικό του $D_2$ και $V = T \setminus D_1$ το συμπλήρωμα του κλειστού δίσκου $D_1$. Τα $U$ και $V$ είναι ανοικτά, καλύπτουν τον χώρο $T$ και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen.

Εφόσον η τομή $U \cap V$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με κύκλο (αφού περιστέλλεται σε κύκλο), η θεμελιώδης ομάδα της είναι άπειρη κυκλική. Επιλέγουμε θηλειά $\gamma$ εντός της τομής και σημείο αναφοράς $x_0$ επί της εικόνας αυτής, έτσι ώστε η κλάση ομοτοπίας της $\gamma$ να παράγει τη θεμελιώδη ομάδα της τομής, δηλαδή, $\pi_1(U \cap V, x_0) = \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle$. Συμβολίζουμε με $x_1$ την εικόνα (μέσω της απεικόνισης πηλίκο) της κορυφής του τετραγώνου που βρίσκεται κάτω, αριστερά και επιλέγουμε μονοπάτι $h$ εντός του $V$ από το $x_1$ στο $x_0$. Εφόσον το $U$ είναι απλά συνεκτικό (συμπτύξιμο μάλιστα), από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen έπεται ότι η ένθεση $V \hookrightarrow T$ επάγει επιμορφισμό $\Phi_0 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$ του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα της $\pi_1(V, x_0)$ που παράγεται από την κλάση ομοτοπίας $[\gamma]$ (εντός του χώρου $T$) της θηλειάς $\gamma$. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς, διαπιστώνουμε ότι ο $\Phi_0$ επάγει επιμορφισμό $\Phi_1 : \pi_1(V, x_1) \to \pi_1(T, x_1)$, του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα της $\pi_1(V, x_1)$ που παράγεται από το στοιχείο $[h\gamma h^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(V, x_1) \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\Phi_h"'] & \pi_1(T, x_1) \\
\pi_1(V, x_0) \arrow[r, "\Phi_0"] & \pi_1(T, x_0) \arrow[u, "\Phi_{h^{-1}}"']
\end{tikzcd}$$

Από την περιστολή του $V$ στην εικόνα (μέσω της απεικόνισης πηλίκο) του συνόρου του τετραγώνου (που είναι σφήνα δύο κύκλων), όπως αυτή περιγράφεται στο σχήμα 8.2, έπεται ότι $[\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}] = [h\gamma h^{-1}]$. Η ίδια περιστολή δείχνει ότι $\pi_1(V, x_1) = \langle [\alpha] \rangle * \langle [\beta] \rangle \cong F_2$. Συνεπώς, μέσω του επιμορφισμού $\Phi_1$ λαμβάνουμε την ακόλουθη παράσταση για τη




**Σχήμα 8.2:** *Η περιστολή του $V$ στη σφήνα των δύο κύκλων.*

θεμελιώδη ομάδα της σπείρας στο $x_1$:

$$\pi_1(T, x_1) = \langle [\alpha], [\beta] \,:\, [\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}] = 1 \rangle = \langle [\alpha], [\beta] \,:\, [\beta][\alpha] = [\alpha][\beta] \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Τελικά, η θεμελιώδης ομάδα της σπείρας είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης δύο.

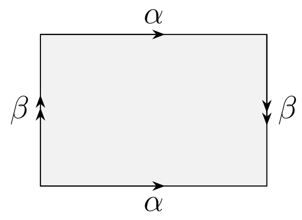
**Παράδειγμα 8.1.8.** (Η θεμελιώδης ομάδα της μποτίλιας του Klein). Ακολουθώντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος με το αντίστοιχο ανοικτό κάλυμμα και συμβολισμό γενικότερα, προκύπτει ότι οι θηλειές $h\gamma h^{-1}$ και $\beta\alpha\beta\alpha^{-1}$ είναι ομοτοπικές και καταλήγουμε στην ακόλουθη παράσταση για την μποτίλια του Klein $K$:

$$\pi_1(K, x_1) = \langle x, y \,:\, xyxy^{-1} = 1 \rangle,$$

όπου $x$ και $y$ είναι οι κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών $\alpha$ και $\beta$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η αβελιανοποίηση της ομάδας $\pi_1(K, x_1)$ έχει παράσταση

$$\pi_1(K, x_1)_{ab} = \langle x, y \,:\, xyxy^{-1} = 1, xy = yx \rangle = \langle x, y \,:\, x^2 = 1, xy = yx \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2.$$

Συμπεραίνουμε πρώτον ότι η ομάδα $\pi_1(K, x_1)$ είναι μη τετριμμένη και δεύτερον ότι η μποτίλια του Klein δεν είναι ομοιομορφική με τη σπείρα (οι θεμελιώδεις ομάδες τους έχουν μη ισόφορφες αβελιανοποιήσεις).




**Σχήμα 8.3:** *Η μποτίλια του Klein.*

## 8.2 Θεμελιώδης Ομάδα και Επισύναψη Κελιών

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε την επίπτωση που έχει στη θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου η επισύναψη κελιών και να δείξουμε πώς υπολογίζεται μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας ενός πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών. Πρώτα, όμως, αποδεικνύουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα κάθε γραφήματος είναι ελεύθερη.

Ένα **γράφημα**, με την τοπολογική έννοια, είναι ένα σύμπλεγμα κελιών $X$ διάστασης μικρότερης ή ίσης του $1$. Οι **κορυφές** του γραφήματος είναι τα $0$-κελιά του $X$. Για κάθε $1$-κελί $e^1_\alpha$ του $X$ ορίζεται, μέσω της αντίστοιχης χαρακτηριστικής απεικονίσεως $\tilde{\varphi}_\alpha : D^1_\alpha \to X$, ένα ζεύγος μονοπατιών $f$ και $f^{-1}$, με άκρα τις κορυφές $\tilde{\varphi}_\alpha(-1)$ και $\tilde{\varphi}_\alpha(1)$, τα οποία στη συνέχεια θα αναφέρονται ως **ακμές**. Η εικόνα κάθε ακμής είναι η κλειστότητα του αντίστοιχου κελιού στον χώρο $X$. Ένα **υπογράφημα** του $X$ είναι ένα υποσύμπλεγμα, δηλαδή, ένας υπόχωρος $Y$ του $X$ ο οποίος είναι ένωση κορυφών και (εικόνων) ακμών, ο οποίος για κάθε ακμή που περιέχει, περιέχει και τα άκρα της. Ένα **δέντρο** είναι ένα απλά συνεκτικό γράφημα. Ένα **μονοπάτι ακμών** είναι μια ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ διαδοχικών ακμών. Το πλήθος $n$ των ακμών είναι το μήκος του μονοπατιού. Ένα μονοπάτι ακμών μήκους μηδέν είναι μια κορυφή.

**Πρόταση 8.2.1.** *Κάθε δέντρο $T$ είναι συμπτύξιμος χώρος.*

*Απόδειξη.* Κατασκευάζουμε ακολουθία υποδέντρων $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_n \subseteq T_{n+1} \subseteq \cdots$, έτσι ώστε $T = \cup_n T_n$ ως εξής: το $T_1$ είναι μια κορυφή του δέντρου και το $T_n$ λαμβάνεται από το $T_{n-1}$ επισυνάπτοντάς του κάθε ακμή $y$ του $T$ που έχει τουλάχιστον ένα άκρο στο $T_{n-1}$. Εφόσον το $T$ είναι δέντρο, κάθε τέτοια ακμή δεν είναι θηλειά και έχει ακριβώς ένα άκρο στο $T_{n-1}$. Συμπτύσσοντας (στον ίδιο χρόνο) κάθε τέτοια ακμή $y$ στο άκρο της που ανήκει στο $T_{n-1}$, προκύπτει περιστολή $r_n : T_n \to T_{n-1}$. Για κάθε $n > 1$, συμβολίζουμε με $H_n : T_n \times I \to T_n$ την αντίστοιχη ομοτοπία. Φυσικά, αν το δέντρο $T$ είναι πεπερασμένο (γενικότερα φραγμένης «διαμέτρου»), η ανωτέρω αύξουσα ακολουθία των υποδέντρων είναι τελικά σταθερή και η ομοτοπία $H_n$, όταν $T_n = T_{n-1}$, επιλέγεται να είναι η ταυτοτική απεικόνιση σε κάθε χρονική στιγμή. Με κατάλληλη, κάθε φορά, αναπαραμέτρηση του $[0,1]$, προκύπτουν ομοτοπίες $F_n : T_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \to T_n$, έτσι ώστε $F_n(x,t) = x$, αν $x \in T_{n-1}$ ή $t = 1/n$ και $F_n(x, \frac{1}{n-1}) = r_n(x)$. Ορίζουμε ομοτοπία $G_n : T_n \times I \to T_n$ μέσω της οποίας το δέντρο $T_n$ περιστέλλεται στο $T_1$ ως ακολούθως: Η ομοτοπία $G_n(x,t)$ δίνεται από τον τύπο $x$ στο $T_n \times [0, \frac{1}{n}]$, από τον τύπο της $F_n$ στο $T_n \times [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$, από τον τύπο $F_{n-1} \circ (r_n \times \mathrm{Id})$ στο $T_n \times [\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}]$, από τον τύπο $F_{n-2} \circ (r_{n-1} \times \mathrm{Id}) \circ (r_n \times \mathrm{Id})$ στο $T_n \times [\frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}]$ και ούτω καθεξής. Παρατηρούμε ότι η $G_n$ ταυτίζεται με την $G_{n-1}$ στο $T_{n-1} \times I$. Έτσι ορίζεται ομοτοπία $G : T \times I \to T$ με $G = G_n$ στο $T_n \times I$, της οποίας η συνέχεια έπεται από το γεγονός ότι ο χώρος $T$ είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία. Τελικά, μέσω της ομοτοπίας $G$, το δέντρο $T$ περιστέλλεται στο $T_1$ που είναι κορυφή. □

**Λήμμα 8.2.2.** *Κάθε συνεκτικό γράφημα $X$ περιέχει μεγιστικό δέντρο (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι).*

*Απόδειξη.* Το σύνολο των υποδέντρων του $X$ είναι μη κενό (το $X$ θεωρείται μη κενό) και μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι. Αν έχουμε ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $T_i, i \in I$, υποδέντρων του $X$ (δηλαδή, για κάθε ζεύγος δεικτών $i, j$ είτε $T_i \subseteq T_j$ ή $T_j \subseteq T_i$), τότε η ένωσή τους $\cup_i T_i$ είναι υποδέντρο του $X$. Πράγματι, είναι άμεσο ότι η ένωση είναι κατά τόξα συνεκτική, ενώ λόγω συμπάγειας, κάθε θηλειά στην ένωση θα περιέχεται στις κλειστότητες πεπερασμένων το πλήθος 1-κελιών. Συνεπώς, κάθε θηλειά θα περιέχεται σε κάποιο $T_i$ και ως εκ τούτου θα είναι ομοτοπική με σημείο. Το λήμμα του Zorn ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Έστω $X$ ένα συνεκτικό γράφημα, $T$ ένα μεγιστικό δέντρο του $X$ και $v_0$ μια κορυφή του $X$ (λόγω μεγιστικότητας το $T$ περιέχει κάθε κορυφή του $X$). Για κάθε κορυφή $v$ του $X$ θεωρούμε μονοπάτι ακμών ελαχίστου μήκους $p_v$ εντός του $T$, από την κορυφή $v_0$ στην $v$ (το οποίο είναι μοναδικό, εφόσον το $T$ είναι δέντρο). Για κάθε 1-κελί που δεν ανήκει στο $T$ επιλέγουμε μια ακμή $e_a$ του $X$ από το αντίστοιχο ζεύγος ακμών και ορίζουμε θηλειά $f_a$ μέσω του γινομένου $p_{v_a} \cdot e_a \cdot p_{u_a}^{-1}$, όπου $v_a$ και $u_a$ είναι τα άκρα της ακμής $e_a$ (όχι απαραιτήτως διαφορετικά). Σημειώνουμε ότι η κλάση ομοτοπίας $[f_a]$ δεν εξαρτάται από τα μονοπάτια που θα επιλέξουμε, εντός του $T$, για να «ενώσουμε» τα άκρα της $e_a$ με την κορυφή $v_0$, αφού το $T$ είναι απλά συνεκτικό (ως συμπτύξιμο).

**Θεώρημα 8.2.3.** *Αν το $X$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα με μεγιστικό δέντρο $T$ και $v_0$ κορυφή του $X$, τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, v_0)$ είναι ελεύθερη με έναν γεννήτορα για κάθε 1-κελί εκτός του μεγιστικού δέντρου $T$. Πιο συγκεκριμένα, η $\pi_1(X, v_0)$ είναι ελεύθερη επί των κλάσεων $[f_a]$ που κατασκευάσαμε πριν και που αντιστοιχούν στις ακμές $e_a$ εκτός του μεγιστικού δέντρου.*

*Απόδειξη.* Για κάθε ακμή $e_a$ (που έχουμε επιλέξει και) που αντιστοιχεί σε 1-κελί εκτός του $T$, όπως πριν, θεωρούμε το ανοικτό $U_a$ που προκύπτει από το γράφημα, αφαιρώντας ένα εσωτερικό σημείο από κάθε άλλη ακμή εκτός του $T$ που είναι διαφορετική από την $e_a$. Αν $v_a$ και $u_a$ είναι τα άκρα της $e_a$, τότε συμβολίζουμε με $p_a$ το μονοπάτι ακμών (εντός του $T$) ελαχιστικού μήκους στην κλάση ομοτοπίας του $p_{v_a}^{-1} \cdot p_{u_a}$ και με $K_a$ την ένωση $p_a \cup e_a$, η οποία είναι ομοιομορφική με κύκλο. Παρατηρούμε ότι η κλειστότητα κάθε συνιστώσας του $\big(T \cup e_a\big) \setminus K_a$ είναι δέντρο που τέμνει τον κύκλο $K_a$ σε ένα μόνο σημείο (κορυφή) και συνεπώς κάθε τέτοια συνιστώσα περιστέλλεται σε αυτήν την κορυφή. Έπεται ότι η ένωση $T \cup e_a$ (άρα και η εικόνα $\mathrm{Im}\, f_a$) περιστέλλεται στον κύκλο $K_a$ και ιδιαιτέρως $\pi_1(T \cup e_a) = \pi_1(\mathrm{Im}\, f_a) = \langle [f_a] \rangle \cong \mathbb{Z}$. Εφόσον κάθε ανοικτό $U_a$ περιστέλλεται στην ένωση $T \cup e_a$, έχουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του $U_a$ είναι άπειρη κυκλική με γεννήτορα $[f_a]$. Από την άλλη, τα ανοικτά $U_a$ καλύπτουν το γράφημα, ενώ η τομή περισσοτέρων από δύο διαφορετικών τέτοιων ανοικτών είναι συμπτύξιμη, αφού περιστέλλεται στο $T$. Τελικά, από τη γενική εκδοχή του θεωρήματος των Seifert-Van Kampen προκύπτει ότι $\pi_1(X, v_0) \cong *_a \pi_1(U_a, v_0) = *_a \langle [f_a] \rangle$. □

**Λήμμα 8.2.4.** *Έστω $A$ ένας τοπολογικός χώρος και $X = A \cup_\varphi D^n$, όπου $\varphi : S^{n-1} \to A$ συνεχής. Αν το $x_0$ είναι ένα σημείο του συμπληρώματος $X \setminus A$, τότε ο υπόχωρος $X \setminus \{x_0\}$ περιστέλλεται στον $A$.*

Εδώ έχουμε ταυτίσει τον $A$ με την εικόνα του $\pi(A)$ μέσω της απεικόνισης πηλίκο $\pi : A \sqcup_\varphi D^n \to A \cup_\varphi D^n$.

*Απόδειξη.* Αν $\psi : D^n \to X$ είναι η αντίστοιχη χαρακτηριστική απεικόνιση, τότε $\psi|_{\partial D^n} = \varphi$ και $\psi|_{\mathring{D}^n}$ ομοιομορφισμός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = \psi(\mathbf{0})$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το κέντρο του δίσκου (γιατί;). Ορίζουμε ομοτοπία $H : X \times I \to X$ με

$$H(x,t) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \psi\Big((1-t)y + t\dfrac{y}{\|y\|}\Big), & x \in \psi(D^n) \setminus \{x_0\},\ y \in \psi^{-1}(\{x\}). \end{cases}$$

Η απεικόνιση $H$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή του $y$ στην αντίστροφη εικόνα του $x_0$ (όταν αυτή περιέχει περισσότερα από ένα σημεία). Πράγματι, αν $y_1 \neq y_2$ και $\psi(y_1) = \psi(y_2)$, τότε, αφού η $\psi$ είναι ομοιομορφισμός στο εσωτερικό του δίσκου, έχουμε ότι $y_1, y_2 \in \partial D^n = S^{n-1}$, άρα $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$ και

$$\psi\Big((1-t)y_1 + t\frac{y_1}{\|y_1\|}\Big) = \psi\Big((1-t)y_2 + t\frac{y_2}{\|y_2\|}\Big) = \psi(y_2) = x.$$

Έπεται επίσης ότι και οι δύο «τύποι» μέσω των οποίων ορίζεται η $H$ δίνουν την ταυτοτική σε κάθε $x \in \psi(S^{n-1})$ (δηλαδή στα κοινά σημεία συμφωνούν). Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $H(a,t) = a$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$, ενώ $H(x,0) = x$ για κάθε $x \in X$. Τέλος, για $x \in \psi(D^n) \setminus \{x_0\}$ και $y \in \psi^{-1}(\{x\})$, έχουμε ότι

$$H(x,1) = \psi\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) = \varphi\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) \in A.$$

Άρα $H(x,1) \in A$ για κάθε $x \in X$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα υποσύνολο $R$ μιας ομάδας $G$, συμβολίζουμε με $\langle\langle R\rangle\rangle$ την κανονική υποομάδα της $G$ που παράγεται από το $R$.

**Θεώρημα 8.2.5.** *Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος στον οποίο επισυνάπτουμε ένα $n$-κελί $D^n$, όπου $n \geq 2$, μέσω μιας (συνεχούς) απεικονίσεως $\varphi : S^{n-1} \to X$ και έστω $Y = X \cup_\varphi D^n$ ο χώρος που προκύπτει. Έστω $x_1$ ένα σημείο στην εικόνα της $\varphi$ και $\Phi : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$ ο ομομορφισμός που επάγεται από την ένθεση του $X$ στον $Y$.*

1. *Αν $n \geq 3$, τότε η απεικόνιση $\Phi$ είναι ισομορφισμός. Δηλαδή, η επισύναψη κελιών διάστασης μεγαλύτερης του 2 σε έναν χώρο δεν αλλάζει τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου.*

2. *Αν $n = 2$, τότε η $\Phi$ είναι επιμορφισμός του οποίου ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από το στοιχείο $[\varphi]$.*

Συμπερασματικά,

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^n, x_1) = \begin{cases} \pi_1(X, x_1), & n \geq 3 \\ \pi_1(X, x_1)/\langle\langle[\varphi]\rangle\rangle, & n = 2. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Σημειώνουμε ξανά, ότι η απεικόνιση πηλίκο $\pi : X \sqcup_\varphi D^n \to X \cup_\varphi D^n = Y$ εμφυτεύει το εσωτερικό του δίσκου και τον $X$ ομοιομορφικά στον $Y$. Έτσι μπορούμε να

θεωρούμε το εσωτερικό του δίσκου και τον $X$ ως υπόχωρους του $Y$ ταυτίζοντάς τους με τις εικόνες τους μέσω της $\pi$.
Θεωρούμε τα ανοικτά και κατά τόξα συνεκτικά

$$U = \{x \in \mathrm{Int}D^n \,:\, \|x\| < 2/3\} \quad \text{και} \quad V = Y \setminus \{x \in \mathrm{Int}D^n \,:\, \|x\| \leq 1/3\}.$$

Το $U$ είναι ομοιομορφικό με ανοικτή μπάλα, άρα συμπτύξιμο, ενώ η τομή $U \cap V$ είναι ομοιομορφική με τον χώρο $S^{n-1} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ο οποίος είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τη σφαίρα $S^{n-1}$. Η ομοτοπία που ορίσθηκε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος δείχνει ότι το $V$ περιστέλλεται στον $X$ και έτσι είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με τον $X$.

Αν $n \geq 3$, τότε, εκτός από το $U$, είναι και το $U \cap V$ απλά συνεκτικό και συνεπώς $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}$ για κάθε $x_0 \in U \cap V$. Από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen έπεται ότι η ένθεση του $V$ στον $Y$ επάγει ισομορφισμό $\pi_1(V, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$. Επιλέγοντας μονοπάτι $h$ (εντός του $V$) από το $x_1$ στο $x_0$ και χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς, διαπιστώνουμε ότι η ένθεση του $V$ στον $Y$ επάγει ισομορφισμό $\pi_1(V, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$. Εφόσον ο $V$ περιστέλλεται στον $X$, η ένθεση του $X$ στον $V$ επάγει ισομορφισμό $\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(V, x_1)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού.

Αν $n = 2$, τότε η θεμελιώδης ομάδα της τομής $U \cap V$ είναι άπειρη κυκλική. Επιλέγουμε θηλειά $\gamma$ στην τομή και $x_0$ στην εικόνα της $\gamma$, έτσι ώστε $\pi_1(U \cap V, x_0) = \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle$. Από το θεώρημα των Seifert-Van Kampen, η ένθεση του $V$ στον $X$ επάγει επιμορφισμό $\Phi_0 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$, του οποίου ο πυρήνας είναι η υποομάδα $\langle\langle [\gamma] \rangle\rangle$. Ο ισομορφισμός αλλαγής σημείου αναφοράς, που ορίζεται επιλέγοντας μονοπάτι $h$ (εντός του $V$) από το $x_1$ στο $x_0$, όπως πριν, δείχνει ότι η ένθεση του $V$ στον $X$ επάγει επιμορφισμό $\Phi_1 : \pi_1(V, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$ με πυρήνα την κανονική υποομάδα $\langle\langle [h\gamma h^{-1}] \rangle\rangle$ που παράγεται από την κλάση ομοτοπίας της θηλειάς $h\gamma h^{-1}$. Μέσω της περιστολής του $V$ στον $X$, η θηλειά $h\gamma h^{-1}$ απεικονίζεται στην $\varphi$, δηλαδή $h\gamma h^{-1} \simeq \varphi$, και ως εκ τούτου ο πυρήνας της $\Phi$ ισούται με $\langle\langle [\varphi] \rangle\rangle$. □

Επαγωγικά, προκύπτει άμεσα, από το προηγούμενο θεώρημα το ακόλουθο:

**Θεώρημα 8.2.6.** *Έστω $X$ ένα συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών, $v \in X^0$ και $\varphi_i : S^1 \to X^1$, $i = 1, \ldots, k$, οι απεικονίσεις επισύναψης των κελιών διάστασης 2. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ επιλέγουμε μονοπάτι $\gamma_i$, εντός του $X^1$, από την κορυφή $v$ στο σημείο $\varphi_i\big((1,0)\big)$. Τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, v)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο*

$$\pi_1(X^1, v)/\langle\langle [\gamma_1 \varphi_1 \gamma_1^{-1}], \ldots, [\gamma_k \varphi_k \gamma_k^{-1}] \rangle\rangle.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν αντικαταστήσουμε κάθε $\gamma_i$ με άλλο μονοπάτι $\lambda_i$ από την κορυφή $v$ στο σημείο $\varphi_i\big((1,0)\big)$, τότε τα στοιχεία $[\gamma_i\varphi_i\gamma_i^{-1}]$ και $[\lambda_i\varphi_i\lambda_i^{-1}]$ είναι συζυγή στην ομάδα $\pi_1(X^1, v)$, αφού $[\gamma_i\varphi_i\gamma_i^{-1}] = [\gamma_i\lambda_i^{-1}][\lambda_i\varphi_i\lambda_i^{-1}][\lambda_i\gamma_i^{-1}]$ και συνεπώς η παραγόμενη από αυτά κανονική υποομάδα δεν εξαρτάται από την επιλογή των $\gamma_i$. Εφόσον η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X^1, v)$ του 1-σκελετού $X^1$ είναι ελεύθερη, το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει επί της ουσίας μια παράσταση της θεμελιώδους ομάδας του συμπλέγματος $X$.

**Πόρισμα 8.2.7.** *Για κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $G$, υπάρχει συνεκτικό πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών διάστασης $\leq 2$ με θεμελιώδη ομάδα $G$.*

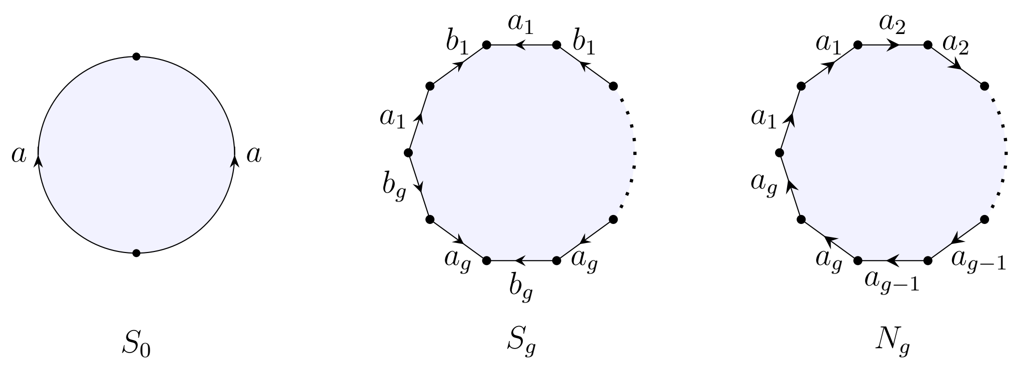
*Απόδειξη.* Έστω $\langle x_1, \ldots, x_m \,|\, r_1, \ldots, r_k\rangle$ μια πεπερασμένη παράσταση της $G$, όπου κάθε $r_i$ είναι μια λέξη στα $x_j^{\pm1}$, $j = 1, \ldots, m$. Θεωρούμε ένα μπουκέτο $X^1$ που αποτελείται από $m$ το πλήθος κύκλους $K_1, \ldots, K_m$, έναν για κάθε γεννήτορα $x_i$, με κοινή κορυφή $v$. Στο γράφημα $X^1$ επισυνάπτουμε κελιά διάστασης δύο κατά μήκος των λέξεων $r_i$. Δηλαδή, αν $r_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{k_i}}^{\varepsilon_k}$, όπου $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, τότε η απεικόνιση επισύναψης $\varphi_i$ απεικονίζει το σύνορο του αντίστοιχου δίσκου στο μονοπάτι $K_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots K_{i_{k_i}}^{\varepsilon_k}$. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα σύμπλεγμα κελιών διάστασης 2 του οποίου, από το προηγούμενο θεώρημα, η θεμελιώδης ομάδα είναι ισόμορφη με την $G$. Αν δεν υπάρχουν σχέσεις, δηλαδή κάθε λέξη $r_i$ είναι η κενή λέξη, τότε η ομάδα είναι ελεύθερη και είναι η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος $X^1$. □

**Παρατήρηση 8.2.8.** Μπορεί να αποδειχθεί, βλ. [2] άρθρα 3 και 4, ότι κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα $G$ είναι η θεμελιώδης ομάδα μιας κλειστής τετραδιάστατης πολλαπλότητας.

## 8.3 Θεμελιώδεις Ομάδες Κλειστών Επιφανειών

Στη συνέχεια, με τον όρο **επιφάνεια** θα εννοούμε μια πολλαπλότητα διάστασης 2 χωρίς σύνορο. Πιο συγκεκριμένα, μια επιφάνεια είναι ένας Hausdroff τοπολογικός χώρος με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, του οποίου κάθε σημείο έχει ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^2$. Μια κλειστή επιφάνεια είναι μια συμπαγής επιφάνεια. Ο όρος κλειστή χρησιμοποιείται συνήθως, γενικότερα, για να υποδηλώσει ότι η υπό μελέτη πολλαπλότητα δεν έχει σύνορο. Για το επόμενο θεώρημα (τοπολογικής) ταξινόμησης, που θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, καθώς και για περισσότερα σχετικά με τη θεωρία επιφανειών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [7, 9, 4]. Αξίζει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι η απόδειξη, από τον Perelman το 2003, της εικασίας της γεωμετρικοποίησης του Thurston μας δίνει έναν τρόπο για την ταξινόμηση των πολλαπλοτήτων διάστασης 3 (βλ. [1]). Δεν είναι εφικτή η ταξινόμηση πολλαπλοτήτων διάστασης $n \geq 4$, εφόσον κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα είναι η θεμελιώδης ομάδα μιας κλειστής πολλαπλότητας διάστασης 4 και το πρόβλημα του ισομορφισμού δεν είναι επιλύσιμο για πεπερασμένα παριστώμενες ομάδες [5, 6].

**Θεώρημα 8.3.1.** *Κάθε κλειστή, συνεκτική επιφάνεια $S$ επιδέχεται μια από τις ακόλουθες πολυγωνικές παραστάσεις. Δηλαδή, είναι ομοιομορφική με τον χώρο πηλίκο που προκύπτει*



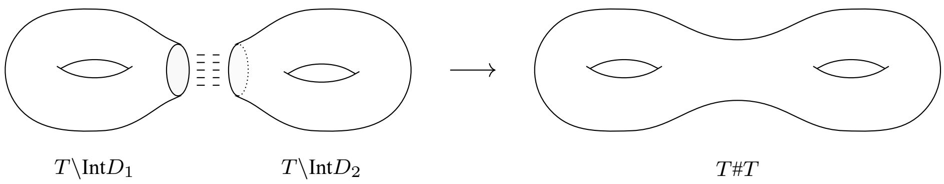

**Σχήμα 8.4:** *Οι πολυγωνικές παραστάσεις των επιφανειών.*

*ταυτοποιώντας τις πλευρές (με την ίδια ετικέτα) του αντίστοιχου πολυγώνου κατά ζεύγη σύμφωνα με τον προσανατολισμό που υποδηλώνεται από τα βέλη στις πλευρές του πολυγώνου.*

Ο πυρήνας της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος είναι ένα αποτέλεσμα του Radó από το 1925, το οποίο λέει ότι κάθε επιφάνεια μπορεί να «τριγωνοποιηθεί», δηλαδή, ατύπως μιλώντας, κάθε επιφάνεια λαμβάνεται από τρίγωνα ταυτοποιώντας πλευρές τους. Μια απόδειξη παρουσιάζεται στο [8].

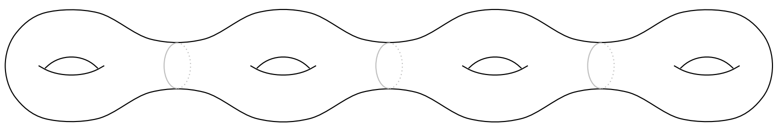
Η επιφάνεια $S_g$, $g \geq 0$ αναφέρεται ως η *προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους* $g$, ενώ η $N_g$, $g \geq 1$ ως η *μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους* $g$. Παρατηρούμε ότι η πολυγωνική παράσταση του διγώνου μας δίνει χώρο ομοιομορφικό με τη σφαίρα, δηλαδή $S_0 = S^2$, η $S_1$ είναι ομοιομορφική με τη σπείρα $T = S^1 \times S^1$, ενώ η $N_1$ με το προβολικό επίπεδο $\mathbb{RP}^2$. Μπορεί να δειχθεί ότι από τη σφαίρα, τη σπείρα και το προβολικό επίπεδο προκύπτει κάθε άλλη συνεκτική κλειστή επιφάνεια μέσω του συνεκτικού αθροίσματος. Δοθέντων δύο επιφανειών $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ το *συνεκτικό τους άθροισμα* $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ είναι η επιφάνεια που λαμβάνεται, αφαιρώντας το εσωτερικό $\mathrm{Int}D_i$ μιας «μικρής» περιοχής $D_i$, ομοιομορφικής με κλειστό δίσκο του επιπέδου, από κάθε $\Sigma_i$, $i = 1, 2$ και ταυτοποιώντας τα $\Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}D_1$ και $\Sigma_2 \setminus \mathrm{Int}D_2$ κατά μήκος των συνόρων $K_i$ των $D_i$. Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε ομοιομορφισμό $h : K_1 \to K_2$ (κάθε $K_i$ είναι ομοιομορφικό με κύκλο), τότε το συνεκτικό άθροισμα $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ είναι ο χώρος πηλίκο

$$\big(\Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}D_1\big) \sqcup \big(\Sigma_2 \setminus \mathrm{Int}D_2\big)/a \sim h(a),\ a \in K_1.$$




**Σχήμα 8.5:** *Το συνεκτικό άθροισμα δύο αντιτύπων της σπείρας $T$.*

Αποδεικνύεται ότι το συνεκτικό άθροισμα δεν εξαρτάται (ως προς ομοιομορφισμό) από την επιλογή των $D_1$, $D_2$ και $h$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η επιφάνεια $S_g$, $g \geq 1$, είναι το συνεκτικό άθροισμα $g$ το πλήθος αντιτύπων της σπείρας $T$, ενώ η $N_g$, $g \geq 1$, είναι το συνεκτικό άθροισμα $g$ το πλήθος αντιτύπων του προβολικού επιπέδου.



**Σχήμα 8.6:** *Η επιφάνεια $S_4$ είναι το συνεκτικό άθροισμα τεσσάρων σπειρών.*

**Πρόταση 8.3.2.** *Οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών $S_g$ και $N_g$, $g \geq 1$, επιδέχονται τις ακόλουθες παραστάσεις:*

1. $\pi_1(S_g) = \langle \alpha_1, \beta_1 \ldots \alpha_g \beta_g \,|\, \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1 \rangle$.
2. $\pi_1(N_g) = \langle \alpha_1, \ldots \alpha_g \,|\, \alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 = 1 \rangle$.

*Απόδειξη.* Από την πολυγωνική παράσταση της $S_g$, προκύπτει ότι η $S_g$ είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα $0$-κελί (όλες οι κορυφές του πολυγώνου ταυτοποιούνται σε μία),

$2g$ το πλήθος 1-κελιά και ένα 2-κελί το οποίο επισυνάπτεται στον 1-σκελετό (που είναι ένα μπουκέτο $2g$ το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$) κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Αν συμβολίσουμε με $\alpha_i$ και $\beta_i$ τις κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών (στη μοναδικη κορυφή) $a_i$ και $b_i$, αντίστοιχα, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.2.6 λαμβάνουμε την παραπάνω παράσταση για την $\pi_1(S_g)$.

Ομοίως, η επιφάνεια $N_g$ είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα 0-κελί, $g$ το πλήθος 1-κελιά και ένα 2-κελί το οποίο επισυνάπτεται σε ένα μπουκέτο $g$ το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, \ldots, a_g$ κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_g a_g$. Πάλι, από το Θεώρημα 8.2.6 προκύπτει η παραπάνω παράσταση για την $\pi_1(N_g)$, όπου, όπως πριν, οι γεννήτορες $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ είναι οι κλάσεις ομοτοπίας των θηλειών $a_1, \ldots, a_g$. $\square$

Με τη βοήθεια των παραπάνω παραστάσεων για τις θεμελιώδεις ομάδες επιφανειών, το προηγούμενο θεώρημα συμπληρώνεται ως εξής:

**Θεώρημα 8.3.3.** *Κάθε συνεκτική κλειστή επιφάνεια $S$ είναι ομοιομορφική με μια ακριβώς από τις $S^2$, $S_g$ και $N_g$, $g \geq 1$.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε ότι οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών $S^2$, $S_g$ και $N_g$, $g \geq 1$, δεν είναι ισόμορφες ανά δύο και ως εκ τούτου αυτές δεν είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους. Η θεμελιώδης επιφάνεια της σφαίρας $S^2$ είναι τετριμμένη, ενώ για τις άλλες έχουμε παραστάσεις από τις οποίες δεν μπορούμε απευθείας να διαπιστώσουμε αν μας δίνουν ισόμορφες ή μη ομάδες. Υπενθυμίζουμε ότι η αβελιανοποίηση μιας ομάδας $G$ είναι η ομάδα πηλίκο $G_{ab} = G/G'$, όπου $G'$ είναι η παράγωγος υποομάδα της $G$, δηλαδή η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλους τους μεταθέτες $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$. Από τις παραστάσεις της προηγούμενης πρότασης προκύπτουν εύκολα παραστάσεις των αβελιανοποιήσεων. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\pi_1(S_g)_{ab} &= \langle \alpha_1, \beta_1 \ldots \alpha_g \beta_g \,|\, \alpha_i\beta_j = \beta_j\alpha_i,\ \alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i,\ \beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i,\ i, j = 1, \ldots, g \rangle \\ &= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} = \mathbb{Z}^{2g}.\end{aligned}$$

Εφόσον η αβελιανοποίηση της $\pi_1(S_g)$ είναι ελεύθερη αβελιανή τάξεως $2g$, οι ομάδες $\pi_1(S_g)$ και $\pi_1(S_h)$ δεν έχουν ισόμορφες αβελιανοποιήσεις για $g \neq h$ και συνεπώς οι $\pi_1(S_g)$ και $\pi_1(S_h)$ δεν είναι ισόμορφες. Ιδαιτέρως, οι επιφάνειες $S_g$ και $S_h$ δεν είναι ομοιομορφικές, αν $g \neq h$. Για τις μη προσανατολίσιμες έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
\pi_1(N_g)_{ab} &= \langle \alpha_1, \dots \alpha_g \,|\, \alpha_1^2 \cdots \alpha_g^2 = 1,\ \alpha_i \alpha j = \alpha_j \alpha_i,\ i,j = 1, \dots, g \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \dots \alpha_g \,|\, (\alpha_1 \cdots \alpha_g)^2 = 1,\ \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i,\ i,j = 1, \dots, g \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \dots \alpha_{g-1}, \beta \,|\, \beta^2 = 1,\ \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i,\ \alpha_i \beta = \beta \alpha_i,\ i,j = 1, \dots, g-1 \rangle \\
&= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Από τη μορφή των αβελιανοποιήσεων, έπεται ότι οι επιφάνειες $N_g$ και $N_h$ δεν είναι ομοιομορφικές, αν $g \neq h$, καθώς επίσης ότι οι $S_g$, $N_h$ δεν είναι ομοιομορφικές. Τέλος, εφόσον οι θεμελιώδεις ομάδες των $S_g$, $N_g$, $g \geq 1$, δεν είναι τετριμμένες, καμία από αυτές δεν είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα. □

# Ασκήσεις

8.1 Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών. Αποδείξτε ότι ο $n$-σκελετός $X^n$ του $X$, όπου $n \geq 1$, είναι κατά τόξα συνεκτικός αν και μόνο αν ο $(n+1)$-σκελετός $X^{n+1}$ του $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός. Ιδιαιτέρως, το $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικό αν και μόνο αν ο 1-σκελετός $X^1$ είναι κατά τόξα συνεκτικός [Υπόδειξη: Αν $D_\varepsilon$ είναι μια κλειστή μπάλα που περιέχεται στο εσωτερικό ενός $(n+1)$-κελιού, τότε, χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια του $D_\varepsilon$, μπορούμε να παρακάμψουμε κάθε τμήμα ενός μονοπατιού $\gamma$ (με άκρα στο $X^n$) που βρίσκεται εντός του $D_\varepsilon$ μέσω ενός μονοπατιού πάνω στο σύνορο του $D_\varepsilon$ το οποίο διέρχεται από τα σημεία του συνόρου του $D_\varepsilon$ που διέρχεται και το $\gamma$. Σημειώστε ότι η τομή $\mathrm{Im}\gamma \cap e_a^{n+1}$ είναι μη κενή για πεπερασμένους το πλήθος δείκτες $a$ και χρησιμοποιήστε τη συστέλλουσα παραμόρφωση του Λήμματος 8.2.4 για να βρείτε μονοπάτι εντός του $X^n$ που έχει τα ίδια άκρα με το $\gamma$].

8.2 Έστω $X$ και $Y$ πολλαπλότητες (όχι απαραιτήτως ίδιας διάστασης), $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$. Ορίζουμε τη σφήνα τους $X \vee Y$ να είναι ο χώρος που λαμβάνεται από την ξένη ένωση των $X$ και $Y$, ταυτοποιώντας το $x_0$ με το $y_0$. Δηλαδή, $X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$. Αποδείξτε ότι $\pi_1(X \vee Y, [x_0]) = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.

8.3 Συμβολίζουμε με $B^n$ την ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, με $B_a$ τη μικρότερη ανοικτή μπάλα ακτίνας 1/2 και με $S_a$ τη σφαίρα ακτίνας 1/2, δηλαδή το σύνορο της $B_a$.

(i) Έστω $X$ μια συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 3$ και $h : B^n \to U$ ομοιομορφισμός από την $B^n$ σε ένα ανοικτό $U \subset X$. Να δειχθεί ότι $\pi_1(X - h(B_a)) = \pi_1(X)$.
(ii) Έστω $X_1$ και $X_2$ συνεκτικές πολλαπλότητες της ίδιας διαστάσεως $n \geq 3$ και $h_i : B^n \to U_i$ ομοιομορφισμός από τη $B^n$ σε ένα ανοικτό $U_i \subset X_i$, για $i = 1, 2$. Το συνεκτικό άθροισμα των $X_1$ και $X_2$ είναι ο χώρος πηλίκο

$$X_1 \# X_2 = \big(X_1 - h_1(_a)\big) \sqcup \big(X_2 - h_1(_a)\big)/h_1(x) \sim h_2(x) \text{ για κάθε } x \in S_a.$$

Αποδείξτε ότι $\pi_1(X_1 \# X_2) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

8.4 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου που προκύπτει:
(i) από τον κύλινδρο $S^1 \times \mathbb{R}$ βγάζοντας ένα σημείο [Υπόδειξη: ο κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ περιστέλλεται στον $S^1 \times [\alpha, \beta]$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha < \beta$].
(ii) από τη σπείρα $S^1 \times S^1$ βγάζοντας δύο σημεία.
(iii) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας $k$ ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
(iv) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας ένα κύκλο $K$ [Υπόδειξη: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Θεωρήστε $U = \mathbb{R}^3 \setminus D$ και $V$ το εσωτερικό του $K \times D$, όπου $D$ δίσκος με σύνορο $K$].
(v) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας δύο ευθείες γραμμές $L_1$ και $L_2$ που δεν τέμνονται.
(vi) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας έναν κύκλο $K$ και μια ευθεία γραμμή $L$, υποθέτοντας ότι ο κύκλος και η γραμμή δεν τέμνονται και επιπλέον η γραμμή δεν διέρχεται «μέσα» από τον κύκλο.

8.5 Έστω $x_1, \ldots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι απλά συνεκτικός αν $n \geq 3$.

8.6 Αποδείξτε ότι ο χώρος $X$ του Παραδείγματος 7.2.5 («σκουλαρίκι της Χαβάης») δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σύμπλεγμα κελιών [Υπόδειξη: κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός συμπλέγματος κελιών περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα].

8.7 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου $X$ που προκύπτει από δύο σπείρες $S^1 \times S^1$, ταυτοποιώντας τον κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στη μία σπείρα με τον αντίστοιχο κύκλο $S^1 \times \{x_0\}$ στην άλλη.

8.8 Έστω $X = S^1 \vee S^1$ και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση η οποία διατηρεί το σημείο αναφοράς $x_0$ (δηλαδή το κοινό σημείο των δύο κύκλων). Θεωρούμε τον χώρο (mapping torus) $T_f = X \times I/(x,0) \sim (f(x),1)$. Αποδείξτε ότι $\pi_1(T_f) = \langle a,b,t \,|\, tat^{-1}f_*(a)^{-1}, tbt^{-1}f_*(b)^{-1} \rangle$, όπου $a, b$ γεννήτορες των θεμελιωδών ομάδων των δύο κύκλων, $t$ η κλάση ομοτοπίας της εικόνας στον χώρο πηλίκο του υποσυνόλου $\{x_0\} \times I$ και $f_*$ ο επαγώμενος ομομορφισμός [Υπόδειξη: αντιμετωπίστε τον χώρο $T_f$ ως σύμπλεγμα κελιών με μια μόνο κορυφή και του οποίου ο 1-σκελετός αποτελείται (εκτός από την κορυφή) από τρεις κύκλους, έναν για κάθε γεννήτορα στην παραπάνω παράσταση, που τέμνονται στη μοναδική κορυφή. Μένει να βρείτε πόσα είναι τα 2-κελιά και πως επισυνάπτονται].

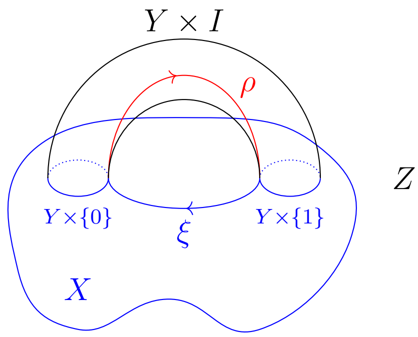
8.9 Έστω $G = \pi_1(S_g)$ η θεμελιώδης ομάδα της κλειστής προσανατολίσιμης επιφάνειας $S_g$ γένους $g \geq 1$.
(i) Να δειχθεί ότι $d(G) = 2g$ ( με $d(G)$ συμβολίζουμε το ελάχιστο πλήθος γεννητόρων της $G$). Δηλαδή, η $G$ δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από $2g$ στοιχεία.
(ii) Να δειχθεί ότι η $G$ δεν είναι ελεύθερη ομάδα.

8.10 Για μια ομάδα $G$ (όχι απαραιτήτως πεπερασμένα παριστώμενη), θεωρούμε το σύμπλεγμα κελιών $X$ με θεμελιώδη ομάδα $G$, που κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας μια δοθείσα παράσταση της $G$, όπως στην απόδειξη του πορίσματος 8.2.7. Για κάθε κατά τόξα συνεκτικό χώρο $Y$, κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \to \pi_1(Y, y_0)$ επάγεται από μια συνεχή απεικόνιση μεταξύ των συμπλεγμάτων. Δηλαδή, υπάρχει συνεχής $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$, έτσι ώστε $\varphi = f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Ένα υποσύνολο $A$ ενός τοπολογικού χώρου $X$ θα λέμε ότι επιδέχεται **περιστέλλουσα περιοχή** αν υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ που περιέχει το $A$ και μια περιστολή $r : U \to A$. Ένα ζεύγος υποσυνόλων $(A, B)$ του $X$ λέγεται **περιστέλλον**, αν υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα $U$, $V$ του $X$ τα οποία περιστέλλονται στα $A$, $B$, αντίστοιχα (άρα τα περιέχουν) και επιπλέον η τομή $U \cap V$ περιστέλλεται στην τομή $A \cap B$. Λέμε επίσης ότι το ζεύγος ανοικτών $(U, V)$ **περιστέλλεται** στο $(A, B)$.

8.11 Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $(U, V)$ ένα ζεύγος υποσυνόλων του $X$, που περιστέλλεται στο ζεύγος των υποσυνόλων $(A, B)$. Τα $A$, $B$ και $A \cap B$ είναι κατά τόξα συνεκτικά αν και μόνο αν τα $U$, $V$ και $U \cap V$ είναι.

8.12 Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $(A, B)$ ένα περιστέλλον ζεύγος υποσυνόλων του $X$, όπου τα $A$, $B$ και $A \cap B$ είναι κατά τόξα συνεκτικά. Αν $X = A \cup B$ και $x_0 \in A \cap B$, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$.




**Σχήμα 8.7:** *Αντισυνεκτική τομή και το Θεώρημα Seifert-Van Kampen.*

8.13 Έστω $X$ ένα σύμπλεγμα κελιών διάστασης 2.

(i) Κάθε υποσύμπλεγμα του $X$ επιδέχεται μια περιστέλλουσα περιοχή.

(ii) Κάθε ζεύγος $(K, \Lambda)$ υποσυμπλεγμάτων του $X$ είναι περιστέλλον.

8.14 Υποθέτουμε ότι τα $K, \Lambda$ είναι κατά τόξα συνεκτικά υποσυμπλέγματα ενός συμπλέγματος κελιών $X$ με μη κενή, κατά τόξα συνεκτική τομή $K \cap \Lambda$ και έστω $x_0 \in K \cap \Lambda$. Αν $X = K \cup \Lambda$, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(K, x_0) *_{\pi_1(K\cap\Lambda, x_0)} \pi_1(\Lambda, x_0)$.

8.15 Έστω $Z$ ένα κατά τόξα συνεκτικό σύμπλεγμα κελιών το οποίο είναι η ένωση δύο κατά τόξα συνεκτικών υποσυμπλεγμάτων $X, Y \times [0,1]$ με τομή $X \cap (Y \times [0,1]) = Y \times \{0,1\}$ (εδώ υποθέτουμε ότι τα $Y \times \{0\}, Y \times \{1\}$ είναι ξένα). Δηλαδή, επί της ουσίας το σύμπλεγμα $Z$ προκύπτει ως χώρος πηλίκο από την ξένη ένωση των συμπλεγμάτων $X$ και $Y\times[0,1]$, ταυτοποιώντας καθένα από τα $Y\times\{0\}, Y\times\{1\}$ με υποσυμπλέγματα $B, \Gamma$ του $X$ (ομοιομορφικά ως συμπλέγματα μεταξύ τους), αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με $f$ τη σύνθεση $Y\times\{0\} \to Y\times\{1\} \hookrightarrow X, (y,0) \mapsto (y,1)$. Έστω $v = (y,0)$ κορυφή του $Y\times\{0\}$ και $\xi : I \to X$ μια εμφύτευση (ομοιομορφισμός επί της εικόνας) με αρχή $(y,1)$ και τέλος $(y,0)$. Συμβολίζουμε με $\varphi_1$ τον επαγώμενο ομομορφισμό της ένθεσης $Y\times\{0\} \hookrightarrow X$, με $f_*$ τον επαγόμενο ομομορφισμό της $f$ (στο σημείο αναφοράς $v$) και με $\Phi_\xi$ τον αντίστοιχο ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς. Αν $\rho$ είναι η εικόνα του μονοπατιού $(y,t)$ και $t = [\rho\cdot\xi]$, τότε

$$\pi_1(Z, v) = \big\langle \pi_1(X, v),\ t \,|\, t^{-1}\varphi_1(\gamma)t = \varphi_2(\gamma),\ \gamma \in \pi_1(Y\times\{0\}, v)\big\rangle,$$

όπου $\varphi_2 = \Phi_\xi \circ f_*$.

# Βιβλιογραφία


[1] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti. Geometrisation of 3-manifolds, EMS Tracts in Mathematics, 13, European Mathematical Society, 2010.

[2] M. Dehn. Papers on group theory and topology, translated and introduced by John Stillwell, Springer, 1987.

[3] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[4] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[5] A. A. Markov. The insolubility of the problem of homeomorphy, Dokl. Akad. Nauk SSSR 121 (1958), pp. 218–220.

[6] A. A. Markov. Insolubility of the problem of homeomorphy, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 300–306.

[7] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[8] E. E. Moise. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

# Κεφάλαιο 9

# Ταξινόμηση Επικαλύψεων

## Περιεχόμενα



Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε πρώτα, για μια μεγάλη κατηγορία τοπολογικών χώρων, την ύπαρξη απλά συνεκτικών (καθολικών) χώρων επικάλυψης. Επίσης, δοθείσης της ύπαρξης καθολικού χώρου επικάλυψης για έναν χώρο $X$, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας μεταξύ των χώρων επικάλυψης του $X$ (ως προς ισομορφισμό επικαλύψεων) και των κλάσεων συζυγίας των υποομάδων της $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 \in X$. Τέλος, μελετάμε μετασχηματισμούς χώρων επικάλυψης.

## 9.1 Ύπαρξη Απλά Συνεκτικών Χώρων Επικάλυψης

Έχουμε ήδη δει παραδείγματα επικαλύψεων $p : \widetilde{X} \to X$, όπου ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός (όπως οι γνωστές επικαλύψεις $\mathbb{R} \to S^1$, $S^n \to \mathbb{RP}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$) και θα μπορούσε να πει κανείς ότι αρκετά συχνά είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε έναν απλά συνεκτικό χώρο επικάλυψης για έναν συγκεκριμένο τοπολογικό χώρο. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται από το επόμενο θεώρημα του οποίου η απόδειξη που θα δώσουμε είναι κατασκευαστική και η κατασκευή βασίζεται στις ακόλουθες παρατηρήσεις:

Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου $X$, $x_0$ ένα σημείο αναφοράς του $X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Υποθέτουμε ότι ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός.

- Έστω $U_{x_0}$ στοιχειώδης περιοχή του $x_0$ με αντίστοιχες συνιστώσες $V_j^{x_0}$, $j \in J$. Κάθε θηλειά $f$ στο $x_0$ που περιέχεται στην περιοχή $U_{x_0}$, ανυψώνεται σε θηλειά $\tilde{f}$ στο $\tilde{x}_0$, η οποία περιέχεται στη συνιστώσα $V_j$ που περιέχει το $\tilde{x}_0$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός

$$p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

  απεικονίζει το στοιχείο $[\tilde{f}]$ στο $[f]$. Εφόσον ο χώρος $\widetilde{X}$ έχει υποτεθεί απλά συνεκτικός, έχουμε $[\tilde{f}] = [C_{\tilde{x}_0}]$ και έτσι $[f] = [C_{x_0}]$. Δηλαδή, θηλειές του $X$ που περιέχονται σε αρκούντως μικρές περιοχές είναι ομοτοπικές με σημείο.

- Εφόσον ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, για κάθε $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ υπάρχει μοναδική κλάση ομοτοπίας μονοπατιών $[\tilde{f}]$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}$. Έτσι το $\tilde{x}$ μπορεί να ληφθεί ως το πέρας της ανυψώσεως με αρχή $\tilde{x}_0$ του μονοπατιού $p \circ \tilde{f}$ (κάθε άλλη ανύψωση θα έχει το ίδιο τέλος). Έχουμε λοιπόν μια αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του $\widetilde{X}$ και των κλάσεων ομοτοπίας μονοπατιών του $X$ με αρχή το $\tilde{x}_0$.

**Ορισμός 9.1.1.** Ένας χώρος $X$ λέγεται **ημιτοπικά απλά συνεκτικός** (semilocally simply connected), αν κάθε σημείο $x$ του $X$ έχει ανοικτή περιοχή $U$, έτσι ώστε ο επαγόμενος από την ένθεση ομομορφισμός $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ να είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

**Παράδειγμα 9.1.2.** Κάθε απλά συνεκτικός χώρος είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως διαπιστώνουμε, αν θεωρήσουμε τον κύκλο.

**Παράδειγμα 9.1.3.** Αν κάθε σημείο $x$ ενός χώρου $X$ έχει συμπτύξιμη ανοικτή περιοχή, τότε ο χώρος $X$ είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε σύμπλεγμα κελιών και κάθε πολλαπλότητα απολαμβάνουν την παραπάνω ιδιότητα. Συνεπώς, κάθε σύμπλεγμα κελιών και κάθε πολλαπλότητα είναι χώρος ημιτοπικά απλά συνεκτικός.

**Παράδειγμα 9.1.4.** Για κάθε θετικό φυσικό $n$, θεωρούμε τον κύκλο $C_n$ του επιπέδου ακτίνας $1/n$ με κέντρο το σημείο $(1/n, 0)$ και τον χώρο $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ με την τοπολογία που κληρονομεί ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Τότε κάθε περιοχή του $x_0 = (0, 0)$ περιέχει κύκλο και άρα ο $X$ δεν είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός.

**Ορισμός 9.1.5.** Ένας χώρος $X$ λέγεται **τοπικά κατά τόξα συνεκτικός**, αν για κάθε σημείο $x \in X$ και κάθε ανοικτή περιοχή $U$ του $x$, υπάρχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή του $X$ που περιέχεται στην περιοχή $U$.

Όπως υποψιάζεται κανείς, ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος δεν είναι απαραιτήτως τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Πράγματι, για κάθε ρητό $q$ στο $[0,1]$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0, q]$ του επιπέδου που ενώνει το $x_0 = (1/2, 1)$ με το $(q, 0)$ και τον χώρο $X = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} [x_0, q]$ (με την τοπολογία που έχει ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Ο χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, αλλά όχι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός, αφού κάθε ανοικτή περιοχή ρητού στο $[0,1]$ αποτελείται από άπειρες το πλήθος κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες.

**Θεώρημα 9.1.6.** *Κάθε κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος $X$ επικαλύπτεται από έναν απλά συνεκτικό χώρο $\widetilde{X}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x_0 \in X$. Σύμφωνα με την ανάλυση που έχει προηγηθεί, ορίζουμε ως $\widetilde{X}$ τις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών του $X$ με αρχή το $x_0$, δηλαδή,

$$\widetilde{X} = \big\{ [f] : f \text{ μονοπάτι του } X \text{ με αρχή το } x_0 \big\}.$$

Ορίζουμε επίσης $p : \widetilde{X} \to X$ με $p([f]) = f(1)$. Σημειώνουμε πως ο ορισμός της απεικονίσεως $p$ δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο $f$ της κλάσεως ομοτοπίας που θα επιλεγεί, αφού ομοτοπικά μονοπάτια έχουν το ίδιο τέλος. Επίσης, η κατά τόξα συνεκτικότητα του χώρου $X$ συνεπάγεται ότι η $p$ είναι επί.

Για κάθε $x \in X$, θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{U}_x$ που αποτελείται από όλες τις ανοικτές, κατά τόξα συνεκτικές περιοχές $U$ του $x$ για τις οποίες ο ομομορφισμός $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$, που επάγεται από την ένθεση $U \hookrightarrow X$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

Εφόσον ο $X$ είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός, η οικογένεια $\mathcal{U}_x$ αποτελεί βάση περιοχών του $x$ (αυτό σημαίνει ότι τις περιοχές $U$ του Ορισμού 9.1.1 μπορούμε να τις θεωρούμε όσο «μικρές» θέλουμε). Πράγματι, αν η $U$ είναι μια περιοχή του $x$ της οποίας η ένθεση επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό, τότε και ο επαγόμενος ομομορφισμός κάθε περιοχής $V$ του $x$ με $V \subseteq U$ είναι επίσης ο τετριμμένος, όπως προκύπτει από τη μεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος που επάγεται από τις αντίστοιχες ενθέσεις.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V,x) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(U,x) \arrow[d] \\ & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, για κάθε ανοικτή περιοχή $U_1$ του $x$, η τομή $U \cap U_1$ (και άρα η $U_1$) περιέχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή $V_1 \in \mathcal{U}_x$. Αυτές οι βάσεις περιοχών των σημείων του $X$ θα χρησιμοποιηθούν για να εφοδιάσουμε το σύνολο $\widetilde{X}$ με δομή τοπολογικού χώρου.

Η τοπολογία του $\widetilde{X}$: Για κάθε στοιχείο $[f] \in \widetilde{X}$ και $U \in \mathcal{U}_{f(1)}$, ορίζουμε

$$[f \cdot U] = \Big\{[f \cdot \alpha] \in \widetilde{X} : \text{όπου } \alpha \text{ μονοπάτι στο } U \text{ με αρχή } f(1)\Big\}$$

και

$$\mathcal{B} = \Big\{[f \cdot U] : [f] \text{ και } U \text{ όπως πριν}\Big\}.$$

Θα δείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία του $\widetilde{X}$ με την οποία θα θεωρούμε στη συνέχεια το $\widetilde{X}$ εφοδιασμένο.

- Τα σύνολα της $\mathcal{B}$ καλύπτουν τον χώρο $\widetilde{X}$, αφού για κάθε $[f] \in \widetilde{X}$ και κάθε περιοχή $U \in \mathcal{U}_{f(1)}$, έχουμε $[f] = [f \cdot C_{f(1)}] \in [f \cdot U]$.

- Έστω $[f \cdot U], [g \cdot V] \in \mathcal{B}$ με $[f \cdot U] \cap [g \cdot V] \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $[h \cdot W] \in \mathcal{B}$ που περιέχεται στην τομή των $[f \cdot U]$ και $[g \cdot V]$. Έστω $[h] \in [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$. Τότε $h \simeq f\alpha$ και $h \simeq g\beta$, για κάποια μονοπάτια $\alpha, \beta$ εντός των περιοχών $U, V$, αντίστοιχα. Ιδιαιτέρως, $h(1) \in U \cap V$. Εφόσον η οικογένεια $\mathcal{U}_{h(1)}$ αποτελεί βάση περιοχών του $h(1)$, υπάρχει περιοχή $W \in \mathcal{U}_{h(1)}$ η οποία περιέχεται στην τομή $U \cap V$. Άρα, για κάθε μονοπάτι $\gamma$ με αρχή $h(1)$ εντός της περιοχής $W$, έχουμε ότι $[h \cdot \gamma] = [f \cdot \alpha \cdot \gamma] = [g \cdot \beta \cdot \gamma] \in [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$ και ως εκ τούτου $[h \cdot W] \subseteq [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$.

Ο $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $[f] \in \widetilde{X}$ υπάρχει μονοπάτι στον $\widetilde{X}$ από το $\tilde{x}_0 = [C_{x_0}]$ στο σημείο $[f]$.

Για κάθε $t \in [0, 1]$, θεωρούμε το τμήμα $f_t$ της $f$ από το $x_0$ στο $f(t)$ καταλλήλως παραμετρικοποιημένο, δηλαδή $f_t(s) = f(ts)$, $s \in [0, 1]$. Ορίζουμε μονοπάτι $\tilde{f} : I \to \widetilde{X}$ με $\tilde{f}(t) = [f_t]$ (γιατί η $\tilde{f}$ είναι συνεχής;) και παρατηρούμε ότι $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ ενώ $\tilde{f}(1) = [f]$.

Ο $\widetilde{X}$ επικαλύπτει τον $X$ μέσω της $p([f]) = f(1)$: Έστω $x \in X$. Σταθεροποιούμε ανοικτή περιοχή $U \in \mathcal{U}_x$. Θα δείξουμε ότι η $U$ είναι στοιχειώδης περιοχή του $x$ με αντίστοιχες συνιστώσες $[f \cdot U]$, καθώς το μονοπάτι $f$ διατρέχει τις κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών από το $x_0$ στο $x$. Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[f]} [f \cdot U]\,, \; [f] \text{ κλάση ομοτοπίας από το } x_0 \text{ στο } x.$$

Πράγματι, είναι άμεσο ότι $p([f \cdot U]) \subseteq U$ και άρα $\cup_{[f]}[f \cdot U] \subseteq p^{-1}(U)$. Επίσης, αν $[g] \in p^{-1}(U)$, τότε $g(1) \in U$ και έτσι

$$[g] = [g \cdot \beta^{-1} \cdot \beta] \in \cup_{[f]}[f \cdot U],$$

όπου $\beta$ μονοπάτι εντός του $U$ από το $x$ στο $g(1)$ (υπάρχει αφού η περιοχή $U$ είναι κατά τόξα συνεκτική) και $f = g \cdot \beta^{-1}$. Άρα

$$p^{-1}(U) = \cup_{[f]}[f \cdot U]\,, [f] \text{ κλάση ομοτοπίας από το } x_0 \text{ στο } x.$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η παραπάνω ένωση είναι ξένη, υποθέτουμε ότι υπάρχουν περιοχές $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ με μη κενή τομή και θεωρούμε ένα στοιχείο $[h]$ στην τομή τους. Τότε $[h] = [f \cdot \alpha] = [g \cdot \beta]$ για κάποια μονοπάτια $\alpha$ και $\beta$ εντός της περιοχής $U$ με αρχή το $x$ και τέλος το $h(1)$. Από τον ορισμό της βάσης περιοχών $\mathcal{U}_x$, η θηλειά $\alpha \cdot \beta^{-1}$ που βρίσκεται εντός της περιοχής $U \in \mathcal{U}_x$, είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι $C_x$. Έτσι $[f] = [f \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}] = [g \cdot \beta \cdot \beta^{-1}] = [g]$ που δίνει ότι $[f \cdot U] = [g \cdot U]$.

Από τη σχέση $p^{-1}(U) = \cup_{[f]}[f \cdot U]$, προκύπτει ότι η απεικόνιση $p$ είναι συνεχής, αφού αντιστρέφει τα ανοικτά κάθε βάσης περιοχών $\mathcal{U}_x$ σε ανοικτά (βασικά για την ακρίβεια). Ο περιορισμός $p_{[f]} : [f \cdot U] \to U$ είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, είναι επί, αφού η περιοχή $U$ είναι κατά τόξα συνεκτική: αν $x_1 \in U$ και $\alpha$ είναι ένα μονοπάτι στην περιοχή $U$ από το $x$ στο $x_1$, τότε $p([f \cdot \alpha]) = x_1$. Για το $1-1$, ας υποθέσουμε ότι $p_{[f]}([f \cdot \alpha]) = p_{[f]}([f \cdot \beta])$, όπου $\alpha, \beta$ μονοπάτια εντός του $U$ με αρχή $x$. Τότε $\alpha(1) = \beta(1)$ και $\alpha \simeq \beta$ (αφού $U \in \mathcal{U}_x$). Άρα $f \cdot \alpha \simeq f \cdot \beta$ και έτσι $[f \cdot \alpha] = [f \cdot \beta]$.

Τέλος, η απεικόνιση $p_{[f]}$ είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς και ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό, αφού η $p$ απεικονίζει τα βασικά σε ανοικτά (όπως πριν $p([g \cdot V]) = V$ για κάθε κλάση ομοτοπίας $[g]$ με αρχή $x_0$ και $V \in \mathcal{U}_{g(1)}$).

<u>Ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός:</u> Έστω $\tilde{g}$ μια θηλειά στο $\tilde{x}_0 = [C_{x_0}]$. Τότε η θηλειά $\tilde{g}$ προβάλλεται σε θηλειά $f = p \circ \tilde{g}$ στο $x_0$. Το μονοπάτι $\tilde{f}(t) = [f_t]$ που ορίσαμε πιο πριν αποδεικνύοντας την κατά τόξα συνεκτικότητα του $\widetilde{X}$, αποτελεί ανύψωση της θηλειάς $f$ με αρχή $\tilde{x}_0$ και τέλος $[f]$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έχουμε ότι $\tilde{f} = \tilde{g}$ και έτσι το μονοπάτι $\tilde{f}$ είναι επίσης θηλειά στο $\tilde{x}_0$. Δηλαδή, $[f] = \tilde{x}_0$ που σημαίνει ότι η $f$ είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι στο $x_0$. Άρα και η ανύψωσή της $\tilde{g}$ είναι ομοτοπική με το σταθερό μονοπάτι στο $C_{\tilde{x}_0}$ και συνεπώς ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός. $\square$

Αν έχουμε μια επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$ ενός χώρου $X$, ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X$ και ένα σημείο $\tilde{x}_0$ στο νήμα του $x_0$, τότε, από την Πρόταση 7.1.12, η ομάδα $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$

εμφυτεύεται ως υποομάδα στην $\pi_1(X, x_0)$ μέσω του επαγόμενου ομομορφισμού $p_*$. Το περιεχόμενο της ακόλουθης πρότασης είναι ότι κάθε υποομάδα της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου, ο οποίος ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, μπορεί να ληφθεί με αυτόν τον τρόπο, δηλαδή είναι μονομορφική εικόνα της θεμελιώδους ομάδας κατάλληλου χώρου επικάλυψης.

**Πρόταση 9.1.7.** *Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε υποομάδα $H \leq \pi_1(X, x_0)$, όπου $x_0 \in X$, υπάρχει επικάλυψη $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ και σημείο $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}_H$, έτσι ώστε $(p_H)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)\big) = H$.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε την ορολογία και τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης. Στον απλά συνεκτικό χώρο $\widetilde{X}$ που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο θεώρημα και του οποίου τα σημεία είναι κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών του $X$ με αρχή $x_0$, ορίζουμε σχέση $\sim$ ως εξής:

$$[f] \sim [g] \text{ αν και μόνο αν } f(1) = g(1) \text{ και } [f \cdot g^{-1}] \in H.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η σχέση που μόλις ορίσαμε είναι σχέση ισοδυναμίας.

- $[f] \sim [f]$, αφού $[f \cdot f^{-1}] = [C_{x_0}] \in H$.
- Αν $[f] \sim [g]$, τότε και $[g] \sim [f]$, αφού $[g \cdot f^{-1}] \in H$ αν και μόνο αν $[f \cdot g^{-1}] \in H$ που ισχύει.
- Αν $[f] \sim [g]$ και $[g] \sim [h]$, τότε $[f \cdot g^{-1}] \in H$, $[g \cdot h^{-1}] \in H$ και έτσι $[f \cdot g^{-1}] \cdot [g \cdot h^{-1}] = [f \cdot h^{-1}] \in H$. Δηλαδή, $[f] \sim [h]$.

Συμβολίζουμε με $\big[[f]\big]_H$ την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $[f]$ και με $\widetilde{X}_H$ τον αντίστοιχο χώρο πηλίκο. Η προβολή $p$ παραγοντοποιείται μέσω της απεικονίσεως $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ με $p_H\big(\big[[f]\big]_H\big) = f(1)$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[d] \arrow[dr, "p"] & \\
\widetilde{X}_H \arrow[r, "p_H"'] & X
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, αν έχουμε δύο συνιστώσες $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ της ίδιας στοιχειώδους περιοχής $U$ (άρα $f(1) = g(1)$) που περιέχουν ισοδύναμα στοιχεία, έστω $[f \cdot \alpha] \sim [g \cdot \beta]$, όπου $\alpha, \beta$ μονοπάτια εντός της περιοχής $U$ με αρχή $f(1)$, τότε $\alpha(1) = \beta(1)$ και για κάθε μονοπάτι $h$ εντός της περιοχής $U$ με αρχή $f(1)$ έχουμε

$$[(f \cdot h) \cdot (g \cdot h)^{-1}] = [f \cdot g^{-1}] = [(f \cdot \alpha) \cdot (\beta^{-1} \cdot g^{-1})] \in H,$$

καθώς το μονοπάτι $\alpha \cdot \beta^{-1}$ είναι θηλειά εντός του $U$. Άρα $[f \cdot h] \sim [g \cdot h]$ για κάθε $h$ όπως πριν, που σημαίνει ότι οι συνιστώσες $[f \cdot U]$ και $[g \cdot U]$ ταυτοποιούνται στον χώρο $\widetilde{X}_H$. Από αυτό προκύπτει, ακολουθώντας την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, ότι η απεικόνιση $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Έστω $\tilde{x}_0 = \big[[C_{x_0}]\big]_H$. Μένει να δείξουμε ότι μέσω της $(p_H)_*$ η ομάδα $\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)$ απεικονίζεται επί της $\pi_1(X, x_0)$. Έστω, λοιπόν, $h$ μια θηλειά στο $x_0$. Τότε, σύμφωνα πάλι με την προηγούμενη απόδειξη, η ανύψωσή της $\tilde{h}$ στον χώρο $\widetilde{X}$ με αρχή $[C_{x_0}]$ έχει τέλος $[h]$. Συνεπώς, η εικόνα στον χώρο $\widetilde{X}_H$ της ανύψωσης $\tilde{h}$ είναι θηλειά αν και μόνο αν $[h] \sim [C_{x_0}]$, δηλαδή, αν και μόνο αν $[h] \in H$. Άρα $(p_H)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)\big) = H$, αφού σύμφωνα με την Πρόταση 7.1.12, η εικόνα της $(p_H)_*$ αποτελείται από εκείνες τις θηλειές στο $x_0$ των οποίων οι ανυψώσεις είναι θηλειές στο $\tilde{x}_0$. □

Μπορεί να δειχθεί (βλ. για παράδειγμα [6]) ότι αν ο χώρος $X$ είναι γράφημα (γενικότερα σύμπλεγμα κελιών) ή πολλαπλότητα διάστασης $m$, τότε και ο χώρος $\widetilde{X}_H$ κληρονομεί από τον $X$ δομή γραφήματος (συμπλέγματος κελιών ίδιας διάστασης) ή πολλαπλότητας διάστασης $m$, αντίστοιχα.

## 9.2 Η Αντιστοιχία του Galois

Αρχίζουμε με το ακόλουθο θεώρημα του οποίου η σπουδαιότητα έγκειται, εκτός των άλλων, στο ότι ένα τοπολογικό πρόβλημα (η ύπαρξη ανυψώσεως) ανάγεται πλήρως σε αλγεβρικό.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\varphi : (A, a) \to (B, b)$, θα εννούμε ότι έχουμε μια απεικόνιση $\varphi : A \to B$ με $\varphi(a) = b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$.

**Θεώρημα 9.2.1** (Κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων)**.** *Έστω $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ μια επικάλυψη και $\varphi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου ο $Y$ είναι ένας κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ανύψωση*

$\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x_0})$ *της* $\varphi$ *αν και μόνο αν* $\varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big)$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Λόγω της συνεκτικότητας του $Y$, όταν υπάρχει η ανύψωση $\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \tilde{x_0})$, αυτή θα είναι μοναδική.

*Απόδειξη.* Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν υπάρχει η ανύψωση $\widetilde{\varphi}$, τότε

$$\varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) = (p \circ \widetilde{\varphi})_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) = p_* \circ \widetilde{\varphi}_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big).$$

Για το αντίστροφο, έστω $y \in Y$ και $f$ ένα μονοπάτι από το $y_0$ στο $y$ (ο $Y$ είναι κατά τόξα συνεκτικός). Για το μονοπάτι $\varphi \circ f$ του $X$ θεωρούμε τη μοναδική ανύψωσή του $\widetilde{\varphi \circ f}$ με αρχή $\tilde{x}_0$. Ορίζουμε

$$\widetilde{\varphi}(y) = \widetilde{\varphi \circ f}(1)$$

και παρατηρούμε ότι

$$p \circ \widetilde{\varphi}(y) = p \circ \widetilde{\varphi \circ f}(1) = \varphi \circ f(1) = \varphi(y).$$

Δηλαδή, ο ορισμός μας δίνει πράγματι ανύψωση της $\varphi$. Πρέπει όμως να δείξουμε ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Για το καλώς ορισμένο της $\widetilde{\varphi}$, θεωρούμε ένα άλλο μονοπάτι $g$ του $Y$ από το $y_0$ στο $y$ και την ανύψωση όπως πριν $\widetilde{\varphi \circ g}$ του $\varphi \circ g$ με αρχή $\tilde{x}_0$. Τότε ορίζεται το γινόμενο $f \cdot g^{-1}$ που είναι θηλειά στο $y_0$ και

$$[\varphi \circ (f \cdot g^{-1})] \in \varphi_*\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \subseteq p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x_0})\big).$$

Συνεπώς, υπάρχει θηλειά $\tilde{h}$ στο $\tilde{x}_0$, έτσι ώστε $p_*[\tilde{h}] = [\varphi \circ (f \cdot g^{-1})]$. Όμως

$$\varphi \circ (f \cdot g^{-1}) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)^{-1} \simeq p \circ \tilde{h}$$

και έτσι $\varphi \circ f \simeq (p \circ \tilde{h}) \cdot (\varphi \circ g)$. Έπεται ότι και οι ανυψώσεις αυτών με αρχή το $\tilde{x}_0$ θα είναι ομοτοπικές, δηλαδή $\widetilde{\varphi \circ f} \simeq \tilde{h} \cdot \widetilde{\varphi \circ g}$. Έτσι, $\widetilde{\varphi \circ f}(1) = \widetilde{\varphi \circ g}(1)$ που αποδεικνύει την ανεξαρτησία του ορισμού της $\widetilde{\varphi}$ από την επιλογή του μονοπατιού $f$.

Δείχνουμε τώρα ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι συνεχής. Έστω $y \in Y$, $U$ στοιχειώδης περιοχή του $\varphi(y)$ και $\widetilde{U}$ η αντίστοιχη συνιστώσα που περιέχει το $\widetilde{\varphi}(y) \in p^{-1}\big(\varphi(y)\big)$. Από υπόθεση, υπάρχει ανοικτή, κατά τόξα συνεκτική περιοχή $V$ του $y$ με $\varphi(V) \subseteq U$. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε, όπως στον ορισμό της $\widetilde{\varphi}$, μονοπάτι $f$ από το $y_0$ στο $y$. Για κάθε $z \in V$, θεωρούμε μονοπάτι $h$ εντός της περιοχής $V$ από το $y$ στο $z$. Τότε το μονοπάτι $f \cdot h$ έχει αρχή $y_0$, τέλος $z$ και η εικόνα του $\varphi \circ (f \cdot h) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ h)$ έχει ανύψωση (με αρχή $\tilde{x}_0$) το μονοπάτι

$$\widetilde{\varphi \circ f} \cdot \widetilde{\varphi \circ h}, \text{ όπου } \widetilde{\varphi \circ h} = \left(p|_{\widetilde{U}}\right)^{-1} \circ \varphi \circ h.$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι, από την επιλογή της συνιστώσας $\widetilde{U}$, το μονοπάτι $\widetilde{\varphi \circ h}$ έχει αρχή $\widetilde{\varphi}(y)$ (δηλαδή, το τέλος του μονοπατιού $\widetilde{\varphi \circ f}$) και ότι το μονοπάτι $\varphi \circ h$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού του περιορισμού της $\left(p|_{\widetilde{U}}\right)^{-1}$ αφού $\varphi(V) \subseteq U$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανύψωση για να «υπολογίσουμε» την εικόνα $\widetilde{\varphi}(z)$, έχουμε ότι

$$\widetilde{\varphi}(z) = \left(\widetilde{\varphi \circ f} \cdot \widetilde{\varphi \circ h}\right)(1) = \widetilde{\varphi \circ h}(1) = \left(p|_{\widetilde{U}}\right)^{-1} \circ \varphi(z) \in \widetilde{U}.$$

Τελικά, $\widetilde{\varphi}|_V = \left(p|_{\widetilde{U}}\right)^{-1} \circ \varphi$ και άρα η $\widetilde{\varphi}$ είναι συνεχής (η συνέχεια είναι τοπική έννοια). $\square$

**Ορισμός 9.2.2.** Έστω $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου $X$. Ένας **ομομορφισμός** (επικαλύψεων) από την πρώτη επικάλυψη στη δεύτερη είναι μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, τέτοια ώστε $p_2 \circ \varphi = p_1$. Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός $\varphi$ θα λέγεται **ισομορφισμός** (επικαλύψεων), αν επιπροσθέτως η $\varphi$ είναι ομοιομορφισμός.

**Πρόταση 9.2.3.** *Έστω $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου $X$, όπου οι χώροι $X$, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Τότε υπάρχει ισομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ με $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, αν και μόνο αν*

$$(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big).$$

*Απόδειξη.* Αν υπάρχει ισομορφισμός $\varphi$ όπως παραπάνω, τότε ο $\varphi$ επάγει ισομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες και αφού $p_2 \circ \varphi = p_1$, έχουμε

$$(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_* \circ \varphi_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_2(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο ανυψώσεως δύο φορές, βρίσκουμε ανυψώσεις $\widetilde{p}_1$ και $\widetilde{p}_2$ των $p_1$ και $p_2$, αντίστοιχα, όπως στα παρακάτω διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[ur, "\widetilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p_1"] \\ (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[ur, "\widetilde{p}_2"] \arrow[r, "p_2"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Τότε $p_2 \circ \widetilde{p}_1 \circ \widetilde{p}_2 = p_1 \circ \widetilde{p}_2 = p_2$ και $\widetilde{p}_1 \circ \widetilde{p}_2(\tilde{x}_2) = \widetilde{p}_1(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $\widetilde{p}_1 \circ \widetilde{p}_2 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_2}$. Ομοίως προκύπτει ότι $\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{p}_1 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_1}$ και η ανύψωση $\widetilde{p}_1$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. □

**Λήμμα 9.2.4.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του $X$, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ και $\tilde{\gamma}$ ένα μονοπάτι του $\widetilde{X}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$. Υποθέτουμε ότι οι χώροι $\widetilde{X}$ και $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί.*

1. *Αν $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, τότε $[\gamma]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$. Δηλαδή, οι $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ και $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$ είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi_1(X, x_0)$.*

2. *Κάθε υποομάδα $H$ της $\pi_1(X, x_0)$ που είναι συζυγής με την $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ είναι της μορφής $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$ για κάποιο $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$.*

*Απόδειξη.* Σημειώνουμε πρώτα ότι το μονοπάτι $\gamma$ είναι θηλειά στο $x_0$, αφού τα άκρα του μονοπατιού $\tilde{\gamma}$ ανήκουν στο νήμα του $x_0$. Θεωρούμε τον ισομορφισμό αλλαγής σημείου αναφοράς

$$\Phi_{\tilde{\gamma}} : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) \to \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \text{ με } \Phi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{f}]) = [\tilde{\gamma}\tilde{f}\tilde{\gamma}^{-1}].$$

Τότε

$$[\gamma]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[\gamma]^{-1} = \Big\{[p\circ(\tilde{\gamma}\cdot\tilde{f}\cdot\tilde{\gamma}^{-1})] \ : \ \tilde{f} \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)\Big\} = p_*\big(\mathrm{Im}\,\Phi_{\tilde{\gamma}}\big) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, υποθέτουμε ότι $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = [\alpha]H[\alpha]^{-1}$, όπου $\alpha$ θηλειά στο $x_0$. Θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{\alpha}$ της θηλειάς $\alpha$ με αρχή το $\tilde{x}_0$ και έστω $\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1)$. Ακριβώς όπως πριν, προκύπτει ότι $[\alpha]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})[\alpha]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ και ως εκ τούτου $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$. □

Αυτό που διαπιστώνουμε από την προηγούμενη απόδειξη είναι ότι ο ισομορφισμός $\Phi_{\tilde{\gamma}}$ «προβάλλεται» στον εσωτερικό αυτομορφισμό $\Phi_\gamma$ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ και έτσι οι εικόνες (μέσω της $p_*$) των ισόμορφων υποομάδων καθίστανται συζυγείς στην $\pi_1(X, x_0)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[r, "\Phi_{\tilde{\gamma}}"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\Phi_{\gamma}"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

**Παρατήρηση 9.2.5.** Επί της ουσίας, το προηγούμενο λήμμα λέει ότι καθώς το $\tilde{x}_0$ διατρέχει το νήμα $p^{-1}(x_0)$, οι εικόνες των αντίστοιχων υπομάδων διατρέχουν μια ολόκληρη κλάση συζυγίας στην $\pi_1(X, x_0)$.

**Θεώρημα 9.2.6.** *Έστω $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου $X$, όπου οι χώροι $X$, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Οι επικαλύψεις $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ και $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν οι υποομάδες $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big)$ και $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$ της $\pi_1(X, x_0)$ είναι συζυγείς.*

*Απόδειξη.* Αν υπάρχει ισομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, τότε, από την Πρόταση 9.2.3, $(p_1)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\big) = (p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1))\big)$. Όμως, από το προηγούμενο λήμμα οι υποομάδες $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1))\big)$ και $(p_2)_*\big(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)\big)$ είναι συζυγείς, αφού τα σημεία $\varphi(\tilde{x}_1)$ και $\tilde{x}_2$ ανήκουν στο ίδιο νήμα.

Αντίστροφα, αν οι υποομάδες είναι συζυγείς, τότε αλλάζοντας στοιχείο στο νήμα και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, εξασφαλίζουμε ισότητα των υποομάδων που προκύπτουν και το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 9.2.3. □

**Θεώρημα 9.2.7.** *Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $x_0$ ένα σημείο αναφοράς του $X$. Τότε υπάρχει μια $1-1$ και επί απεικόνιση $\Psi$ μεταξύ των κλάσεων ισομορφίας των κατά τόξα συνεκτικών επικαλύψεων $p : \widetilde{X} \to X$ του $X$ και των κλάσεων συζυγίας των υποομάδων της $\pi_1(X, x_0)$, η οποία λαμβάνεται αντιστοιχίζοντας την κλάση ισομορφίας της επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ στην κλάση συζυγίας της υποομάδος $p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$, όπου $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Λήμμα 9.2.4, ο ορισμός της απεικονίσεως $\Psi$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\tilde{x}_0$ στο νήμα του $x_0$ και από το προηγούμενο θεώρημα δεν εξαρτάται, επίσης, από την επιλογή του αντιπροσώπου στην κλάση ισομορφίας της επικαλύψεως $p : \widetilde{X} \to X$. Το $1-1$ προκύπτει επίσης από το προηγούμενο θεώρημα, ενώ το επί είναι συνέπεια της ύπαρξης απλά συνεκτικού χώρου επικάλυψης (βλ. Πρόταση 9.1.7). □

Στη συνέχεια, ο στόχος μας είναι να δείξουμε (με τις συνήθεις υποθέσεις συνεκτικότητας) την καθολικότητα των απλά συνεκτικών χώρων επικάλυψης, δηλαδή, ότι κάθε χώρος επικάλυψης ενός χώρου $X$ επικαλύπτεται από ένα απλά συνεκτικό χώρος επικάλυψης του $X$.

**Λήμμα 9.2.8.** *Έστω $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ δύο επικαλύψεις ενός χώρου $X$, όπου οι χώροι $X$, $\widetilde{X}_1$ και $\widetilde{X}_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Κάθε ομομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ είναι προβολή επικάλυψης.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η $\varphi$ είναι επί. Έστω $\tilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$ και $x = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Για το τυχαίο $\tilde{x} \in \widetilde{X}_2$, θεωρούμε μονοπάτι $\tilde{\gamma}$ στον $\widetilde{X}_2$ από το $\tilde{x}_2$ στο $\tilde{x}$. Τότε η σύνθεση $p_2 \circ \tilde{\gamma}$ είναι μονοπάτι του $X$ με αρχή το $x$. Αν $\tilde{f}$ είναι η μοναδική ανύψωση του $p_2 \circ \tilde{\gamma}$ με αρχή $\tilde{x}_1$, τότε $p_2 \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_1 \circ \tilde{f} = p_2 \circ \tilde{\gamma}$ και $\varphi \circ \tilde{f}(0) = \tilde{x}_2 = \tilde{\gamma}(0)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων έπεται ότι $\varphi \circ \tilde{f} = \tilde{\gamma}$ και άρα $\varphi\big(\tilde{f}(1)\big) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$. Δηλαδή, η $\varphi$ είναι επί.

Στη συνέχεια θα βρούμε στοιχειώδη περιοχή (ως προς $\varphi$) για το τυχαίο $\tilde{x} \in \widetilde{X}_2$. Εφόσον ο χώρος $X$ είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός, μπορούμε να βρούμε κατά τόξα συνεκτική περιοχή $U$ του $x = p_2(\tilde{x})$ η οποία να είναι στοιχειώδης περιοχή και ως προς την προβολή $p_1$ και ως προς την $p_2$. Έστω $V$ η συνιστώσα της αντίστροφης εικόνας $p_2^{-1}(U)$ που περιέχει το $\tilde{x}$. Θα δείξουμε ότι η $V$ είναι στοιχειώδης περιοχή του $\tilde{x}$ ως προς $\varphi$.

Παρατηρούμε ότι κάθε συνιστώσα $U_\alpha$ της αντίστροφης εικόνας $p_1^{-1}(U)$, απεικονίζεται μέσω της $\varphi$ στην αντίστροφη εικόνα $p_2^{-1}(U)$. Επιπροσθέτως, αφού κάθε συνιστώσα $U_\alpha$ είναι συνεκτική (ως ομοιομορφική με την περιοχή $U$), η $\varphi$ την απεικονίζει σε μια μόνο από τις συνιστώσες της αντίστροφης εικόνας $p_2^{-1}(U)$. Συνεπώς, η αντίστροφη εικόνα $\varphi^{-1}(V)$ είναι η ξένη ένωση εκείνων των συνιστωσών $U_\alpha$ που απεικονίζονται μέσω της $\varphi$ στην $V$, αφού

$$\sqcup_\alpha U_\alpha = p_1^{-1}(U) = \varphi^{-1}\big(p_2^{-1}(U)\big) \text{ και έτσι } \varphi^{-1}(V) = \sqcup_\alpha\big(U_\alpha \cap \varphi^{-1}(V)\big).$$

Τέλος, από τη μεταθετικότητα του ακόλουθου διάγραμματος (των αντίστοιχων περιορισμών), προκύπτει ότι για κάθε τέτοια συνιστώσα $U_\alpha$ ο περιορισμός $\varphi| : U_\alpha \to V$ είναι ομοιομορφισμός

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\varphi|"] \arrow[dr, "p_1|"'] & & V \arrow[dl, "p_2|"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πρόταση 9.2.9.** *Έστω $X$ ένας ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος και $p : \widetilde{X} \to X$ ένας απλά συνεκτικός χώρος επικάλυψης του χώρου $X$, όπου ως συνήθως υποθέτουμε ότι οι χώροι $\widetilde{X}$ και $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικοί και τοπικά κατά τόξα συνεκτικοί. Αν $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ είναι μια άλλη επικάλυψη του $X$, τότε υπάρχει επικάλυψη $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$.*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \widetilde{X} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Εφόσον ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, από το κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων υπάρχει ομομορφισμός επικαλύψεων $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$, ο οποίος από το προηγούμενο λήμμα είναι απεικόνιση επικάλυψης. □

**Παρατήρηση 9.2.10.** Λόγω της προηγούμενης πρότασης, ένας απλά συνεκτικός χώρος επικάλυψης $\widetilde{X}$ του $X$ επικαλύπτει κάθε άλλο χώρο επικάλυψης του $X$. Αυτός είναι ο λόγος που ο $\widetilde{X}$ λέγεται **καθολικός** χώρος επικάλυψης του $X$. Επίσης, ο $\widetilde{X}$ είναι μοναδικός ως προς ισομορφισμό επικαλύψεων, αφού δύο απλά συνεκτικοί χώροι επικάλυψης του $X$ είναι μεταξύ τους ισόμορφοι (αντιστοιχούν στην τετριμμένη υποομάδα).

## 9.3 Μετασχηματισμοί Επικαλύψεων

Για έναν χώρο επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ ένας ισομορφισμός επικάλυψης $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ λέγεται **μετασχηματισμός** της επικάλυψης.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Οι μετασχηματισμοί της επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση, την οποία συμβολίζουμε με $G(\widetilde{X}, p)$ ή πιο απλά με $G(\widetilde{X})$.

Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι συνεκτικός, τότε ένας μετασχηματισμός $\varphi \in G(\widetilde{X})$ καθορίζεται πλήρως από την εικόνα του σε ένα μόνο σημείο. Πράγματι, αν $\varphi, \psi \in G(\widetilde{X})$ και $\varphi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})$ για κάποιο $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, τότε, από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $\varphi = \psi$, αφού οι μετασχηματισμοί $\varphi$ και $\psi$ είναι ανυψώσεις της προβολής $p$.

**Παράδειγμα 9.3.1.** Για τον χώρο επικάλυψης $p : \mathbb{R} \to S^1$ με $p(x) = e^{2\pi i x}$ η ομάδα μετασχηματισμών αποτελείται από τις απεικονίσεις

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } L_n(x) = x + n, n \in \mathbb{Z},$$

η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι άπειρη κυκλική.

**Παράδειγμα 9.3.2.** Οι μετασχηματισμοί της συνήθους επικάλυψης $S^n \to \mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και η αντιποδική απεικόνιση.

Παρατηρούμε ότι κάθε μετασχηματισμός μιας επικάλυψης απεικονίζει κάθε στοιχείο ενός νήματος στο ίδιο νήμα (ως ομομορφισμός επικάλυψης) και έτσι μεταθέτει τα στοιχεία κάθε νήματος, αφού είναι $1-1$ και επί.

**Ορισμός 9.3.3.** Ένας χώρος επικάλυψης $p : \widetilde{X} \to X$ ενός χώρου $X$ λέγεται **κανονικός**, αν η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά στο νήμα $p^{-1}(x)$ του $x$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και κάθε ζεύγος σημείων $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, υπάρχει μετασχηματισμός $\varphi \in G(\widetilde{X})$ με $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (για κατά τόξα συνεκτικούς χώρους) ότι αν η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά σε ένα νήμα, τότε δρα και σε κάθε άλλο νήμα.

**Πρόταση 9.3.4.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος επικάλυψης ενός κατά τόξα συνεκτικού και τοπικά κατά τόξα συνεκτικού χώρου $X$, $x_0 \in X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Αν συμβολίσουμε με $H$ την υποομάδα $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ της $\pi_1(X, x_0)$, τότε:*

1. *Η ανωτέρω επικάλυψη είναι κανονική αν και μόνο αν η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$.*

2. *Η ομάδα μετασχηματισμών $G(\widetilde{X})$ της επικάλυψης είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $N(H)/H$, όπου $N(H)$ είναι η κανονικοποιούσα της $H$ στην $\pi_1(X, x_0)$. Ιδιαιτέρως, $G(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$, αν η επικάλυψη είναι κανονική. Άρα $G(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$, στην περίπτωση που ο $\widetilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Μια υποομάδα είναι κανονική αν και μόνο αν η κλάση συζυγίας της είναι μονοσύνολο. Από το Λήμμα 9.2.4, η κλάση συζυγίας της $H$ αποτελείται από τις εικόνες $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$, καθώς το $\tilde{x}$ διατρέχει το νήμα του $x_0$. Συνεπώς η υποομάδα $H$ είναι κανονική αν και μόνο αν $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_2)$ για κάθε ζεύγος στοιχείων $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, το οποίο, λόγω της Πρότασης 9.2.3, είναι ισοδύναμο με το να δρα η $G(\widetilde{X})$ μεταβατικά στο νήμα του $x_0$.

Για την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού, ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : N(H) \to G(\widetilde{X})$$

ως εξής: Για κάθε $[g] \in N(H)$, όπου $g$ θηλειά στο $x_0$, θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{g}$ της $g$ με αρχή το $\tilde{x}_0$. Αν $\tilde{x}_1$ είναι το τέλος της ανυψώσεως $\tilde{g}$, τότε

$$[g]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[g]^{-1} = [p \circ \tilde{g}]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[p \circ \tilde{g}]^{-1} = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Εφόσον το στοιχείο $[g]$ ανήκει στην κανονικοποιούσα της $H$, έπεται ότι

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$$

και άρα υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός $\varphi_g \in G(\widetilde{X})$ με $\varphi_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Σημειώνουμε πως το σημείο $\tilde{x}_1$ και κατ' επέκταση ο μετασχηματισμός $\varphi_g$, δεν εξαρτάται από την επιλογή της θηλειάς $g$ στην κλάση ομοτοπίας της, γιατί όλοι οι αντιπρόσωποι είναι ομοτοπικά μονοπάτια και συνεπώς οι ανυψώσεις αυτών με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι επίσης ομοτοπικές και ιδιαιτέρως έχουν τα ίδια άκρα. Ορίζουμε $\Phi([g]) = \varphi_g$.

<u>Η $\Phi$ είναι ομομορφισμός ομάδων</u>: Έστω $[g_1], [g_2] \in N(H)$ και $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$, $\widetilde{g_1 g_2}$ οι ανυψώσεις των $g_1$, $g_2$, $g_1 g_2$, αντίστοιχα, με αρχή το $\tilde{x}_0$. Θα δείξουμε ότι

$$\varphi_{g_1 g_2}(\tilde{x}_0) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(\tilde{x}_0)$$

από όπου προκύπτει ότι $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2(0) = \varphi_{g_1}(\tilde{x}_0) = \tilde{g}_1(1)$. Δηλαδή, ορίζεται το γινόμενο $\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)$ και

$$p \circ \big(\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)\big) = (p \circ \tilde{g}_1) \cdot (p \circ \varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2) = g_1 \cdot (p \circ \tilde{g}_2) = g_1 \cdot g_2.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μονοπάτι $\tilde{g}_1 \cdot (\varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2)$ είναι ανύψωση του μονοπατιού $g_1 \cdot g_2$ με αρχή $\tilde{x}_0$ και ως εκ τούτου ισούται με την ανύψωση $\widetilde{g_1 g_2}$. Έτσι,

$$\varphi_{g_1 g_2}(\tilde{x}_0) = \widetilde{g_1 g_2}(1) = \varphi_{g_1} \circ \tilde{g}_2(1) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(\tilde{x}_0).$$

Ο ομομορφισμός Φ είναι επί: Έστω $\varphi \in G(\widetilde{X})$ και $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_0)$. Τότε

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1).$$

Από την άλλη, αν επιλέξουμε μονοπάτι $\tilde{g}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$, τότε για την προβολή του $g = p \circ \tilde{g}$, έχουμε ότι

$$[g]p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)[g^{-1}] = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι το στοιχείο $[g]$ ανήκει στην κανονικοποιούσα της $H$ και $\Phi([g]) = \varphi$.

$\ker \Phi = H$: Ένα στοιχείο $[g] \in N(H)$ ανήκει στον πυρήνα της Φ αν και μόνο αν ο μετασχηματισμός $\varphi_g$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ισοδύναμα, $\varphi_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ανύψωση $\tilde{g}$ της $g$ με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειά. Συνεπώς, ο πυρήνας της Φ αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία $[g]$ των οποίων οι ανυψώσεις με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειές. Αυτά όμως είναι τα στοιχεία της εικόνας $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ (βλ. Πρόταση 7.1.12).

Η απόδειξη ολοκληρώνεται από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών. □

Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια επικάλυψη και $G(\widetilde{X})$ η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών. Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι συνεκτικός, τότε η φυσική δράση της $G(\widetilde{X})$ στον χώρο $\widetilde{X}$ ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

> Για κάθε $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U$ του $\tilde{x}$, έτσι ώστε για κάθε ζεύγος διαφορετικών μετασχηματισμών $g_1, g_2 \in G(\widetilde{X})$, οι «μεταφορές» $g_1(U)$ και $g_2(U)$ της περιοχής $U$ είναι ξένες, δηλαδή, $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε ως $U$ μια συνιστώσα κάποιας στοιχειώδους περιοχής του $p(\tilde{x})$. Τότε η $U$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο από κάθε νήμα. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$, τότε $g_1\tilde{x}_1 = g_2\tilde{x}_2$, για κάποια $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in U$ και άρα $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$. Έπεται ότι $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ και έτσι $g_1\tilde{x}_1 = g_2\tilde{x}_1$ που συνεπάγεται ότι $g_1 = g_2$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κανονική επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$. Τότε η ομάδα $G(\widetilde{X})$ δρα μεταβατικά σε κάθε νήμα και συνεπώς $p(x) = p(y)$ αν και μόνο αν $\varphi(x) = y$ για κάποιο μετασχηματισμό $\varphi \in G(\widetilde{X})$. Εφόσον η προβολή $p$ είναι απεικόνιση πηλίκο προκύπτει ότι ο χώρος πηλίκο $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ είναι ομοιομορφικός με τον $X$. Το περιεχόμενο της επόμενης πρότασης είναι ότι κανονικές επικαλύψεις προκύπτουν μέσω μιας τέτοιας διαδικασίας.

**Πρόταση 9.3.5.** *Υποθέτουμε ότι μια ομάδα $G$ δρα με ομοιομορφισμούς σε έναν χώρο $Y$, έτσι ώστε η δράση ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα. Δηλαδή, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U$ του $y$, έτσι ώστε $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων $g_1$ και $g_2$ της $G$. Τότε:*

1. *Η απεικόνιση πηλίκο $p : Y \to Y/G$ είναι προβολή κανονικής επικάλυψης.*

2. *Αν ο χώρος $Y$ είναι συνεκτικός, τότε η $G$ είναι η ομάδα μετασχηματισμών της κανονικής επικάλυψης $p : Y \to Y/G$.*

3. *Η ομάδα $G$ είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκο $\pi_1(Y/G)/p_*\big(\pi_1(Y)\big)$, αν ο $Y$ είναι κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Η απεικόνιση $p$ είναι επί και συνεχής ως απεικόνιση πηλίκο. Επιπροσθέτως, η $p$ είναι ανοικτή. Πράγματι, έστω $U$ ανοικτό υποσύνολο του $Y$. Αφού η $p$ είναι απεικόνιση πηλίκο, το $p(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y/G$ αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}\big(p(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y$, το οποίο όμως είναι ανοικτό ως ένωση των ανοικτών $g \cdot U$, $g \in G$.

Για να δείξουμε ότι είναι απεικόνιση επικάλυψης, θεωρούμε τυχαίο $[y] \in Y/G$ και ανοικτή περιοχή $U$ του $y$ τέτοια, ώστε $U \cap g \cdot U = \emptyset$ για κάθε $g \neq 1$. Θα δείξουμε ότι το ανοικτό $p(U)$ είναι στοιχειώδης περιοχή της τροχιάς $[y]$ του $y$. Όπως ήδη έχουμε σημειώσει:

$$p^{-1}\big(p(U)\big) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Από την επιλογή της περιοχής $U$, προκύπτει ότι η παραπάνω ένωση είναι ξένη, εφόσον $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$ αν και μόνο αν $U \cap g_1^{-1} g_2 \cdot U = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός $p : g \cdot U \to p(U)$ είναι $1-1$: αν $p(gx_1) = p(gx_2)$, για κάποια $x_1, x_2 \in U$, τότε τα $gx_1$ και $gx_2$ ανήκουν στην ίδια τροχιά και άρα υπάρχει στοιχείο $g_1 \in G$ με $g_1 g x_1 = g x_2$. Από την επιλογή της περιοχής $U$, έπεται ότι $g_1 g = g$, δηλαδή $g_1 = 1$ και έτσι $g_1 = g_2$. Τελικά, ο περιορισμός $p : g \cdot U \to p(U)$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς, επί, ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό και $1-1$.

Είναι άμεσο ότι $G \subseteq G(Y)$, αφού $p \circ g = p$ για κάθε στοιχείο $g$ της ομάδας $G$. Εφόσον η $G$ δρα μεταβατικά σε κάθε νήμα (δύο στοιχεία ανήκουν στο ίδιο νήμα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια τροχιά) το ίδιο κάνει και η ομάδα $G(Y)$ που την περιέχει, το οποίο σημαίνει ότι η επικάλυψη είναι κανονική.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αν $\varphi \in G(Y)$ και $y \in Y$, τότε, αφού $p \circ \varphi = p$, τα $y$ και $\varphi(y)$ ανήκουν στην ίδια τροχιά. Δηλαδή, υπάρχει $g \in G$ με $gy = \varphi(y)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων, έπεται ότι $g = \varphi$ και έτσι $G = G(Y)$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση. $\square$

# Ασκήσεις

9.1 Αποδείξτε ότι αν $n > 1$, κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων].

9.2 Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

9.3 Ποιος είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης της σφήνας $S^1 \vee S^2$;

9.4 Έστω $Y = [0,1] \times \mathbb{R}$ και $\varphi : Y \to Y$ ο ομοιομορφισμός που δίνεται από τον τύπο $\varphi(x,y) = (1-x, 1+y)$.

(i) Αν συμβολίσουμε με $\langle\varphi\rangle$ την κυκλική υποομάδα της ομάδας ομοιομορφισμών του $Y$ που παράγεται από τον ομοιομορφισμό $\varphi$, τότε η απεικόνιση πηλίκο $p : Y \to Y/\langle\varphi\rangle$ είναι προβολή κανονικής επικάλυψης και $\langle\varphi\rangle \cong \pi_1(Y/\langle\varphi\rangle)$.

(ii) Ποιος είναι ο χώρος επικάλυψης του $Y/\langle\varphi\rangle$ που αντιστοιχεί στην υποομάδα $\langle\varphi^2\rangle$;

(iii) Να δειχθεί ότι ο κύλινδρος $[0,1] \times S^1$ είναι χώρος επικάλυψης της ταινίας του Möbius δείκτου 2 (δηλαδή κάθε νήμα αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία).

9.5 Έστω $G$ η υποομάδα της ομάδας ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τους ομοιομορφισμούς (ισομετρίες μάλιστα) $\varphi$ και $\psi$, όπου $\varphi(x,y) = (1+x, y)$ και $\psi(x,y) = (1-x, 1+y)$.

(i) Να δειχθεί ότι ο χώρος τροχιών $\mathbb{R}^2/G$ είναι ομοιομορφικός με την μποτίλια του Klein $K$.

(ii) Η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $K$ δεν είναι αβελιανή.

(iii) Να δειχθεί ότι η μποτίλια του Klein επικαλύπτεται από τη σπείρα $S^1 \times S^1$, έτσι ώστε κάθε νήμα αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία.

9.6 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης, όπου ο χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός και έστω $x_0 \in X$. Για κάθε στοιχείο $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ και σημείο $\tilde{x}$ στο νήμα $p^{-1}(x_0)$ του $x_0$, θεωρούμε την ανύψωση $\tilde{\gamma}$ με αρχή το $\tilde{x}$.

(i) Αποδείξτε ότι ο τύπος $\tilde{x}\cdot[\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ ορίζει μια δεξιά δράση της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ στο νήμα $p^{-1}(x_0)$.

(ii) Αποδείξτε ότι η παραπάνω δράση είναι μεταβατική αν και μόνο αν ο $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός.

(iii) Ποια είναι η σταθεροποιούσα του σημείου $\tilde{y} \in p^{-1}(x_0)$;

9.7 Έστω $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ μια προβολή επικάλυψης, όπου ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός και ο $X$ κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $p_*\big(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$.

(ii) Για κάθε θηλειά του $X$ στο $x_0$, είτε όλες οι ανυψώσεις της είναι θηλειές ή καμία ανύψωσή της δεν είναι θηλειά.

9.8 Έστω $X = S^1 \vee S^1$ η σφήνα δύο κύκλων και $x_0$ η βάση της σφήνας. Κάθε κύκλος της σφήνας μας δίνει από έναν γεννήτορα της $\pi_1(X, x_0)$. Αν συμβολίσουμε με $\alpha, \beta$ αυτούς τους γεννήτορες, τότε $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\phi : F(\alpha, \beta) \to \mathbb{Z}_3 = \langle g \rangle$ που επάγεται από την απεικόνιση $\alpha \mapsto g$ και $\beta \mapsto g$. Να βρεθεί ο χώρος επικάλυψης του $X$ που αντιστοιχεί στον πυρήνα $\ker \phi$.

9.9 Χρησιμοποιήστε χώρους επικάλυψης για να αποδείξετε ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

9.10 Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ δύο απεικονίσεις επικάλυψης. Αν το νήμα $p_1^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in X$, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$ επιλέξτε $p_1$-στοιχειώδη περιοχή $U$ με αντίστοιχες συνιστώσες $U_i$ καθεμία από τις οποίες να περιέχει $p_2$-στοιχειώδη περιοχή $V_i$. Η τομή $\cap_i p_1(V_i)$ είναι στοιχειώδης περιοχή του $x$ για τη σύνθεση.

9.11 Έστω $X = S^1 \times S^1 \times \cdots$ ο χώρος γινόμενο αριθμησίμου (όχι πεπερασμένου) πλήθους αντιτύπων του $S^1$, $\widetilde{X}_n = \mathbb{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \cdots$, $n \geq 1$, και $p_n : \widetilde{X}_n \to X$ η προβολή επικάλυψης που ορίζεται ως

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_n}, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots).$$

Θεωρούμε την ξένη ένωση $\sqcup_n \widetilde{X}_n$ και τον χώρο γινόμενο $\mathbb{N}_+ \times X$, όπου το $\mathbb{N}_+$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Η απεικόνιση $p : \sqcup \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X$ που ορίζεται με $p|_{\widetilde{X}_n} = (n, p_n) : \widetilde{X}_n \to \{n\} \times X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης η $q : \mathbb{N}_+ \times X \to X$ , όπου $q(m, x) = x$, είναι επίσης απεικόνιση επικάλυψης, ενώ η σύνθεσή τους $\sqcup \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X \to X$ δεν είναι.
Υπόδειξη: κανένα ανοικτό υποσύνολο του $X$ δεν μπορεί να αποτελεί στοιχειώδη περιοχή για τη σύνθεση.

9.12 Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ απεικονίσεις επικάλυψης. Αν ο $X$ είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.
Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$, κάθε περιοχή $U$ με την ιδιότητα η ένθεση της $U$ στο $X$ να επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ αποτελεί στοιχειώδη περιοχή του $x$, της οποίας οι συνιστώσες απολαμβάνουν την ίδια ιδιότητα (δηλαδή η ένθεση επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό).

9.13 Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος. Μια επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$, όπου $\widetilde{X}$ κατά τόξα συνεκτικός, λέγεται *αβελιανή*, αν είναι κανονική, και η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών είναι αβελιανή. Αποδείξτε ότι ο $X$ επιδέχεται μια («καθολική») αβελιανή επικάλυψη η οποία επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή επικάλυψη του $X$ (για αυτό «καθολική») και είναι μοναδική, ως προς ισομορφισμό (επικαλύψεων), με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή να επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή.

9.14 Έστω $H$ διακριτή υποομάδα (δηλαδή είναι διακριτός χώρος με τη σχετική τοπολογία) μιας συνεκτικής και τοπικά κατά τόξα συνεκτικής τοπολογικής ομάδας $G$. Αποδείξτε ότι η δράση της $H$ στην $G$ με πολλαπλασιασμό από δεξιά είναι δράση χώρου επικάλυψης υπό την έννοια ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει περιοχή $U$ του $x$, έτσι ώστε $g = 1$ οποτεδήποτε $U \cap U \cdot g \neq \emptyset$, και ως εκ τούτου η απεικόνιση πηλίκο $G \to G/H$ ορίζει κανονικό χώρο επικάλυψης. Αν επιπλέον η $G$ είναι απλά συνεκτική, τότε $\pi_1(G/H, 1) \cong H$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε περιοχή $V$ της μονάδας με την ιδιότητα $V \cap H = \{1\}$, την

αντίστροφή της εικόνα $\mu^{-1}(V)$ μέσω της συνεχούς $\mu(g,h) = g^{-1}h$ και μια βασική ανοικτή περιοχή $U_1 \times U_2$ του $(1,1)$ εντός της αντίστροφης εικόνας $\mu^{-1}(V)$.

# Βιβλιογραφία

[1] M. J. Greenberg and J. R. Harper. Algebraic Topology: A First Course, Addison-Wesley, 1981.

[2] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[3] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[4] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[5] J. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesiley, 1984.

[6] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.

[7] E. H. Spanier. Algebraic Topology, New York, McGraw–Hill, 1966.

# Κεφάλαιο 10

# Ομολογία

## Περιεχόμενα



Η (ιδιάζουσα) ομολογία ενός τοπολογικού χώρου είναι ένα αλγεβρικό αναλλοίωτο, για την ακρίβεια μια ακολουθία αβελιανών ομάδων, που διευκολύνει την κατανόηση της τοπολογίας των «αντικειμένων ανωτέρας διάστασης» και το οποίο έχει το πλεονέκτημα ότι υπολογίζεται σχετικά εύκολα για μεγάλες κλάσεις τοπολογικών χώρων. Σε αυτό το κεφάλαιο, κατασκευάζουμε τις ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου, αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες, μεταξύ των οποίων είναι και αυτές που είναι γνωστές ως τα αξιώματα των Eilenberg-Steenrod που ικανοποιούνται από μια συνήθη θεωρία ομολογίας και τέλος, δίνουμε διάφορες εφαρμογές.

Όπως είναι αναμενόμενο, σε μια περιορισμένου εύρους εισαγωγή στην ομολογία, δεν θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν αρκετά σημαντικά θέματα μεταξύ των οποίων είναι η αξιωματική θεμελίωση μιας θεωρίας ομολογίας, η ομολογία των πολλαπλοτήτων και η προσανατολισιμότητά τους, ομολογία με συντελεστές, συνομολογία κ.ά., για τα οποία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος του κεφαλαίου.

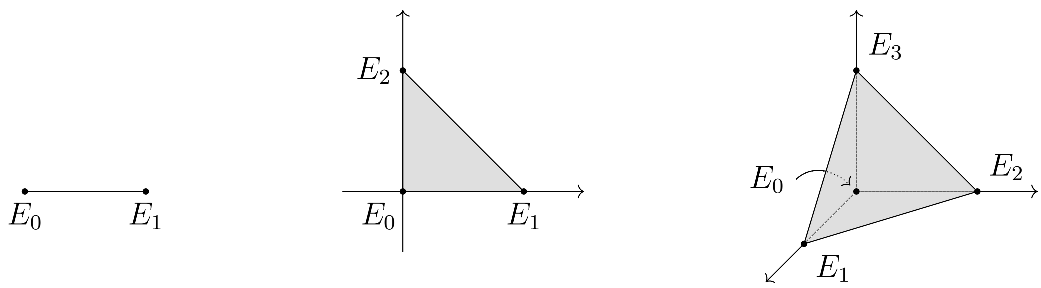
## 10.1 Οι Ομάδες Ιδιάζουσας Ομολογίας

Αρχίζουμε δίνοντας τους ορισμούς κάποιων βασικών εννοιών. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ θεωρούμε το σημείο $E_0 = \mathbf{0}$ και για $1 \leq i \leq n$ το διάνυσμα $E_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει μονάδα στην $i$-θέση και μηδενικά οπουδήποτε αλλού. Το **πρότυπο $n$-πλέγμα** (standard $n$-simplex) είναι το κυρτό υποσύνολο $\Delta_n$ του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα $E_0, \ldots, E_n$. Δηλαδή,

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i E_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \text{ για κάθε } i \text{ και } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Αρκετές φορές διευκολύνει και η χρήση του συμβολισμού $[E_0, E_1, \ldots, E_n]$ για το $\Delta_n$.

Έτσι το $\Delta_0$ είναι ένα σημείο, το $\Delta_1$ το ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1]$, το $\Delta_2$ ένα τρίγωνο (με το εσωτερικό του) και το $\Delta_3$ ένα στερεό τετράεδρο. Μέσω της κανονικής εμφύτευσης του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^k$, όταν $k \geq n$, θεωρούμε το $\Delta_n$ και ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ για κάθε $k \geq n$.




**Σχήμα 10.1:** *Τα πρότυπα πλέγματα $\Delta_1, \Delta_2$ και $\Delta_3$.*

Έστω $x$ ένα σημείο του $\Delta_n$. Τότε $x = \sum_{i=0}^{n} t_i E_i$, όπου $t_i \geq 0$ για κάθε $i$ και $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Εφόσον τα $E_1, \ldots, E_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το άθροισμα των $t_i$ είναι ίσο με 1, έπεται ότι οι συντελεστές $t_i$ είναι πλήρως καθορισμένοι από το $x$. Αυτό σημαίνει ότι το $\Delta_n$ μπορεί να ταυτισθεί με το υποσύνολο $\left\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \text{ για κάθε } i\right\}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Σημειώνουμε, επίσης, ότι το σύνορο του $\Delta_1$ (με την τοπολογική έννοια) αποτελείται από δύο αντίτυπα του $\Delta_0$, το σύνορο του $\Delta_2$ αποτελείται από τρία αντίτυπα του $\Delta_1$ και γενικότερα το σύνορο του $\Delta_n$ αποτελείται από $n+1$ το πλήθος αντίτυπα του $\Delta_{n-1}$. Πιο συγκεκριμένα, αν για $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ συμβολίσουμε με $[E_0, \ldots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \ldots, E_n]$ το κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα $E_j, j \in \{0, \ldots, n\}, j \neq i$, τότε παρατηρούμε ότι το $[E_0, \ldots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \ldots, E_n]$ είναι το υποσύνολο του $\Delta_n$ που αποτελείται από εκείνα τα $x = \sum_{j=0}^{n} t_j E_j \in \Delta_n$ για τα οποία $t_i = 0$ και ότι η απεικόνιση $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})$ δίνει έναν ομοιομορφισμό από το $\Delta_{n-1}$ στο $[E_0, \ldots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \ldots, E_n]$. Τα $n+1$ αντίτυπα του $\Delta_{n-1}$, των οποίων η ένωση μας δίνει το σύνορο του $\Delta_n$, δεν είναι άλλα από τα $[E_0, \ldots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \ldots, E_n]$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

**Παρατήρηση 10.1.1.** Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι κάθε πρότυπο $n$-πλέγμα $\Delta_n$, $n \geq 1$, είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $D^n$ του $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς το σύνορό του είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα $S^{n-1}$.

**Ορισμός 10.1.2.** Ένα **ιδιάζον $n$-πλέγμα** (singular $n$-simplex) σε έναν τοπολογικό χώρο $X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\sigma : \Delta_n \to X$. Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα επί του συνόλου όλων των ιδιαζόντων $n$-πλεγμάτων του $X$ καλείται ομάδα ιδιαζόντων $n$-αλυσίδων του $X$ και συμβολίζεται με $S_n(X)$. Ένα στοιχείο της ομάδας $S_n(X)$ ονομάζεται **ιδιάζουσα $n$-αλυσίδα** (singular $n$-chain) και είναι ένα τυπικό άθροισμα της μορφής

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_m\sigma_m,$$

όπου οι συντελεστές $k_1, k_2 \ldots, k_m$ είναι ακέραιοι αριθμοί και τα $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ ιδιάζοντα $n$-πλέγματα του $X$.

Έτσι ένα ιδιάζον 0-πλέγμα του $X$ είναι απλά ένα σημείο του $X$, ενώ ένα ιδιάζον 1-πλέγμα του $X$ είναι ένα μονοπάτι του $X$. Για κάθε $i = 0, \ldots, n$, συμβολίζουμε με $\Phi_i^n$ τον ομοιομορφισμό που απεικονίζει το πρότυπο πλέγμα $\Delta_{n-1}$ επί του «προσώπου» $[E_0, \ldots, E_{i-1}, \hat{E}_i, E_{i+1}, \ldots, E_n]$ του συνόρου του $\Delta_n$ που βρίσκεται απέναντι από την «κορυφή» $E_i$, δηλαδή την εμφύτευση $\Phi_i^n : \Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n$ που ορίζεται μέσω της απεικόνισης: $(t_0, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i \ldots, t_{n-1})$. Με άλλα λόγια, κάθε κορυφή $E_k$ απεικονίζεται στον εαυτό της, όταν $k \leq i-1$ και στην $E_{k+1}$ όταν $k \geq i$ (και επεκτείνουμε γραμμικά). Διακρίνοντας περιπτώσεις για τους δείκτες $k$ των $t_k$, κάθε φορά προκύπτει εύκολα το ακόλουθο:

**Λήμμα 10.1.3.** *Αν* $0 \leq j < i \leq n+1$, *τότε* $\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n = \Phi_j^{n+1} \circ \Phi_{i-1}^n$.

Στη συνέχεια δίνουμε τον αλγεβρικό ορισμό του συνόρου ενός πλέγματος.

**Ορισμός 10.1.4.** Έστω $n \geq 1$ και $\sigma : \Delta_n \to X$ ένα ιδιάζον $n$-πλέγμα σε έναν τοπολογικό χώρο $X$. Το **σύνορο** του $\sigma$, συμβολίζουμε με $\partial_n \sigma$, είναι η ιδιάζουσα $(n-1)$-αλυσίδα που ορίζεται ως εξής:

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \Phi_i^n).$$

Συμβολίζουμε, επίσης, με $\partial_n^X \sigma$ το σύνορο του $\sigma$, όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον χώρο $X$.

Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε ατύπως το περιεχόμενο του προηγούμενου ορισμού λέγοντας ότι το σύνορο του $\sigma$ είναι η ιδιάζουσα $(n-1)$-αλυσίδα που δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ιδιαζόντων $i$-«προσώπων» του, $\sigma \circ \Phi_i^n$, όπου το πρόσημο $(-1)^i$ υποδηλώνει ότι το $i$-«πρόσωπο» $\sigma \circ \Phi_i^n$ φέρει τον επαγόμενο από το $\sigma$ «προσανατολισμό».

Εφόσον η ομάδα $S_n(X)$ είναι ελεύθερη αβελιανή με βάση τα ιδιάζοντα $n$-πλέγματα του $X$, επεκτείνοντας την απεικόνιση του συνόρου, λαμβάνουμε έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X),\ n \geq 1,$$

τον λεγόμενο **συνοριακό ομομορφισμό**, τον οποίο όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα συμβολίζουμε απλά με $\partial$ παραλείποντας τον δείκτη $n$. Το σύνορο μιας ιδιάζουσας 0-αλυσίδας ορίζεται να είναι μηδέν. Συνήθως, τα στοιχεία της εικόνας $\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ αναφέρονται ως **σύνορα**, ενώ τα στοιχεία του πυρήνα $\mathrm{Ker}\partial_n$ ως **κύκλοι**.

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται η πλέον ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συνοριακών ομομορφισμών:

**Πρόταση 10.1.5.** *Για κάθε $n \geq 0$ και κάθε ιδιάζουσα αλυσίδα $\gamma \in S_{n+1}(X)$, ισχύει ότι $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\gamma) = 0$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον η ομάδα $S_{n+1}(X)$ παράγεται από τα ιδιάζοντα $(n+1)$-πλέγματα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = 0$, για το τυχαίο ιδιάζον πλέγμα $\sigma : \Delta_{n+1} \to X$ του $X$.

$$\begin{aligned}\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \Big( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ \Phi_i^{n+1} \Big) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 10.1.3 στο δεύτερο άθροισμα προκύπτει

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_j^{n+1} \circ \Phi_{i-1}^n).$$

Θέτουμε $k = j$ και $\lambda = i-1$ στο δεύτερο άθροισμα. Τότε $j < i \Leftrightarrow k \leq \lambda, i+j = k+\lambda+1$ και με το νέο συμβολισμό έχουμε

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \circ (\Phi_i^{n+1} \circ \Phi_j^n) + \sum_{k \leq \lambda} (-1)^{k+\lambda+1} \sigma \circ (\Phi_k^{n+1} \circ \Phi_\lambda^n) = 0,$$

γιατί οι όροι των παραπάνω δύο αθροισμάτων εμφανίζονται ανά δύο με αντίθετο πρόσημο και διαγράφονται. □

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η εικόνα $\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ είναι υπομάδα του πυρήνα $\mathrm{Ker}\partial_n$ και έτσι έχει νόημα ο ορισμός που ακολουθεί.

**Ορισμός 10.1.6.** Η $n$-οστή **ομάδα ιδιάζουσας ομολογίας** ενός τοπολογικού χώρου $X$ είναι η ομάδα πηλίκο

$$H_n(X) = \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}.$$

Για έναν $n$-κύκλο $\gamma \in \mathrm{Ker}\partial_n$, η αντίστοιχη κλάση $\gamma + \mathrm{Im}\partial_{n+1} \in H_n(X)$ συμβολίζεται με $[\gamma]$ και λέγεται **κλάση ομολογίας** του κύκλου $\gamma$. Δύο κύκλοι που ανήκουν στην ίδια κλάση ομολογίας (δηλαδή, η διαφορά τους είναι σύνορο) λέγονται **ομόλογοι**.

**Παρατήρηση 10.1.7.** Η ομάδα $H_n(X)$ είναι 0 αν και μόνο αν κάθε $n$-κύκλος είναι το σύνορο κάποιας $n+1$-ιδιάζουσας αλυσίδας, το οποίο διασθητικά σημαίνει ότι δεν υπάρχουν $n$-διάστατες «τρύπες» στον χώρο $X$.

## Επαγόμενοι ομομορφισμοί

Αν η $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων, τότε ορίζεται ο ομομορφισμός $f_\sharp^n : S_n(X) \to S_n(Y)$ ο οποίος, πάνω στους γεννήτορες $\sigma \in S_n(X)$, δίνεται από τη σύνθεση

$$f_\sharp^n(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_\sharp^{n-1}\big(\partial_n^X(\sigma)\big) = f_\sharp^n\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \Phi_i^n\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \Phi_i^n = \partial_n^X\big(f_\sharp(\sigma)\big).$$

Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "f_\sharp^n"] \arrow[d, "\partial_n^X"'] & S_n(Y) \arrow[d, "\partial_n^Y"] \\ S_{n-1}(X) \arrow[r, "f_\sharp^{n-1}"] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd} \tag{10.1}$$

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται άμεσα ότι η απεικόνιση $f_\sharp^n$ απεικονίζει σύνορα σε σύνορα και κύκλους σε κύκλους, για κάθε $n$. Συνεπώς η $f$ επάγει για κάθε $n$, μέσω της $f_\sharp^n$, έναν ομομορφισμό

$$H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y) \ \text{ με τύπο } H_n(f)\big((\gamma + \mathrm{Im}\partial_{n+1}^X)\big) = f_\sharp^n(\gamma) + \mathrm{Im}\partial_{n+1}^Y,$$

ή πιο απλά $H_n(f)([\gamma]) = [f_\sharp^n(\gamma)]$, $\gamma \in \mathrm{Ker}\partial_n^X$. Ο ομομορφισμός $H_n(f)$ αναφέρεται ως ο **επαγόμενος από την** $f$ **ομομορφισμός** και συμβολίζεται επίσης πιο απλά με $f_*$, όταν είναι φανερό ποιο είναι το πεδίο ορισμού.

**Πρόταση 10.1.8.** *Έστω $X, Y$ και $Z$ τοπολογικοί χώροι.*

1. *Η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X : X \to X$ επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό στην $H_n(X)$, για κάθε $n \geq 0$, δηλ. $H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$.*

2. *Αν οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Z)$, για κάθε $n \geq 0$.*

*Απόδειξη.* Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

**Παρατήρηση 10.1.9.** Στην κατηγορική γλώσσα, η προηγούμενη πρόταση λέει ακριβώς ότι έχουμε μια ακολουθία $\big(H_n(-)\big)_{n\geq 0}$ συναρτητών από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και συνεχών απεικονίσεων στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών.

Στο επόμενο πόρισμα καταγράφεται μια ειδική, αλλά πολύ σημαντική, περίπτωση της προηγούμενης πρότασης:

**Πόρισμα 10.1.10.** *Αν η $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός, τότε η $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \geq 0$. Δηλαδή, ομοιομορφικοί χώροι έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας.*

## Οι πρώτοι υπολογισμοί

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ο υπολογισμός των ομάδων ομολογίας ενός χώρου ανάγεται στον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας των κατά τόξα συνεκτικών συνιστωσών του χώρου.

**Λήμμα 10.1.11.** *Έστω $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου $X$. Τότε για κάθε $n \geq 0$,*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda).$$

*Απόδειξη.* Ένα ιδιάζον πλέγμα έχει κατά τόξα συνεκτική εικόνα και ως εκ τούτου μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιάζον πλέγμα μιας κατά τόξα συνεκτικής συνιστώσας $X_\lambda$. Συνεπώς, ομαδοποιώντας τα ιδιάζοντα πλέγματα που ανήκουν στην ίδια συνιστώσα προκύπτει ότι οι ενθέσεις των $X_\lambda$ στον $X$ επάγουν ισομορφισμό

$$S_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_n(X_\lambda).$$

Λόγω της γραμμικότητας των συνοριακών ομομορφισμών, έχουμε ότι αν $\gamma \in S_n(X)$ και $\gamma = \sum_\lambda \gamma_\lambda$, όπου $\gamma_\lambda \in S_n(X_\lambda)$, η ανάλυση της αλυσίδας $\gamma$ (ως πεπερασμένο άθροισμα σύμφωνα με τον προηγούμενο ισομορφισμό), τότε $\partial(\gamma) = 0$ αν και μόνο αν $\partial(\gamma_\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Έπεται ότι η απεικόνιση

$$\varphi : H_n(X) \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda)$$

με $\varphi([\gamma]) = \sum_\lambda [\gamma_\lambda]$ είναι καλά ορισμένη και ισομορφισμός με αντίστροφη απεικόνιση $\sum_\lambda [\gamma_\lambda] \mapsto [\sum_\lambda \gamma_\lambda]$. □

**Πρόταση 10.1.12.** *Αν ο $X$ είναι ένας μη-κενός και κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Άρα, αν ο $X$ δεν είναι απαραιτήτως κατά τόξα συνεκτικός, η ομάδα $H_0(X)$ είναι ένα ευθύ άθροισμα αντιτύπων της άπειρης κυκλικής $\mathbb{Z}$, ένα αντίτυπο για κάθε κατά τόξα συνεκτική συνιστώσα του $X$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ με $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$, όπου οι ακέραιοι $n_i$ είναι μη-μηδενικοί για πεπερασμένα το πλήθος $i$ και $\sigma_i$ ιδιάζον $0$-πλέγμα για κάθε $i$. Η απεικόνιση $\varepsilon$ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, αφού προκύπτει ως γραμμική επέκταση της απεικόνισης $\sigma_i \mapsto 1$, η οποία απεικονίζει κάθε ιδιάζον $0$-πλέγμα στο 1. Ο ομομορφισμός $\varepsilon$ είναι επί. Πράγματι, αφού ο χώρος είναι μη-κενός, επιλέγουμε $x \in X$, θεωρούμε το ιδιάζον 0-πλέγμα $\sigma : \Delta_0 \to x \in X$ και παρατηρούμε ότι $\varepsilon(n\sigma) = n$.

Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Im}\partial_1 = \mathrm{Ker}\varepsilon$. Το συμπέρασμα τότε προκύπτει από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, αφού $\varepsilon$ επί και $H_0(X) = \mathrm{Ker}\partial_0/\mathrm{Im}\partial_1 = S_0(X)/\mathrm{Im}\partial_1$.

Για κάθε (ιδιάζον) 1-πλέγμα $\sigma : \Delta_1 \to X$ έχουμε $\varepsilon(\partial\sigma) = \varepsilon\big(\sigma(1)-\sigma(0)\big) = 1-1 = 0$ και άρα $\mathrm{Im}\partial_1 \subseteq \mathrm{Ker}\varepsilon$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $\sum_i n_i\sigma_i \in \mathrm{Ker}\varepsilon$. Τότε οι εικόνες των $\sigma_i$ είναι τα σημεία $\sigma_i(E_0)$ και $\sum_i n_i = 0$ (υπενθυμίζουμε ότι στα αθροίσματα που αναφερόμαστε, από τον ορισμό των αντιστοίχων ομάδων που ανήκουν, οι συντελεστές $n_i$ είναι σχεδόν όλοι μηδέν). Για κάθε $i$ επιλέγουμε μονοπάτι $\tau_i : [0,1] = \Delta_1 \to X$ από ένα προεπιλεγμένο σημείο αναφοράς $x_0 \in X$ στο $\sigma_i(E_0)$. Αν με $\sigma_0$ συμβολίσουμε το 0-πλέγμα με εικόνα το $x_0$, τότε $\partial(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_0$ και

$$\partial\big(\sum_i n_i\tau_i\big) = \sum_i n_i\partial(\tau_i) = \sum_i n_i(\sigma_i - \sigma_0) = \sum_i n_i\sigma_i - \Big(\sum_i n_i\Big)\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i.$$

Δηλαδή, $\mathrm{Ker}\ \varepsilon \subseteq \mathrm{Im}\partial_1$. □

**Πρόταση 10.1.13** (Αξίωμα της διαστάσεως). *Αν ο χώρος $X$ είναι μονοσύνολο, τότε*

$$H_n(X) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Εφόσον ο $X$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $X = \{x_0\}$, για κάθε $n \geq 0$ υπάρχει μόνο ένα $n$-πλέγμα το $\sigma_n : \Delta_n \to X$ με $\sigma_n(\Delta_n) = x_0$. Άρα $S_n(X) = \mathbb{Z} = \langle\sigma_n\rangle$ για κάθε $n \geq 0$. Για το σύνορο του $\sigma_n$ έχουμε:

$$\partial_n\sigma_n = \sum_0^n (-1)^i\sigma_n \circ \Phi_i^n = \sum_0^n (-1)^i\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \sigma_{n-1}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \neq 0. \end{cases}$$

Αν ο $n$ είναι περιττός, τότε $\partial_n = 0$, ενώ αν ο $n$ είναι άρτιος θετικός ο $\partial_n$ είναι ισομορφισμός (απεικονίζει τον γεννήτορα στον γεννήτορα). Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $H_n(X) = \mathrm{Ker}\ \partial_n/\mathrm{Im}\ \partial_{n+1} = 0$, για κάθε $n > 0$. Για $n = 0$ έχουμε το συμπέρασμα από την προηγούμενη πρόταση. □

## 10.2 Η Μακρά Ακριβής Ακολουθία του Ζεύγους $(X, A)$

Αρχίζουμε δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς. Μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

λέγεται (μακρά) **ακριβής** αν Im $a_{n+1} =$ Ker $a_n$ για κάθε $n$. Μια **βραχεία ακριβής ακολουθία** (β.α.α.) είναι μια ακριβής ακολουθία πέντε όρων της μορφής

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \Gamma \longrightarrow 0\ .$$

Η ακρίβεια συνεπάγεται ότι ο $\alpha$ είναι μονομορφισμός, ο $\beta$ επιμορφισμός και $\Gamma \cong B/\text{Im } A$, Im $A \cong A$. Ένα **αλυσωτό σύμπλεγμα** (chain complex) είναι μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών

$$A_* :\ \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial^A_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial^A_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial^A_{n-1}} \cdots ,$$

έτσι ώστε $\partial^A_n \circ \partial^A_{n+1} = 0$ για κάθε $n$, ισοδύναμα Im $\partial^A_{n+1} \subseteq$ Ker $\partial^A_n$. Στη συνέχεια, επίσης και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα συμβολίζουμε τους ομομορφισμούς $\partial^A_n$ απλά με $\partial_n$. Η $n$-οστή **ομάδα ομολογίας** του συμπλέματος $A_*$ ορίζεται ως

$$H_n(A_*) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Αν $a \in$ Ker $\partial_n$, συμβολίζουμε με $[a] = a +$ Im $\partial_{n+1}$ την κλάση ομολογίας του $a$. Παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα $A_*$ είναι ακριβές αν και μόνο αν $H_n(A_*) = 0$ για κάθε $n$. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι οι ομάδες ομολογίας σε κάθε θέση αποτελούν ένα μέτρο για το πόσο «απέχει» ένα σύμπλεγμα από το να είναι ακριβές.

**Παράδειγμα 10.2.1.** Οι ομάδες ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου $X$ είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος

$$S_*(X) :\ \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

**Παράδειγμα 10.2.2.** (Ανηγμένη ομολογία) Οι **ομάδες ανηγμένης ομολογίας** $\widetilde{H}_n(X)$ ενός τοπολογικού χώρου $X$ είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

όπου $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$. Έχουμε ήδη δει, στην απόδειξη της Πρότασης 10.1.12, ότι $\mathrm{Im}\,\partial_1 \subseteq \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ και έτσι η παραπάνω ακολουθία αποτελεί πράγματι σύμπλεγμα. Είδαμε επίσης ότι ο ομομορφισμός $\varepsilon$ είναι επί, αν $X \neq \emptyset$. Συνεπώς, ο $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ επάγει επιμορφισμό

$$\tilde{\varepsilon} : H_0(X) = S_0(X)/\mathrm{Im}\,\partial_1 \to \mathbb{Z} \text{ με τύπο } \tilde{\varepsilon}([\gamma]) = \varepsilon(\gamma)$$

και πυρήνα $\mathrm{Ker}\,\tilde{\varepsilon} = \mathrm{Ker}\,\varepsilon/\mathrm{Im}\,\partial_1 = \widetilde{H}_0(X)$. Έχουμε δείξει ότι $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\partial_1$, αν ο $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, συνεπώς $\widetilde{H}_0(X) = 0$, αν $X$ κατά τόξα συνεκτικός. Γενικά, από το γεγονός ότι ο $\tilde{\varepsilon}$ είναι επιμορφισμός από μια αβελιανή ομάδα σε μια ελεύθερη αβελιανή (άπειρη κυκλική για την ακρίβεια), προκύπτει (βλ. Άσκηση 2) ότι $H_0(X) \cong \mathrm{Ker}\,\tilde{\varepsilon} \oplus \mathbb{Z}$. Άρα $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ και $H_n(X) = \widetilde{H}_n(X)$, αν $n > 0$.

Μια **αλυσωτή απεικόνιση** ή **μορφισμός συμπλεγμάτων** $F : A_* \to B_*$ μεταξύ δύο συμπλεγμάτων $A_*$ και $B_*$ είναι μια οικογένεια ομομορφισμών $(f_n)_n$ με $f_n : A_n \to B_n$ για κάθε $n$, έτσι ώστε να είναι μεταθετικό καθένα από τα τετράγωνα στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial^A_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "\partial^A_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[r, "\partial^A_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial^B_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "\partial^B_n"'] & B_{n-1} \arrow[r, "\partial^B_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή $\partial^B_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial^A_n$, για κάθε $n$.

**Παράδειγμα 10.2.3.** Οι ομομορφισμοί $f^n_\sharp : S_n(X) \to S_n(Y)$ που έχουμε κατασκευάσει από μια συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων ορίζουν μια αλυσωτή απεικόνιση μεταξύ των συμπλεγμάτων $S_*(X)$ και $S_*(Y)$ (βλ. διάγραμμα 10.1).

Από τη μεταθετικότητα των παραπάνω τετραγώνων προκύπτει ότι $f_n(\mathrm{Ker}\,\partial^A_n) \subseteq \mathrm{Ker}\,\partial^B_n$ και $f_n(\mathrm{Im}\,\partial^A_{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}\,\partial^B_{n+1}$. Ως εκ τούτου, κάθε $f_n$ επάγει έναν ομομορφισμό $H_n(f)$ στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας

$$H_n(f) : H_n(A_*) \to H_n(B_*), \quad [a] \mapsto [f_n(a)],$$

όπου $a \in \mathrm{Ker}\,\partial^A_n$. Θα συμβολίζουμε, επίσης, με $f_*$ τον ομομορφισμό $H_n(f)$ χωρίς να υποδηλώνουμε την εξάρτηση από τον δείκτη $n$, όταν είναι φανερό ποιος είναι ο δείκτης.

Η ακόλουθη πρόταση έπεται άμεσα από τους σχετικούς ορισμούς:

**Πρόταση 10.2.4.** *Έστω $F = (f_n) : A_* \to B_*$ και $G = (g_n) : B_* \to \Gamma_*$ δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων και $Id_{A_*} : A_* \to A_*$ ο ταυτοτικός μορφισμός. Τότε:*

1. $H_n(Id_{A_*}) = Id_{H_n(A_*)}$.
2. $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

## Μακρά Ακριβής Ακολουθία

Μια **βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων** είναι μια ακολουθία συμπλεγμάτων και μορφισμών συμπλεγμάτων $\alpha = (\alpha_n)$ και $\beta = (\beta_n)$ της μορφής

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\beta} \Gamma_* \longrightarrow 0 \,,$$

έτσι ώστε για κάθε $n$ η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} \Gamma_n \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Δηλαδή έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές της μορφής

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial^A_{n+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial^B_{n+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial^\Gamma_{n+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, "\partial^A_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d, "\partial^B_{n+1}"] & \Gamma_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^\Gamma_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\partial^A_n"] & B_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "\partial^B_n"] & \Gamma_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial^\Gamma_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\partial^A_{n-1}"] & B_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "\partial^B_{n-1}"] & \Gamma_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^\Gamma_{n-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd} \tag{10.2}$$

**Πρόταση 10.2.5** (Μακρά ακριβής ακολουθία στην ομολογία)**.** *Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων*

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\beta} \Gamma_* \longrightarrow 0$$

*επάγει μια μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(B_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(\Gamma_*) \xrightarrow{\partial_*^n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{H_{n-1}(\alpha)} H_{n-1}(B_*) \longrightarrow \cdots,$$

*όπου $\partial_*^n$ κατάλληλος ομομορφισμός για κάθε $n$, ο οποίος είναι γνωστός ως ο συνδετικός (connecting) ομομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, στη συνέχεια θα συμβολίζουμε απλά με $\partial_*$, $\alpha_*$ και $\beta_*$ τους ομομορφισμούς $\partial_*^n$, $H_n(\alpha)$ και $H_n(\beta)$, αντίστοιχα, παραλείποντας τους δείκτες και ομοίως για καθέναν από τους ομομορφισμούς $\partial_n^A$, $\partial_n^B$, $\partial_n^\Gamma$ θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\partial_n$. Επίσης, θα κάνουμε συνεχή χρήση της μεταθετικότητας των τετραγώνων του διαγράμματος, 10.2 χωρίς να αναφερόμαστε σε αυτό.

- Ορισμός της $\partial_* : H_n(\Gamma_*) \to H_{n-1}(A_*)$:

  Έστω $[\gamma] = \gamma + \mathrm{Im}\, \partial_{n+1} \in H_n(\Gamma_*)$, όπου $\gamma \in \Gamma_n$ και $\partial_n(\gamma) = 0$. Εφόσον η $\beta_n$ είναι επί, έχουμε ότι $\gamma = \beta_n(\beta)$ για κάποιο $\beta \in B_n$. Τότε $0 = \partial_n(\gamma) = \partial_n \circ \beta_n(\beta) = \beta_{n-1} \circ \partial_n(\beta)$ και έτσι $\partial_n(\beta) \in \mathrm{Ker}\, \beta_{n-1} = \mathrm{Im}\, \alpha_{n-1}$. Δηλαδή, $\partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$ για κάποιο $\alpha \in A_{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha_{n-2} \circ \partial_{n-1}(\alpha) = \partial_{n-1} \circ \alpha_{n-1}(\alpha) = \partial_{n-1} \circ \partial_n(\beta) = 0$ και αφού η $\alpha_{n-2}$ είναι $1-1$, έπεται ότι $\partial_{n-1}(\alpha) = 0$. Άρα $\alpha \in \mathrm{Ker}\, \partial_{n-1}$ και $[\alpha] \in H_{n-1}(A_*)$. Ορίζουμε $\partial_*[\gamma] = [\alpha]$.

- Η απεικόνιση $\partial_*$ είναι καλά ορισμένη:

  Αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός της $\partial_*$, δηλαδή η κλάση $[\alpha]$, δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου της κλάσεως $[\gamma]$. Έστω $\gamma, \gamma' \in \Gamma_n$ με $[\gamma] = [\gamma']$, ισοδύναμα $\gamma - \gamma' \in \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$. Με τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου έχουμε $\gamma = \beta_n(\beta), \partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$ και $\gamma' = \beta_n(\beta'), \partial_n(\beta') = \alpha_{n-1}(\alpha')$. Έτσι $\gamma - \gamma' = \partial_{n+1}(\gamma'')$ για κάποιο $\gamma'' \in \Gamma_{n+1}$ και, αφού η $\beta_{n+1}$ είναι επί, $\gamma'' = \beta_{n+1}(\beta'')$ για κάποιο $\beta'' \in B_{n+1}$. Παρατηρούμε ότι

  $$\beta_n(\beta - \beta') = \gamma - \gamma' = \partial_{n+1}(\gamma'') = \partial_{n+1}\beta_{n+1}(\beta'') = \beta_n \partial_{n+1}(\beta''),$$

  από όπου έπεται ότι $\beta - \beta' - \partial_{n+1}(\beta'') \in \mathrm{Ker}\, \beta_n = \mathrm{Im}\, \alpha_n$, δηλαδή, $\beta - \beta' - \partial_{n+1}(\beta'') = \alpha_n(\alpha'')$, για κάποιο $\alpha'' \in A_n$. Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό $\partial_n$ στην προηγούμενη ισότητα και χρησιμοποιώντας τις αρχικές σχέσεις, προκύπτει ότι $\alpha_{n-1}(\alpha - \alpha') = \partial_n \beta - \partial_n \beta' = \partial_n \alpha_n(\alpha'') = \alpha_{n-1}\partial_n(\alpha'')$. Αφού η $\alpha_{n-1}$ είναι $1-1$, έχουμε ότι $\alpha - \alpha' = \partial_n(\alpha'') \in \mathrm{Im}\, \partial_n$, ισοδύναμα, $[\alpha] = [\alpha']$. Σημειώνουμε ότι από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει πως ο ορισμός της $\partial_*$ δεν εξαρτάται ούτε από την επιλογή του $\beta$.

- Η απεικόνιση $\partial_*$ είναι ομομορφισμός:

  Έστω $\gamma, \gamma_1 \in \Gamma_n$ και $\partial_*[\gamma] = [\alpha], \partial_*[\gamma_1] = [\alpha_1]$. Τότε, υιοθετώντας τον συμβολισμό του ορισμού, έχουμε $\gamma = \beta_n(\beta), \partial_n(\beta) = \alpha_{n-1}(\alpha)$ και $\gamma_1 = \beta_n(\beta_1), \partial_n(\beta_1) = \alpha_{n-1}(\alpha_1)$. Συνεπώς $\gamma + \gamma_1 = \beta_n(\beta + \beta_1)$ και $\partial_n(\beta + \beta_1) = \alpha_{n-1}(\alpha + \alpha_1)$. Άρα $\partial_*[\gamma + \gamma_1] = [\alpha + \alpha_1] = [\alpha] + [\alpha_1] = \partial_*[\gamma] + \partial_*[\gamma_1]$.

- Ακρίβεια στη θέση $H_n(A_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(B_*) \xrightarrow{\beta_*} H_n(\Gamma_*)$ :

  Εφόσον $\beta_n \circ \alpha_n = 0$, έπεται ότι $\beta_* \circ \alpha_* = 0$ και προκύπτει άμεσα η σχέση $\text{Im}\ \alpha_* \subseteq \text{Ker}\ \beta_*$. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι $\text{Ker}\ \beta_* \subseteq \text{Im}\ \alpha_*$. Έστω $[\beta] \in H_n(B_*)$ με $[\beta] \in \text{Ker}\ \beta_*$. Τότε $0 = \beta_*[\beta] = [\beta_n(\beta)] \in H_n(\Gamma_*)$ που σημαίνει ότι $\beta_n(\beta) \in \text{Im}\ \partial_{n+1}$ και έτσι $\beta_n(\beta) = \partial_{n+1}(\gamma)$ για κάποιο $\gamma \in \Gamma_{n+1}$. Εφόσον η $\beta_{n+1}$ είναι επί, υπάρχει $\beta' \in B_{n+1}$ με $\gamma = \beta_{n+1}(\beta')$ και $\beta_n(\beta - \partial_{n+1}\beta') = \beta_n(\beta) - \beta_n\partial_{n+1}(\beta') = \beta_n(\beta) - \partial_{n+1}\beta_{n+1}(\beta') = \beta_n(\beta) - \partial_{n+1}(\gamma) = 0$. Δηλαδή $\beta - \partial_{n+1}\beta' \in \text{Ker}\ \beta_n = \text{Im}\ \alpha_n$. Έπεται ότι $\beta - \partial_{n+1}\beta' = \alpha_n(\alpha)$, όπου $\alpha \in A_n$ και $\partial_n(\alpha) = 0$. Πράγματι, εφόσον $[\beta] \in H_n(B_*)$, έχουμε ότι $\partial_n\beta = 0$ και άρα $\alpha_{n-1}\partial_n(\alpha) = \partial_n\alpha_n(\alpha) = \partial_n(\beta - \partial_{n+1}\beta') = \partial_n\beta - \partial_n\partial_{n+1}\beta' = 0$. Η υπόθεση ότι η $\alpha_{n-1}$ είναι $1-1$ δίνει ότι $\partial_n(\alpha) = 0$. Τελικά, $[\alpha] \in H_n(A_*)$ και $\beta - \alpha_n(\alpha) = \partial_{n+1}(\beta') \in \text{Im}\ \partial_{n+1}$. Συνεπώς, $[\beta] = [\alpha_n(\alpha)] = \alpha_*([\alpha]) \in \text{Im}\ \alpha_*$.

- Ακρίβεια στη θέση $H_n(B_*) \xrightarrow{\beta_*} H_n(\Gamma_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\alpha_*)$ :

  Έστω $[\gamma] \in H_n(\Gamma_*)$ και $\partial_*[\gamma] = [\alpha]$. Από τον ορισμό της $\partial_*$ το στοιχείο $\alpha \in A_{n-1}$ καθορίζεται από τις σχέσεις $\gamma = \beta_n(\beta)$ και $\partial_n\beta = \alpha_{n-1}(\alpha)$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $\text{Ker}\ \partial_* \subseteq \text{Im}\ \beta_*$. Αν το στοιχείο $[\gamma]$ ανήκει στον πυρήνα $\text{Ker}\ \partial_*$ της $\partial_*$, τότε $[\alpha] = 0$, άρα $\alpha \in \text{Im}\ \partial_n$ και υπάρχει $\alpha' \in A_n$ με $\alpha = \partial_n\alpha'$. Παρατηρούμε ότι $\partial_n(\beta - \alpha_n(\alpha')) = \partial_n\beta - \partial_n\alpha_n\alpha' = \partial_n\beta - \alpha_{n-1}\partial_n\alpha' = \partial_n\beta - \alpha_{n-1}(\alpha) = 0$. Δηλαδή $\beta - \alpha_n(\alpha')$ κύκλος και $\beta_n(\beta - \alpha_n(\alpha')) = \beta_n(\beta) - \beta_n\alpha_n(\alpha') = \beta_n(\beta) = \gamma$. Έπεται ότι $[\gamma] \in \text{Im}\ \beta_*$ και ο εγκλεισμός $\text{Ker}\ \partial_* \subseteq \text{Im}\ \beta_*$ έχει αποδειχθεί.

  Για να αποδείξουμε την αντίστροφη σχέση του περιέχεσθαι, δηλ. $\text{Im}\ \beta_* \subseteq \text{Ker}\ \partial_*$, υποθέτουμε ότι $[\gamma] \in \text{Im}\ \beta_*$. Τότε $[\gamma] = \beta_*[\beta] = [\beta_n(\beta)]$, όπου $[\beta] \in H_n(B_*)$. Αφού το $[\beta]$ είναι κύκλος έχουμε ότι $\partial_n\beta = 0$ και έτσι $\alpha = 0$, αφού η $\alpha_{n-1}$ είναι $1-1$. Άρα $\partial_*[\gamma] = [\alpha] = 0$, δηλαδή $[\gamma] \in \text{Ker}\ \partial_*$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

## Σχετική Ομολογία

Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $A$ ένας υπόχωρος του $X$. Συμβολίζουμε με $S_n(A)$ τους γραμμικούς συνδυασμούς των (ιδιαζόντων) $n$-πλεγμάτων του $X$ των οποίων η εικόνα περιέχεται στο $A$, δηλαδή $S_n(A)$ είναι οι ιδιάζουσες $n$-αλυσίδες στον υπόχωρο $A$. Είναι άμεσο ότι $S_n(A) \leq S_n(X)$. Ορίζουμε ως $S_n(X, A)$ την ομάδα πηλίκο $S_n(X)/S_n(A)$. Εφόσον η συνοριακή απεικόνιση $\partial : S_n(X) \to S_n(A)$ απεικονίζει την υποομάδα $S_n(A)$ στην $S_{n-1}(A)$, επάγεται ομομορφισμός, για τον οποίο διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό, $\partial : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$ με τύπο $\partial(\gamma + S_n(A)) = \partial\gamma + S_{n-1}(A)$, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\partial \circ \partial = 0$. Δηλαδή, έχουμε ένα αλυσωτό σύμπλεγμα

$$S_*(X, A) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

**Ορισμός 10.2.6.** Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Οι **ομάδες σχετικής ομολογίας** $H_n(X, A)$ του ζεύγους $(X, A)$ είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος $S_*(X, A)$. Δηλαδή $H_n(X, A) = H_n\big(S_*(X, A)\big)$.

Από τον τρόπο ορισμού των συνοριακών απεικονίσεων, το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $n$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] & S_n(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"'] & S_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(A) \arrow[r, "i"] & S_{n-1}(X) \arrow[r, "j"] & S_{n-1}(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου $i$ είναι η ένθεση της υποομάδας $S_n(A)$ στην $S_n(X)$ και $j : S_n(X) \to S_n(X, A)$ ο φυσικός επιμορφισμός στην αντίστοιχη ομάδα πηλίκο. Συνεπώς, έχουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i_*} S_*(X) \xrightarrow{j_*} S_*(X, A) \longrightarrow 0\ .$$

Η **μακρά ακριβής ακολουθία του ζεύγους** $(X, A)$ είναι η μακρά ακριβής ακολουθία που αντιστοιχεί στην προηγούμενη βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων, σύμφωνα με την Πρόταση 10.2.5. Πιο συγκεκριμένα, είναι η παρακάτω μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots ,$$

η οποία εκφράζει με σαφήνεια την ιδέα ότι οι ομάδες $H_n(X, A)$ αποτελούν ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ των ομάδων $H_n(X)$ και $H_n(A)$, εφόσον από την παραπάνω μακρά ακριβή ακολουθία προκύπτει ότι $H_n(X, A) = 0$ αν και μόνο αν η ένθεση του $A$ στον $X$ επάγει ισομορφισμούς μεταξύ των ομάδων ομολογίας $H_n(X)$ και $H_n(A)$ για κάθε $n$.

**Παρατήρηση 10.2.7.** Στην περίπτωση της μακράς ακριβούς ακολουθίας του ζεύγους $(X, A)$ μπορούμε να «δούμε» πιο εύκολα τον τύπο του συνδετικού ομομορφισμού $\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$: Αν $[\gamma + S_n(A)] = [\gamma] \in H_n(X, A)$, τότε (ως κύκλος) $\partial\big(\gamma + S_n(A)\big) = \partial\gamma + S_{n-1}(A) = 0$ και έτσι $\partial\gamma \in S_{n-1}(A)$. Εφόσον $\partial \circ \partial = 0$, έπεται ότι $[\partial\gamma] \in H_{n-1}(A)$ και από τον ορισμό της $\partial_*$ στην Πρόταση 10.2.5 έχουμε ότι $\partial_*[\gamma] = [\partial\gamma]$. Αυτή η έκφραση δικαιολογεί και τη χρήση του συγκεκριμένου συμβολισμού για τον συνδετικό ομομορφισμό.

## 10.3 Η Ομολογία είναι Ομοτοπικό Αναλλοίωτο

**Ορισμός 10.3.1.** Έστω $X, Y$ ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων, $f, g : X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις και $f_\sharp, g_\sharp : S_*(X) \to S_*(Y)$ οι επαγόμενες αλυσωτές απεικονίσεις. Μια **αλυσωτή ομοτοπία** (chain homotopy) μεταξύ των $f_\sharp$ και $g_\sharp$ είναι μια ακολουθία ομομορφισμών $\{p_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y)\}$, έτσι ώστε $\partial_{n+1}p_n + p_{n-1}\partial_n = g_\sharp - f_\sharp$, για κάθε $n$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & S_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_\sharp - f_\sharp"] \arrow[dl, "p_n"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "p_{n-1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & S_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"'] & S_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι οι $f$ και $g$ είναι **αλυσωτά ομοτοπικές**.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει ο αναγνώστης ότι η αλυσωτή ομοτοπία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από έναν τοπολογικό χώρο σε έναν άλλο. Στη συνέχεια, σημειώνουμε ότι αλυσωτά ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν τους ίδιους ομομορφισμούς στις ομάδες ομολογίας.

**Πρόταση 10.3.2.** *Αν οι $f, g : X \to Y$ είναι αλυσωτά ομοτοπικές απεικονίσεις, τότε $H_n(f) = H_n(g)$ για κάθε $n$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε κύκλο $\gamma \in S_n(X)$, δηλαδή $\partial_n \gamma = 0$, έχουμε:

$$g_\sharp(\gamma) - f_\sharp(\gamma) = \partial_{n+1} p_n(\gamma) + p_{n-1}\partial_n(\gamma) = \partial_{n+1} p_n(\gamma) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

Έπεται ότι $H_n(f)[\gamma] = H_n(g)[\gamma]$. □

**Θεώρημα 10.3.3.** *Ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ επάγουν την ίδια απεικόνιση στην ομολογία. Δηλαδή, $H_n(f) = H_n(g)$ για κάθε $n$.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα δούμε κάποια πορίσματα.

**Πόρισμα 10.3.4.** *Αν η $f : X \to Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n$.*

*Απόδειξη.* Έπειται άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα και την Πρόταση 10.1.8. □

**Πόρισμα 10.3.5.** *Αν ο χώρος $X$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο, τότε*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n > 0. \end{cases}$$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.3.* Αν τα $u_0, \ldots, u_k$ είναι σημεία ενός Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$, τότε συμβολίζουμε με $[u_0, \ldots, u_j, \ldots, u_k]$ το μικρότερο κυρτό του $\mathbb{R}^m$ που τα περιέχει και με $[u_0, \ldots, \widehat{u}_j, \ldots, u_k]$ το μικρότερο κυρτό που περιέχει τα σημεία $u_i$, $i = 0, \ldots, k$ με $i \neq j$, δηλαδή όλα αυτά τα σημεία εκτός από το $u_j$.

Αρκεί να δείξουμε ότι οι $f_\sharp$ και $g_\sharp$ είναι αλυσωτά ομοτοπικές. Έστω $F : X \times I \to Y$ μια ομοτοπία από την $f$ στην $g$. Για κάθε ιδιάζον $n$-πλέγμα $\sigma : \Delta_n = [E_0, \ldots, E_n] \to X$, θεωρούμε το «πρίσμα» $\Delta_n \times I$, τις κορυφές $v_i = (E_i, 0)$ του $\Delta_n \times \{0\}$ και τις κορυφές $w_i = (E_i, 1)$ του $\Delta_n \times \{1\}$. Υποδιαιρούμε το πρίσμα $\Delta_n \times I$ στα $n+1$ το πλήθος πλέγματα $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$, καθένα από τα οποία είναι αντίτυπο του $\Delta_{n+1}$, και συμβολίζουμε με $\sigma_i^{n+1}$ την εικόνα του καθενός από αυτά μέσω της $\sigma \times \mathrm{Id}_I$. Δηλαδή, $\sigma_i^{n+1} = (\sigma \times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]}$. Για κάθε $n$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $p_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y)$ του ορισμού 10.3.1 (στα «βασικά» στοιχεία της ελεύθερης αβελιανής $S_n$) ως εξής:

$$p_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ \sigma_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]}$$

Υπολογίζουμε το σύνορο του $p_n(\sigma)$:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}p_n(\sigma) &= \sum_{j\leq i}(-1)^i(-1)^j F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} + \\ &\quad+\sum_{j\geq i}(-1)^i(-1)^{j+1} F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,\widehat{w}_j,\ldots,w_n]}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι $i = j = \alpha$ στο πρώτο άθροισμα απλοποιούνται με τους όρους $i = j = \alpha - 1$ του δευτέρου, εκτός από τις τιμές $\alpha = 0$ για το πρώτο και $\alpha = n$ για το δεύτερο.

Για $i = j = 0$, το πρώτο άθροισμα δίνει τον όρο

$$F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[w_0,\ldots,w_n]} = F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{\Delta_n\times\{1\}} = F(\sigma,1) = g_\sharp(\sigma),$$

ενώ για $i = j = n$ το δεύτερο δίνει

$$-F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0,\ldots,v_n]} = -F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{\Delta_n\times\{0\}} = -F(\sigma,0) = -f_\sharp(\sigma).$$

Υπολογίζουμε, επίσης, την εικόνα του συνόρου του $\sigma$ μέσω της $p_{n-1}$:

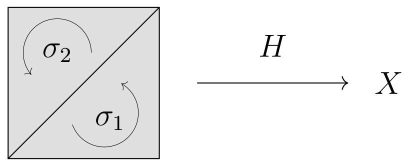
$$\begin{aligned}p_{n-1}\partial_n(\sigma) &= p_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma\big|_{[E_0,\ldots,\widehat{E}_j,\ldots,E_n]}\Big) \\ &= \sum_{i>j}(-1)^{(i-1)+j} F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} + \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} F\circ(\sigma\times \mathrm{Id}_I)\big|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,\widehat{w}_j,\ldots,w_n]}\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι όροι που παραμένουν μετά τις απλοποιήσεις στο άθροισμα που εκφράζει το $\partial_{n+1}p_n(\sigma)$ είναι ακριβώς οι $-p_{n-1}\partial_n(\sigma)$, $g_\sharp(\sigma)$ και $-f_\sharp(\sigma)$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\partial_{n+1}p_n(\sigma) = -p_{n-1}\partial_n(\sigma) + g_\sharp(\sigma) - f_\sharp(\sigma) \tag{10.3}$$

και ως εκ τούτου η ακολουθία των απεικονίσεων $\{p_n\}$ είναι μια αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ των $g_\sharp(\sigma)$ και $f_\sharp(\sigma)$. □

**Παρατήρηση 10.3.6.** Η σχέση 10.3 εκφράζει το γεγονός ότι το σύνορο του πρίσματος $\Delta_n\times I$ αποτελείται από το «πάνω» μέρος $\Delta_n\times\{1\}$, το «κάτω» $\Delta_n\times\{0\}$ και τις «πλευρές» $\partial\Delta_n\times I$ του πρίσματος.




**Σχήμα 10.2:** *Ομοτοπικά μονοπάτια είναι ομόλογα.*

## 10.4 Η Αβελιανοποίηση της Θεμελιώδους Ομάδας

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ότι η αβελιανοποίηση της θεμελιώδους ομάδας ενός κατά τόξα συνεκτικού χώρου είναι ισόμορφη με την πρώτη ομάδα ομολογίας του χώρου.

Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος. Κάθε μονοπάτι $f : I \to X$ μπορεί να θεωρηθεί και ως ιδιάζον 1-πλέγμα. Αν $f, g$ είναι δύο μονοπάτια του $X$, τότε γράφουμε $f \sim g$, αν το 1-πλέγμα $f - g$ είναι σύνορο (δηλαδή $f - g \in \operatorname{Im} \partial$). Με άλλα λόγια $f \sim g$ σημαίνει ότι τα μονοπάτια $f$ και $g$ είναι ομόλογα.

**Λήμμα 10.4.1.** *Αν $f$ και $g$ είναι δύο ομοτοπικά μονοπάτια του $X$, τότε $f \sim g$.*

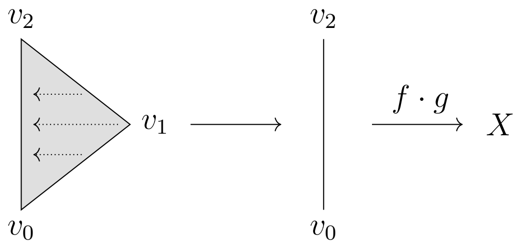
*Απόδειξη.* Έστω $H$ ομοτοπία από το $f$ στο $g$. Διασπώντας το τετράγωνο $I \times I$ σε δύο τρίγωνα (θεωρώντας τη διαγώνιο $\delta$), μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοτοπία $H$ ως ιδιάζουσα 2-αλυσίδα αποτελούμενη από δύο πλέγματα $\sigma_1$ και $\sigma_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 10.2. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= -H(0,t) + H(s,1) + \delta - H(s,0) + H(1,t) - \delta \\
&= -f + C_{f(1)} + \delta - C_{f(0)} + g - \delta \\
&= g - f + C_{f(1)} - C_{f(0)}.
\end{aligned}$$

Εφόσον το σταθερό μονοπάτι $C_x$, για κάθε $x \in X$, είναι σύνορο της ίδιας σταθερής απεικόνισης $\Delta_2 \to X$, έπεται ότι $C_{f(1)} - C_{f(0)} \in \operatorname{Im} \partial$ και άρα $g - f \in \operatorname{Im} \partial$. □

**Λήμμα 10.4.2.** *Αν $f$ και $g$ είναι δύο μονοπάτια του $X$ με $f(1) = g(0)$, τότε $f \cdot g \sim f + g$. Ιδιαιτέρως, $f + f^{-1} \sim 0$ και $f^{-1} \sim f$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ιδιάζον 2-πλέγμα $\sigma : [v_0, v_1, v_2] \to X$, έτσι ώστε ο περιορισμός της $\sigma$ στα $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$ και $[v_0, v_2]$ να δίνεται από την $f$, $g$ και $f \cdot g$, αντίστοιχα, ενώ στα υπόλοιπα σημεία η $\sigma$ είναι η σύνθεση της «ορθογώνιας» προβολής του $[v_0, v_1, v_2]$ στην




**Σχήμα 10.3**

πλευρά $[v_0, v_2]$ με το μονοπάτι $f \cdot g : [v_0, v_2] \to X$ (βλ. σχήμα 10.3). Τότε $\mathrm{Im}\,\partial \ni \partial\sigma = f + g - f \cdot g$ και έτσι $f \cdot g \sim f + g$. $\square$

Έστω $x_0$ ένα σημείο του $X$. Κάθε θηλειά $f : I \to X$ στο $x_0$ αντιπροσωπεύει έναν κύκλο στην ομάδα $S_1(X)$, αφού $\partial f = f(1) - f(0) = 0$. Συνεπώς, από τα δύο προηγούμενα λήμματα προκύπτει ότι έχουμε έναν (καλώς ορισμένο) ομομορφισμό $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$, που ορίζεται μέσω του τύπου

$$\varphi([f]) = f + \mathrm{Im}\,\partial.$$

**Λήμμα 10.4.3.** *Ο ομομορφισμός $\varphi$ είναι επί, αν ο χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Αν ο χώρος είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε για κάθε $x \in X$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα μονοπάτι $\omega_x$ από το $x_0$ στο $x$, όπου ως $\omega_{x_0}$ επιλέγεται το σταθερό μονοπάτι $C_{x_0}$ στο $x_0$. Εφόσον κάθε μονοπάτι $\omega_x$ είναι ένα ιδιάζον 1-πλέγμα, η απεικόνιση $x \mapsto \omega_x$ επεκτείνεται, κατά μοναδικό τρόπο, σε ομομορφισμό

$$\omega : S_0(X) \to S_1(X).$$

Για κάθε μονοπάτι $h$ του $X$, θεωρούμε τη θηλειά $\omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1}$ στο $x_0$. Τότε

$$\begin{aligned} \varphi\big([\omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1}]\big) &= \omega_{h(0)} \cdot h \cdot \omega_{h(1)}^{-1} + \mathrm{Im}\,\partial \\ &= h - \omega(\partial h) + \mathrm{Im}\,\partial \\ &= \varphi([h]) - \big(\omega(\partial h) + \mathrm{Im}\,\partial\big). \end{aligned}$$

Πρέπει να τονισθεί ότι εδώ δεν υπονοούμε πως το μονοπάτι $h$ είναι θηλειά. Ο τύπος της $\varphi$ έχει νόημα σε κλάσεις ομοτοπίας γενικότερα, με τη διαφορά ότι η εικόνα δεν είναι απαραιτήτως στοιχείο της $H_1(X)$.

Για μια τυχαία ιδιάζουσα 1-αλυσίδα $\gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$, θεωρούμε το στοιχείο $g = \big[\prod_{i=1}^{k}(\omega_{\sigma_i(0)} \cdot \sigma_i \cdot \omega_{\sigma_i(1)}^{-1})^{n_i}\big]$ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi([g]) &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} n_i\big(\sigma_i - \omega(\partial\sigma_i)\big) + \operatorname{Im}\partial \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i - \omega\big(\partial(\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i)\big) + \operatorname{Im}\partial \\ &= \gamma - \omega(\partial\gamma) + \operatorname{Im}\partial. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η αλυσίδα $\gamma$ είναι κύκλος, προκύπτει ότι $\varphi([g]) = \gamma + \operatorname{Im}\partial$, που σημαίνει ότι η $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ είναι επιμορφισμός. □

Συμβολίζουμε με $G$ τη θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X, x_0)$, με $G'$ την παράγωγο υποομάδα της $G$ και με $G_{ab}$ την αβελιανοποίηση της $G$, δηλαδή $G_{ab}$ είναι η ομάδα πηλίκο $G/G'$. Εφόσον η ομάδα $H_1(X)$ είναι αβελιανή, ο παραπάνω επιμορφισμός $\varphi$ παραγοντοποιείται μέσω της $G_{ab}$. Δηλαδή, υπάρχει επιμορφισμός $\widetilde{\varphi} : G_{ab} \to H_1(X)$, έτσι ώστε $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, όπου $\pi : G \to G_{ab}$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός.

**Θεώρημα 10.4.4.** *Έστω $X$ ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος και $x_0$ ένα σημείο του $X$. Ο επιμορφισμός*

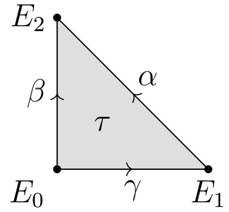
$$\widetilde{\varphi} : \pi_1(X, x_0)_{ab} \to H_1(X)$$

*είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της απόδειξης του προηγούμενου λήμματος. Για το τυχαίο ιδιάζον 1-πλέγμα $\sigma$, ορίζουμε ένα στοιχείο $\psi(\sigma)$ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ ως εξής: $\psi(\sigma) = \pi([\omega_{\sigma(0)} \cdot \sigma \cdot \omega_{\sigma(1)}^{-1}])$. Εφόσον η ομάδα $S_1(X)$ είναι ελεύθερη αβελιανή πάνω στα ιδιάζοντα 1-πλέγματα, η απεικόνιση $\psi$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό

$$\psi : S_1(X) \to \pi_1(X, x_0)_{ab}.$$

Έστω $\tau : \Delta_2 \to X$ ένα ιδιάζον 2-πλέγμα, όπου για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό συμβολίζουμε με $\alpha$, $\beta$ και $\gamma$ τον περιορισμό της απεικόνισης $\tau$ στα $[E_1, E_2]$, $[E_0, E_2]$ και $[E_0, E_1]$, αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σημειώνουμε ότι το πλέγμα $\tau$ δίνει ομοτοπία $\gamma\alpha \simeq \beta$ και υπολογίζουμε την εικόνα του συνόρου του $\tau$ μέσω της $\psi$.

$$\begin{aligned}\psi(\partial\tau) &= \psi(\gamma+\alpha-\beta) = \psi(\gamma)\psi(\alpha)\psi(\beta)^{-1} \\ &= \pi\big([\omega_{\gamma(0)}\cdot\gamma\cdot\omega_{\gamma(1)}^{-1}][\omega_{\alpha(0)}\cdot\alpha\cdot\omega_{\alpha(1)}^{-1}][\omega_{\beta(1)}\cdot\beta^{-1}\cdot\omega_{\beta(0)}^{-1}]\big) \\ &= \pi\big([\omega_{\gamma(0)}\gamma\alpha\beta^{-1}\omega_{\gamma(0)}^{-1}]\big) = \pi\big([\omega_{\gamma(0)}\cdot\omega_{\gamma(0)}^{-1}]\big) \\ &= \pi\big([\omega_{x_0}]\big) = \pi\big([C_{x_0}]\big) = 1.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mathrm{Im}\,\partial \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$ και έτσι επάγεται ομομορφισμός

$$\widetilde{\psi} : S_1(X)/\mathrm{Im}\,\partial \to \pi_1(X,x_0)_{ab},$$

έτσι ώστε $\widetilde{\psi}\circ q = \psi$, όπου με $q$ συμβολίζουμε τον φυσικό επιμορφισμό $S_1(X) \to S_1(X)/\mathrm{Im}\,\partial$.

Διατηρούμε επίσης τον ίδιο συμβολισμό $\widetilde{\psi}$ για τον περιορισμό της $\widetilde{\psi}$ στην $H_1(X)$. Για κάθε θηλειά $f$ στο $x_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}\big([f]+G'\big) &= \widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}\circ\pi([f]) = \widetilde{\psi}\circ\varphi([f]) \\ &= \widetilde{\psi}(f+\mathrm{Im}\,\partial) = \widetilde{\psi}\circ q(f) = \psi(f) \\ &= \pi\big([\omega_{f(0)}\cdot f\cdot\omega_{f(1)}^{-1}]\big) = \pi([f]) = [f]+G',\end{aligned}$$

αφού $f$ θηλειά στο $x_0$. Τελικά, $\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi} = Id_{G_{ab}}$ από όπου έπεται ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι $1-1$. □

## 10.5 Η Ακολουθία Mayer-Vietoris και Εκτομή

Ένα από τα κύρια εργαλεία για τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας ενός χώρου είναι η ακολουθία Mayer-Vietoris η οποία αποτελεί το ανάλογο του θεωρήματος Seifert-Van Kampen. Το κλειδί για την απόδειξη είναι μια διαδικασία υποδιαίρεσης ιδιαζόντων πλεγμάτων, η οποία μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε μια ιδιάζουσα αλυσίδα με μια άλλη της οποίας τα πλέγματα είναι «μικρά», δηλαδή η εικόνα του καθενός περιέχεται σε ένα ανοικτό μιας δοθείσης ανοικτής κάλυψης του χώρου.

Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ μια συλλογή υπόχωρων του $X$ των οποίων τα εσωτερικά αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του $X$. Συμβολίζουμε με $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ την υποομάδα της $S_n(X)$ που παράγεται από όλα τα ιδιάζοντα πλέγματα $\sigma : \Delta_n \to X$ των οποίων η εικόνα περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα της κάλυψης. Δηλαδή,

$$S_n^{\mathcal{U}}(X) = \left\{\gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i \in S_n(X) \middle| \text{για κάθε}\, i = 1,\dots,k \text{ υπάρχει } U_{j(i)} \in \mathcal{U} \,\text{με}\, \sigma_i \subseteq U_{j(i)}\right\}.$$

**Παράδειγμα 10.5.1.** Αν $\mathcal{U} = \{A, B\}$, τότε $S_n^{\{A,B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B)$.

Η συνοριακή απεικόνιση $\partial$ απεικονίζει την ομάδα $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ στην $S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ και έτσι έχουμε ένα σύμπλεγμα

$$S_*^{\mathcal{U}}(X):\ \cdots \longrightarrow S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow \cdots .$$

Συμβολίζουμε με $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ τις ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος $S_*^{\mathcal{U}}(X)$. Είναι φανερό ότι $S_n^{\mathcal{U}}(X) \neq S_n(X)$, ισχύει όμως το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 10.5.2.** *Οι ενθέσεις $S_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_n(X)$ επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ για κάθε $n$.*

Η ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος είναι απλή: κάθε ιδιάζουσα αλυσίδα μπορεί με υποδιαιρέσεις να «σπάσει» σε πλέγματα που βρίσκονται στα σύνολα της $\mathcal{U}$. Παρουσιάζει όμως πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε ότι αν τα $v_0, v_1, \ldots, v_n$ είναι σημεία ενός Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^m$, τότε με $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ συμβολίζουμε το μικρότερο κυρτό (κυρτή θήκη) του $\mathbb{R}^m$ που τα περιέχει. Ένα $n$-πλέγμα της μορφής $\sigma : \Delta_n \to [v_0, v_1, \ldots, v_n]$, όπου $\sigma\big(\sum_{i=0}^n t_i E_i\big) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ θα λέγεται **ιδιάζον γραμμικό $n$-πλέγμα** ή απλά γραμμικό πλέγμα. Στην περίπτωση που τα $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παρατηρούμε ότι η $\sigma$ είναι «γραμμικός» ομοιομορφισμός και το αντίστοιχο πλέγμα θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως «μη ιδιάζον». Συνήθως ταυτίζουμε ένα ιδιάζον γραμμικό πλέγμα με την εικόνα του $[\sigma(E_0), \sigma(E_1), \ldots, \sigma(E_n)] = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$.

Το **κέντρο βάρους** ενός γραμμικού πλέγματος $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$, όπου τα διανύσματα $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, είναι το σημείο $b = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$ του εσωτερικού του $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$.

**Ορισμός 10.5.3** (Βαρυκεντρική υποδιαίρεση)**.** Για κάθε $n = 0, 1 \ldots$, η **βαρυκεντρική υποδιαίρεση** ενός γραμμικού $n$-πλέγματος $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$, όπου τα $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ορίζεται επαγωγικά ως εξής: για $n = 0$, η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $[v_0]$ είναι το ίδιο το $[v_0]$. Υποθέτουμε ότι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση έχει ορισθεί για γραμμικά $(n-1)$-πλέγματα της παραπάνω μορφής. Η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του πλέγματος $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ ορίζεται να είναι η ανάλυσή του στα $n$-πλέγματα $[b, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}]$, όπου $b$ είναι το κέντρο βάρους του $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ και το $[w_0, \ldots, w_{n-1}]$ (γραμμικό) $(n-1)$-πλέγμα στη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του προσώπου $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$ για $0 \leq i \leq n$.

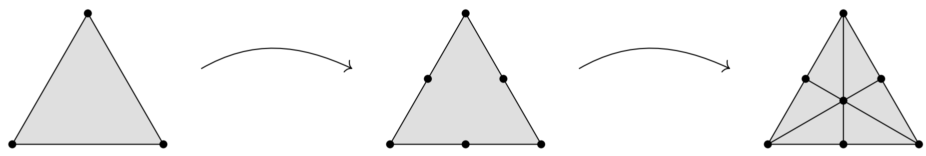
**Παράδειγμα 10.5.4.** Αν έχουμε το 1-πλέγμα



τότε η βαρυκεντρική του υποδιαίρεση λαμβάνεται θεωρώντας το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος και είναι



Στην περίπτωση που έχουμε ένα 2-πλέγμα, πρώτα βαρυκεντρικώς υποδιαιρούμε το σύνορο και έπειτα προσθέτουμε το βαρύκεντρο το οποίο ενώνουμε με κάθε 0-πλέγμα στο σύνορο.



Υπενθυμίζουμε ότι με $\delta(A)$ συμβολίζουμε τη διάμετρο ενός υποσυνόλου $A$ ενός μετρικού χώρου $X$. Για την απόδειξη του επόμενου λήμματος σημειώνουμε ότι αν το $x$ είναι σημείο ενός γραμμικού πλέγματος $\sigma$, τότε η συνάρτηση της απόστασης του $x$ από το τυχαίο $y \in \sigma$, μεγιστοποιείται όταν το $y$ είναι κορυφή του $\sigma$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το μέγιστο $M$ της προηγούμενης συνάρτησης στις κορυφές του $\sigma$, τότε από τον ορισμό του $\sigma$ και την κυρτότητα της κλειστής μπάλας $\bar{B}$ με κέντρο $x$ και ακτίνα $M$, η οποία περιέχει όλες τις κορυφές του $\sigma$, έπεται ότι $\sigma \subseteq \bar{B}$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

**Λήμμα 10.5.5.** *Έστω $\Delta = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ ένα γραμμικό πλέγμα, όπου τα $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και $\Delta'$ ένα πλέγμα στη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $\Delta$. Τότε $\delta(\Delta') \leq \frac{n}{n+1}\delta(\Delta)$.*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του $n$. Για $n = 0$ είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι $n \geq 1$ και ότι το συμπέρασμα ισχύει για φυσικούς μικρότερους από το $n$. Αν $b$ είναι το κέντρο βάρους του $\Delta$ και $\Delta' = [b = w_0, w_1, \ldots, w_n]$, τότε, προκειμένου να εκτιμήσουμε τη διαφορά $|w_i - w_j|$, υπολογίζουμε πρώτα

$$|b - v_i| = \left|\frac{v_0 + \cdots + v_n - (n+1)v_i}{n+1}\right| = \left|\frac{(v_0 - v_i) + (v_1 - v_i) + \cdots + (v_n - v_i)}{n+1}\right|.$$

Παρατηρούμε ότι ένας από τους όρους στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος είναι ίσος με μηδέν και συνεπώς

$$|b - v_i| \leq \frac{n}{n+1}\max_{i,j}|v_i - v_j| = \frac{n}{n+1}\delta(\Delta).$$

Εφόσον $w_i \in \Delta$, έχουμε ότι

$$|b - w_i| \leq \max_i|b - v_i| \leq \frac{n}{n+1}\delta(\Delta).$$

Για τις άλλες περιπτώσεις (δηλαδή κάθε $i, j \neq 0$), οι κορυφές $w_i$ και $w_j$ είναι κορυφές ενός προσώπου του $\Delta'$ που βρίσκεται σε ένα πρόσωπο του $\Delta$ και συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$|w_i - w_j| \leq \frac{n-1}{n}\delta(\Delta) \leq \frac{n}{n+1}\delta(\Delta).$$

□

Έστω $K$ ένα κυρτό υποσύνολο κάποιου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$. Μια **γραμμική ιδιάζουσα αλυσίδα** στο $K$ είναι μια ιδιάζουσα αλυσίδα στο $K$ της οποίας κάθε ιδιάζον πλέγμα είναι γραμμικό. Αν $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ είναι ένα ιδιάζον γραμμικό $n$-πλέγμα στο $K$ και $v$ σημείο του $K$, τότε ο **κώνος** του $\sigma$ ως προς το $v$ είναι το ιδιάζον γραμμικό $(n+1)$-πλέγμα $v * \sigma = [v, v_0, v_1, \dots, v_n]$, το οποίο λόγω κυρτότητας περιέχεται στο $K$. Δηλαδή,

$$(v * \sigma)\Big(\sum_{i=0}^{n} t_i E_i\Big) = \begin{cases} t_0 v + (1 - t_0)\sigma\Big(\frac{(t_1E_0 + \cdots + t_{n+1}E_n)}{1-t_0}\Big), & \text{αν } t_0 < 1 \\ v, & \text{αν } t_0 = 1. \end{cases}$$

Η απεικόνιση του κώνου ως προς το $v$ επεκτείνεται γραμμικά σε ιδιάζουσες γραμμικές αλυσίδες του $K$, δηλαδή $v * (\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i(v * \sigma_i)$.

**Λήμμα 10.5.6.** *Έστω $\gamma$ μια ιδιάζουσα γραμμική αλυσίδα σε ένα κυρτό υποσύνολο $K$ του $\mathbb{R}^m$ και $v \in K$. Τότε $\partial(v * \gamma) = \gamma - v * \partial\gamma$.*

*Απόδειξη.* Λόγω γραμμικότητας αρκεί να δειχθεί η ισότητα για το τυχαίο ιδιάζον γραμμικό πλέγμα $\sigma = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ του $K$.

$$\begin{aligned}
\partial(v * \sigma) &= \partial[v, v_0, v_1, \ldots, v_n] \\
&= [v_0, v_1, \ldots, v_n] - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v, v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_n] \\
&= [v_0, v_1, \ldots, v_n] - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ v * [v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_n] \\
&= [v_0, v_1, \ldots, v_n] - v * \Big( \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, v_n] \Big) \\
&= [v_0, v_1, \ldots, v_n] - v * (\partial[v_0, v_1, \ldots, v_n]).
\end{aligned}$$

□

Επί της ουσίας, η προηγούμενη ισότητα εκφράζει το γεγονός ότι η έννοια του κώνου μας δίνει μια αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ της ταυτοτικής και της μηδενικής απεικόνισης στο σύμπλεγμα του Παραδείγματος 10.2.2 των ομάδων ομολογίας των γραμμικών πλεγμάτων του κυρτού $K$.

Στη συνέχεια θα δούμε πως η κατασκευή του κώνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε επαγωγικά τον **τελεστή υποδιαίρεσης** $S : S_n(X) \to S_n(X)$ επί των ιδιαζόντων $n$-αλυσίδων ενός χώρου $X$. Τον ορίζουμε πρώτα για τα πρότυπα $n$-πλέγματα $i_n : \Delta_n \to \Delta_n$, όπου $i_n$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Όταν $n = 0$, θέτουμε $S$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Για $n > 0$, ορίζουμε

$$S(i_n) = b_n * S(\partial i_n),$$

όπου $b_n$ είναι το κέντρο βάρους του $\Delta_n$. Για το τυχαίο ιδιάζον $n$-πλέγμα $\sigma : \Delta_n \to X$, ορίζουμε

$$S(\sigma) = \sigma_\sharp(S(i_n)),$$

όπου $\sigma_\sharp$ είναι η αλυσωτή απεικόνιση που επάγεται από τη συνεχή απεικόνιση $\sigma$ (φυσικά, επεκτείνουμε γραμμικά σε ιδιάζουσες αλυσίδες). Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι $S \circ f_\sharp = f_\sharp \circ S$ για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$. Πράγματι,

$$S \circ f_\sharp(\sigma) = S(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_\sharp(S(i_n)) = f_\sharp \circ \sigma_\sharp S(i_n) = f_\sharp S(\sigma),$$

εφόσον $\sigma = \sigma_\sharp i_n$.

Στην περίπτωση ενός γραμμικού $n$-πλέγματος $\sigma = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$, όπου τα $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παρατηρούμε ότι η αλυσίδα $S(\sigma)$ αποτελείται από τα $n$-πλέγματα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του ορισμού 10.5.3, τα οποία εμφανίζονται στο αντίστοιχο άθροισμα με πρόσημο $1$ ή $-1$ (το οποίο κάθε φορά μπορεί να υπολογιστεί).

**Λήμμα 10.5.7.** *Ο τελεστής υποδιαίρεσης $S : S_n(X) \to S_n(X)$ στις ιδιάζουσες αλυσίδες ενός χώρου $X$ είναι αλυσωτή απεικόνιση, δηλ. $\partial \circ S = S \circ \partial$.*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του $n$. Για $n = 0$ είναι άμεσο. Για $n > 0$, παρατηρούμε πως αρκεί να δείξουμε ότι $\partial S(i_n) = S\partial(i_n)$, αφού τότε για το τυχαίο πλέγμα $\sigma$ προκύπτει ότι

$$\partial S(\sigma) = \partial S(\sigma_\sharp i_n) = \sigma_\sharp \partial S(i_n) = \sigma_\sharp S\partial(i_n) = S\partial(\sigma_\sharp i_n) = S\partial\sigma.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\partial S(i_n) &= \partial(b_n * S\partial i_n) \\
&= S\partial i_n - b_n * \partial S\partial i_n \\
&= S\partial i_n - b_n * S\partial\partial i_n \\
&= S\partial i_n - 0 \\
&= S\partial i_n,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το Λήμμα 10.5.6 και η τρίτη από την επαγωγική υπόθεση. □

**Λήμμα 10.5.8.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ μια συλλογή υπόχωρων του $X$ των οποίων τα εσωτερικά αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του $X$. Για κάθε ιδιάζουσα $n$-αλυσίδα $\gamma$ του $X$ υπάρχει δύναμη $S^k$ του τελεστή υποδιαίρεσης $S$ έτσι ώστε $S^k(\gamma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αλυσίδα $\gamma$ αποτελείται μόνο από ένα πλέγμα $\sigma : \Delta_n \to X$ (διαφορετικά θεωρούμε τη μέγιστη δύναμη των δυνάμεων που προκύπτουν από κάθε πλέγμα της αλυσίδας). Από το λήμμα του Lebesgue για το ανοικτό κάλυμμα $\{\sigma^{-1}(\mathrm{Int}(U_j)), j \in J\}$ του συμπαγούς μετρικού χώρου $\Delta_n$, υπάρχει θετικός αριθμός $\delta$, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο του $\Delta_n$ με διάμετρο μικρότερη από $\delta$ να περιέχεται σε ένα από τα ανοικτά $\sigma^{-1}(\mathrm{Int}(U_j))$ του καλύμματος, ισοδύναμα, να απεικονίζεται μέσω της $\sigma$ εντός του $\mathrm{Int}(U_j))$. Από το Λήμμα 10.5.5 έπεται ότι κατά την εφαρμογή επαναλαμβανόμενων υποδιαιρέσεων προκύπτουν πλέγματα με αυθαιρέτως μικρή διάμετρο, εφόσον η ποσότητα $(n/(n+1))^k$ τείνει στο μηδέν, καθώς ο εκθέτης τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλο εκθέτη $k$, έτσι ώστε η διάμετρος κάθε πλέγματος της αλυσίδας $S^k(i_n)$ να είναι μικρότερη από $\delta$ και ως εκ τούτου $S^k(\sigma) = \sigma_\sharp(S^k i_n) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$. □

**Πρόταση 10.5.9.** *Για κάθε $k \geq 1$, οι απεικονίσεις $S^k, Id : S_*(X) \to S_*(X)$ είναι αλυσωτά ομοτοπικές.*

*Απόδειξη.* Πρώτα θα ορίσουμε επαγωγικά αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ της $S$ και της ταυτοτικής. Δηλαδή, θα ορίσουμε ακολουθία ομομορφισμών $T = T_n : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$, για $n \geq 0$, έτσι ώστε

$$\partial T + T\partial = S - \mathrm{Id}. \tag{10.4}$$

Φυσικά αρκεί να ορίσουμε την $T$ σε ιδιάζοντα πλέγματα (επεκτείνουμε γραμμικά). Για $n = 0, T$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός και η παραπάνω ισότητα ισχύει, αφού η $S$ είναι η ταυτοτική όταν $n = 0$. Για $n > 0$ και ένα ιδιάζον $n$-πλέγμα $\sigma : \Delta_n \to X$, ορίζουμε

$$T\sigma = \sigma_\sharp\big(b_n * (Si_n - i_n - T\partial i_n)\big) \in S_{n+1}(X). \tag{10.5}$$

Από τους ορισμούς έπεται άμεσα ότι $T \circ \sigma_\sharp = \sigma_\sharp \circ T$. Αν υποθέσουμε ότι η σχέση 10.5 ισχύει για κάθε ιδιάζουσα $(n-1)$-αλυσίδα, τότε, αφού $\partial i_n$ ιδιάζουσα $(n-1)$-αλυσίδα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\partial T\partial i_n &= -T\partial\partial i_n + S\partial i_n - \partial i_n \\
&= S\partial i_n - \partial i_n \\
&= \partial S i_n - \partial i_n
\end{aligned}$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}
\partial T\sigma &= \partial\sigma_\sharp\big(b_n * (Si_n - i_n - T\partial i_n)\big) \\
&= \sigma_\sharp\partial\big(b_n * (Si_n - i_n - T\partial i_n)\big) \\
&= \sigma_\sharp\big(Si_n - i_n - T\partial i_n - b_n * \partial(Si_n - i_n - T\partial i_n)\big) \\
&= S(\sigma) - \sigma - T\partial\sigma - \sigma_\sharp\big(b_n * (\partial S i_n - \partial i_n - \partial T\partial i_n)\big) \\
&= S(\sigma) - \sigma - T\partial\sigma,
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι μέσω του τύπου 10.5 ορίζεται πράγματι αλυσωτή ομοτοπία μεταξύ των $S$ και Id.

Η ομοτοπία $T_k$ μεταξύ των $S$ και Id κατασκευάζεται ως ακολούθως: Για $k = 1$, ορίζουμε $T_1 = T$. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $S$ στην εξίσωση $\partial T + T\partial = S - \mathrm{Id}$ προκύπτει η εξίσωση $S\partial T + ST\partial = S^2 - S$ και αθροίζοντας τις δύο εξισώσεις λαμβάνουμε ότι

$$\partial T + T\partial + S\partial T + ST\partial = S^2 - \mathrm{Id},$$

ισοδύναμα, λόγω του Λήμματος 10.5.7,

$$\partial(ST + T) + (ST + T)\partial = S^2 - \mathrm{Id}.$$

Ορίζουμε λοιπόν $T_2 = ST + T$ και συνεχίζοντας διαπιστώνουμε ότι η ομοτοπία $T_k$ μπορεί να ορισθεί μέσω του τύπου $T_k = S^{k-1}T + S^{k-2}T + \cdots + T$. □

*Απόδειξη του θεωρήματος 10.5.2.* Είναι άμεσο ότι η ένθεση $\iota : S_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_n(X)$ είναι αλυσωτή απεικόνιση και έτσι επάγει ομομορφισμό $\iota_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \to H_n(X)$. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η $\iota_*$ είναι επί, θεωρούμε την κλάση ομολογίας $[\gamma] \in H_n(X)$ ενός $n$-κύκλου $\gamma$. Από το Λήμμα 10.5.8 μπορούμε να επιλέξουμε εκθέτη $k$, έτσι ώστε $S^k(\gamma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$. Σημειώνουμε ότι η αλυσίδα $S^k(\gamma)$ είναι κύκλος, αφού η $S$ ( και άρα η $S^k$) είναι αλυσωτή απεικόνιση. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης έχουμε:

$$S^k(\gamma) - \gamma = \partial T_k\gamma + T_k\partial\gamma = \partial T_k\gamma,$$

αφού $\gamma$ κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι $S^k(\gamma)$ και $\gamma$ είναι ομόλογοι και συνεπώς η $\iota_*$ είναι επί. Για το $1-1$, θεωρούμε $[\gamma] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$ με $\iota_*[\gamma] = 0$. Δηλαδή, υπάρχει $(n+1)$-αλυσίδα $\beta \in S_{n+1}(X)$, έτσι ώστε $\gamma = \partial\beta$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\gamma$ είναι το σύνορο μιας αλυσίδας στην $S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Πρώτα κάνουμε την αλυσίδα $\beta$ «$\mathcal{U}$-μικρή» επιλέγοντας όπως πριν εκθέτη $k$ αρκούντως μεγάλο, έτσι ώστε $S^k(\beta) \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Τότε εφαρμόζοντας τον τελεστή $\partial$ στη σχέση

$$S^k\beta - \beta = \partial T_k\beta + T_k\partial\beta$$

προκύπτει ότι

$$\partial S^k\beta - \gamma = \partial T_k\partial\beta = \partial T_k\gamma$$

ισοδύναμα

$$\gamma = \partial(S^k\beta - T_k\gamma).$$

Εφόσον $S^k(\beta) \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$, η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν δείξουμε ότι $T_k\gamma \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Αν $\sigma : \Delta_n \to X$ είναι ένα ιδιάζον πλέγμα της $\gamma$, τότε υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ το οποίο περιέχει την εικόνα του $\sigma$, αφού $[\gamma] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Άρα $T_k\sigma = T_k\sigma_\sharp i_n = \sigma_\sharp T_k i_n \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ και έτσι $T_k\gamma \in S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$. □

**Θεώρημα 10.5.10** (Ακολουθία Mayer-Vietoris)**.** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $A, B$ υπόχωροι του $X$, έτσι ώστε ο $X$ είναι η ένωση των εσωτερικών τους. Τότε υπάρχει μια μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \xrightarrow{i_*\oplus j_*} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{\kappa_*-\lambda_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots \tag{10.6}$$

*όπου $(i_*\oplus j_*)[\gamma] = (i_*[\gamma], j_*[\gamma])$, $(\kappa_*-\lambda_*)([\gamma],[\gamma']) = \kappa_*[\gamma]-\lambda_*[\gamma']$, $\partial_*$ είναι ο «συνδετικός» ομομορφισμός και $i_*, j_*, \kappa_*, \lambda_*$ είναι οι επαγώμενοι ομομορφισμοί των ενθέσεων $i : A\cap B \hookrightarrow A$, $j : A\cap B \hookrightarrow B$, $\kappa : A \hookrightarrow X$, $\lambda : B \hookrightarrow X$, αντίστοιχα.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα αλυσωτά συμπλέγματα $S_*(A\cap B)$, $S_*^{\mathcal{U}}(X)$, όπου $\mathcal{U} = \{A, B\}$, και $S_*(A)\oplus S_*(B)$ (με συνοριακό τελεστή $(\partial,\partial)$) και τη βραχεία ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow S_*(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} S_*(A)\oplus S_*(B) \xrightarrow{\psi} S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0\,, \tag{10.7}$$

όπου $\varphi = i_\sharp \oplus j_\sharp$ και $\psi = \kappa_\sharp - \lambda_\sharp$, δηλαδή, επί της ουσίας, $\varphi(\gamma) = (\gamma,\gamma)$ και $\psi(\gamma,\gamma') = \gamma - \gamma'$. Ισχυριζόμαστε ότι η ανωτέρω βραχεία ακολουθία συμπλεγμάτων 10.7 είναι ακριβής. Αρκεί ότι για κάθε φυσικό $n \geq 0$, η βραχεία ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow S_n(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} S_n(A)\oplus S_n(B) \xrightarrow{\psi} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Πράγματι, είναι άμεσο ότι η $\varphi$ είναι 1-1 και η $\psi$ επί (αφού $S_n^{\mathcal{U}}(X) = S_n^{\{A,B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B)$). Επίσης, για κάθε $\gamma \in S_n(A\cap B)$ έχουμε $\psi\circ\varphi(\gamma) = 0$ και άρα $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\psi$. Από την άλλη, αν $(\gamma,\gamma') \in \mathrm{Ker}\psi$, τότε $\gamma = \gamma' \subseteq A\cap B$ άρα $(\gamma,\gamma') = (\gamma,\gamma) \in \mathrm{Im}\varphi$ και τελικά $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$.

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από τη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία (πρόταση 10.2.5) που αντιστοιχεί στη βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων 10.7 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 10.5.2. □

**Παρατήρηση 10.5.11.** Αν χρησιμοποιήσουμε ανηγμένη ομολογία, τότε προκύπτει η ακολουθία Mayer-Vietoris για την ανηγμένη ομολογία, η οποία είναι ίδια με την προηγούμενη στις θετικές διαστάσεις και τελειώνει ως:

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_0(A\cap B) \longrightarrow \widetilde{H}_0(A)\oplus \widetilde{H}_0(B) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow 0,$$

με την προϋπόθεση ότι οι υπόχωροι $A$ και $B$ έχουν μη κενή τομή.

**Θεώρημα 10.5.12** (Εκτομή-Excision)**.** *Έστω $A, U$ δύο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου $X$. Αν η κλειστότητα του $U$ περιέχεται στο εσωτερικό του $A$, τότε η ένθεση $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς στην ομολογία $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$ για κάθε $n$. Με άλλα λόγια, το σύνολο $U$ μπορεί να εκτμηθεί από το ζεύγος $(X, A)$ χωρίς να αλλάξουν οι ομάδες ομολογίας του ζεύγους.*

*Απόδειξη.* Εφόσον $\overline{U} \subseteq \mathrm{Int}A$, έχουμε ότι $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X - U)$. Αν θέσουμε $B = X - U$, τότε $(X - U, A - U) = (B, A \cap B)$ και θέλουμε να δείξουμε ότι η ένθεση $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς στην ομολογία. Οι (αλυσωτές) απεικονίσεις, μέσω των οποίων αποδεικνύεται ότι οι ενθέσεις $S_n^{\{A,B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B) \hookrightarrow S_n(X)$ επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία (Θεώρημα 10.5.2 για $\mathcal{U} = \{A, B\}$), απεικονίζουν αλυσίδες του $A$ σε αλυσίδες του $A$. Άρα ορίζονται οι αντίστοιχες απεικονίσεις πηλίκο και συνεπώς οι ενθέσεις

$$\frac{S_n(A) + S_n(B)}{S_n(A)} \hookrightarrow \frac{S_n(X)}{S_n(A)}$$

επάγουν ισομορφισμούς στη (σχετική) ομολογία. Επιπλέον, οι απεικονίσεις

$$\frac{S_n(B)}{S_n(A \cap B)} = \frac{S_n(B)}{S_n(A) \cap S_n(B)} \to \frac{S_n(A) + S_n(B)}{S_n(A)}$$

που επάγονται από την ένθεση $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$, επίσης επάγουν ισομορφισμούς στην ομολογία, αφού τα αντίστοιχα αλυσωτά συμπλέγματα είναι ισόμορφα (αμφότερες οι ομάδες πηλίκο παράγονται ελευθέρως από τα ιδιάζοντα $n$-πλέγματα του $B$ που δεν ανήκουν στο $A$). Συνθέτοντας αυτούς τους δύο ισομορφισμούς προκύπτει ότι $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

**Παρατήρηση 10.5.13.** Επί της ουσίας στην προηγούμενη απόδειξη δείξαμε το εξής: αν ο $X$ είναι η ένωση των εσωτερικών δύο υπόχωρων του $A$ και $B$ (δηλ. $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$), τότε η ένθεση $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ επάγει ισομορφισμούς $H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A)$ για κάθε $n$. Αυτό αποτελεί μια δεύτερη ισοδύναμη εκδοχή του θεωρήματος της εκτομής, αφού, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης, για $U = X - B$ (και $B = X - U$) έχουμε $A \cap B = A - U$, $X - \mathrm{Int}B = \overline{X - B} = \overline{U}$ και η συνθήκη $\overline{U} \subseteq \mathrm{Int}A$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$.

# 10.6 Εφαρμογές

## Η ομολογία των σφαιρών

Αρχίζουμε με τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας του κύκλου.

**Θεώρημα 10.6.1.** *Ο κύκλος $S^1$ έχει τις ακόλουθες ομάδες (ιδιάζουσας) ομολογίας:*

$$H_n(S^1) = \begin{cases} 0, & \textit{αν } n > 1 \\ \mathbb{Z}, & \textit{αν } n = 0 \ \textit{ή } 1. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα σημεία του κύκλου $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$ και τα ανοικτά $A = S^1 \setminus \{N\}$, $B = S^1 \setminus \{S\}$ τα οποία καλύπτουν τον κύκλο. Καθένα από τα $A$, $B$ είναι συμπτύξιμο, ως ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}$, και ως εκ τούτου έχει την ομολογία σημείου. Έτσι

$$H_n(A) = H_n(B) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Η τομή $A \cap B$ αποτελείται από δύο συμπτύξιμες συνιστώσες, άρα

$$H_n(A \cap B) = H_n(*) \oplus H_n(*) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \geq 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 10.5.10, έχουμε το ακόλουθο τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας Mayer-Vietoris:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(S^1) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Για $n > 1$, το παραπάνω τμήμα γίνεται

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(S^1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

από όπου προκύπτει ότι $H_n(S_1) = 0$ για $n > 1$.

Για $n = 1$, θεωρούμε το ακόλουθο τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας

$$\cdots \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(S^1) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(S^1) \to 0\ ,$$

το οποίο, χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς για τις ομάδες ομολογίας των $A, B$ και την κατά τόξα συνεκτικότητα του κύκλου, μας δίνει

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\ \omega\ } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0\ .$$

Λόγω ακρίβειας, ο ομομορφισμός $\omega$ είναι 1-1, ενώ ο $\varphi$ είναι επί. Αφού ο $\varphi$ είναι επί της άπειρης κυκλικής με πεδίο ορισμού την $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, έπεται ότι Ker $\varphi \cong \mathbb{Z}$ και έτσι, από ακρίβεια, Im $\psi \cong \mathbb{Z}$. Ομοίως, αφού ο $\psi : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to$ Im $\psi \cong \mathbb{Z}$ είναι επιμορφισμός, έχουμε ότι Ker $\psi \cong \mathbb{Z}$.

Τελικά, $H_1(S^1) \cong$ Im $\omega =$ Ker $\psi \cong \mathbb{Z}$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Για τη γενική περίπτωση έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 10.6.2.** *Για κάθε $n \geq 1$, οι ομάδες ομολογίας της σφαίρας $S^n$ δίνονται από τον ακόλουθο «τύπο»*

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } k = n, k = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με $N$ και $S$ τον «βόρειο» και «νότιο» πόλο, αντίστοιχα, της σφαίρας $S^n$. Τα υποσύνολα $A = S^n \setminus \{N\}$, $B = S^n \setminus \{S\}$ της σφαίρας είναι ανοικτά, την καλύπτουν και το καθένα είναι ομοιομορφικό με τον χώρο $\mathbb{R}^n$. Ιδιαιτέρως είναι συμπτύξιμα και έτσι

$$H_k(A) = H_k(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } k = 0 \\ 0, & \text{αν } k > 0. \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Για $k > 1$, έχουμε το παρακάτω τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας Mayer-Vietoris:

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow H_{k-1}(A) \oplus H_{k-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

το οποίο, λόγω της συμπτυξιμότητας των $A, B$, γίνεται

$$0 \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow 0$$

από όπου έπεται ότι οι ομάδες $H_k(S^n)$ και $H_{k-1}(A \cap B)$ είναι ισόμορφες. Εφόσον $A \cap B = S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\text{σημείο}\}$ και ο τελευταίος χώρος έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με τη σφαίρα $S^{n-1}$, προκύπτει ότι $H_k(A \cap B) \cong H_k(S^{n-1})$. Συνεπώς

$$H_k(S^n) \cong H_{k-1}(A \cap B) \cong H_{k-1}(S^{n-1}), \text{ για } k > 1. \tag{10.8}$$

Για $k = 1$ και $n > 1$, έχουμε το ακόλουθο ακριβές τμήμα:

$$\cdots \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(S^n) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(S^n) \to 0$$

το οποίο (αφού γνωρίζουμε την ομολογία των $A, B$ και της τομής τους) λαμβάνει τη μορφή

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Λόγω ακρίβειας, ο ομομορφισμός $\omega$ είναι 1-1, ο $\varphi$ είναι επί και ακριβώς όπως πριν προκύπτει ότι Im $\psi \cong \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει ότι Ker $\psi = 0$ και συνεπώς

$$H_1(S^n) \cong \text{Im}\,\omega = 0, \text{ για } n > 1. \tag{10.9}$$

Το συμπέρασμα τώρα έπεται με επαγωγή επί του $n$, το προηγούμενο θεώρημα και τις σχέσεις 10.8, 10.9. $\square$

**Πόρισμα 10.6.3.** *Για $m \neq n$ οι σφαίρες $S^m$ και $S^n$ δεν είναι ομοτοπικά ισοδύναμες.*

## Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

**Θεώρημα 10.6.4.** *Αν $n \geq 0$, τότε δεν υπάρχει συστολή $r : D^{n+1} \to S^n$.*

*Απόδειξη.* Αν υπήρχε συστολή, για $n \geq 1$, τότε θα είχαμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "Id"'] & D^{n+1} \arrow[d, "r"] \\ & S^n \end{tikzcd} \quad \curvearrowright \quad \begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "Id"'] & H_n(D^{n+1}) \arrow[d, "r_*"] \\ & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

όπου με $i$ συμβολίζουμε, ως συνήθως, την ένθεση της σφαίρας $S^n = \partial D^{n+1}$ στον αντίστοιχο δίσκο $D^{n+1}$. Εφόσον ο χώρος $D^{n+1}$ είναι συμπτύξιμος, έχουμε ότι $H_n(D^{n+1}) = 0$, για κάθε $n \geq 1$, και άρα ο επαγόμενος ομομορφισμός $i_*$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός. Από τη μεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος έπεται ότι ο ταυτοτικός ομομορφισμός $Id : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ είναι επίσης τετριμμένος, άτοπο.

Στην περίπτωση που $n = 0$, το συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι η εικόνα κάθε συνεχούς απεικονίσεως $g : D^1 \to S^0 = \{-1, 1\}$ είναι μονοσύνολο και κατά συνέπεια δεν μπορεί να ισχύει η σχέση $g \circ i(x) = x$ για κάθε $x \in \{-1, 1\}$. $\square$

**Πόρισμα 10.6.5** (Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer)**.** *Για κάθε $n \geq 0$, κάθε συνεχής απεικόνιση $f : D^n \to D^n$ έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in D^n$ με $f(x) = x$.*

*Απόδειξη.* Για $n = 0$ είναι προφανές. Θεωρούμε $n$ θετικό και υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, ακριβώς όπως στην περίπτωση για $n = 2$, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη συστολής $r : D^n \to S^{n-1}$ και οδηγούμαστε σε άτοπο σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα, αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^n$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την ημιευθεία με αρχή το $f(x)$ που διέρχεται από το $x$ και να ορίσουμε τη συστολή, θέτοντας $r(x)$ να είναι το σημείο τομής της ημιευθείας με το σύνορο $S^n = \partial D^{n+1}$. □

## Το αναλλοίωτο της διαστάσεως

Αποδεικνύουμε το αναλλοίωτο της διαστάσεως πρώτα στην περίπτωση των Ευκλείδειων χώρων και στη συνέχεια γενικότερα για πολλαπλότητες.

**Θεώρημα 10.6.6.** *Οι χώροι $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικοί αν και μόνο αν $m = n$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον ο χώρος $\mathbb{R}^m \setminus \{\text{σημείο}\}$, όπου $m \geq 2$, είναι συνεκτικός, ενώ ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \{\text{σημείο}\}$ δεν είναι, έπεται ότι οι χώροι $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικοί. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m, n \geq 2$. Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, τότε οι χώροι $\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ και $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(\mathbf{0})\}$ είναι ομοιομορφικοί. Όμως ο χώρος $\mathbb{R}^k \setminus \{\text{σημείο}\}$ έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με τη σφαίρα $S^{k-1}$. Έπεται ότι οι σφαίρες $S^{m-1}$ και $S^{n-1}$ έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας και έτσι $m = n$. □

**Λήμμα 10.6.7.** *Έστω $U$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, όπου $n \geq 2$. Αν $x \in U$, τότε $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον το $U$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε η σφαίρα $S_\varepsilon(x)$ ακτίνας $\varepsilon$ με κέντρο το $x$ να περιέχεται στο $U$. Θεωρούμε τα ακόλουθα δύο μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} S_\varepsilon(x) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \\ U \setminus \{x\} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \quad \curvearrowright \quad \begin{tikzcd} H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\ H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

όπου στο πρώτο έχουμε τις αντίστοιχες ενθέσεις και στο δεύτερο τους επαγόμενους ομομορφισμούς στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας. Η ένθεση $i$ επάγει ισομορφισμό, γιατί είναι ομοτοπική ισοδυναμία (υπάρχει συστέλλουσσα παραμόρφωση $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \to S_\varepsilon(x)$) και $H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$. Από τη μεταθετικότητα του δεύτερου διαγράμματος έπεται ότι $H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq 0$. □

Υπενθυμίζουμε ότι μια πολλαπλότητα διάστασης $n$ είναι ένας Hausdorff, δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος $X$ του οποίου κάθε σημείο $x$ έχει ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^n$.

**Θεώρημα 10.6.8.** *Ένας τοπολογικός χώρος $X$ δεν μπορεί να είναι πολλαπλότητα διάστασης $m$ και πολλαπλότητα διάστασης $n$, αν $n \neq m$, $n, m \geq 1$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι ο χώρος $X$ είναι πολλαπλότητα διάστασης $m$ και πολλαπλότητα διάστασης $n$ με $n > m \geq 1$. Αν $x \in X$, τότε το $x$ έχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq X$ ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^n$. Εφόσον το $U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$ και ο $X$ είναι πολλαπλότητα διάστασης $m$, έχουμε ότι το $U$ είναι επίσης πολλαπλότητα διάστασης $m$ και άρα υπάρχει ανοικτή περιοχή $V$ του $x$ με $V \subseteq U$ και $V \cong \mathbb{R}^m$. Αφού $U \cong \mathbb{R}^n$, το $V$ είναι ομοιομορφικό με ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $H_{n-1}(V \setminus \{x\}) \neq 0$. Όμως $V \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ και έτσι $H_{n-1}(V \setminus \{x\}) = H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}) = H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$, το οποίο μας δίνει την επιθυμητή αντίφαση που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

## Η ομολογία των επιφανειών

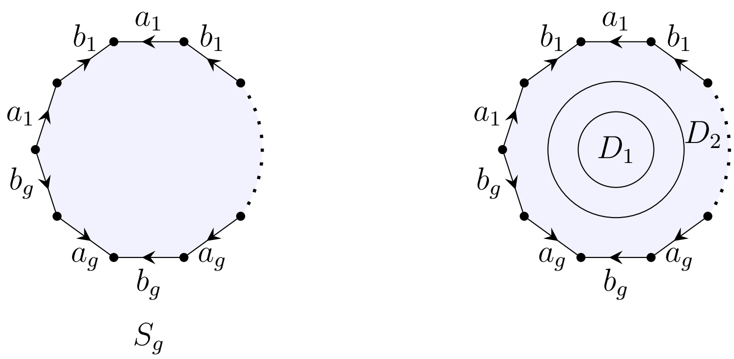
Υπολογίζουμε πρώτα τις ομάδες ομολογίας των κλειστών (δηλαδή, συμπαγών χωρίς σύνορο) προσανατολίσιμων επιφανειών.

**Θεώρημα 10.6.9.** *Έστω $S_g$ η κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Τότε*

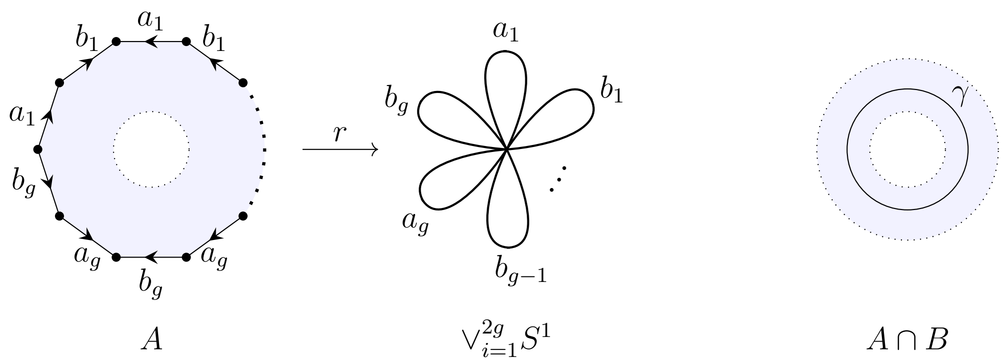
$$H_n(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{αν } n = 0 \textit{ ή } 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \textit{αν } n = 1 \\ 0, & \textit{αν } n \geq 3. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια $S_g$ προκύπτει από μια σφήνα $\vee_{i=1}^{2g} S^1$, $2g$ το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, επισυνάπτοντας ένα κελί διάστασης 2 κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Δηλαδή, επιδέχεται μια πολυγωνική παράσταση, όπως φαίνεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος 10.4. Με άλλα λόγια, η $S_g$ προκύπτει ως χώρος πηλίκο από ένα πολύγωνο με $4g$ το πλήθος πλευρές, ταυτοποιώντας ζεύγη πλευρών σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.

Θεωρούμε κλειστούς δίσκους $D_1$ και $D_2$ στην επιφάνεια, ο ένας εντός του άλλου, όπως φαίνεται στη δεξιά πλευρά του σχήματος 10.4 και τα ανοικτά $A = S_g \setminus D_1$, $B =$




**Σχήμα 10.4**




**Σχήμα 10.5**

Int$D_2$. Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση $r$ από το $A$ στο σύνορό του πολυγώνου $\vee_{i=1}^{2g} S^1$ και ως εκ τούτου το $A$ έχει τον τύπο ομοτοπίας της σφήνας $\vee_{i=1}^{2g} S^1$ των $2g$ κύκλων της οποίας την ομολογία υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας την Άσκηση 7. Το $B$ έχει τον τύπο ομοτοπίας σημείου (περιστέλλεται σε σημείο) και η τομή $A \cap B$ έχει τον τύπο ομοτοπίας του κύκλου (περιστέλλεται στον κύκλο $\gamma$, βλέπε σχήμα 10.5). Συνεπώς, εφόσον οι ομάδες ομολογίας είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο, έχουμε

$$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$H_n(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά .} \end{cases}$$

Για $n > 2$, από το ακόλουθο τμήμα της μακράς ακριβής ακολουθίας Mayer-Vietoris:

$$0 + 0 \cong H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(S_g) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \cong 0$$

προκύπτει ότι $H_n(S_g) = 0$. Για να υπολογίσουμε τις ομάδες $H_2(S_g)$ και $H_1(S_g)$, θεωρούμε το τμήμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_2(S_g) \arrow[r] & H_1(A \cap B) \arrow[r, "\varphi"] & H_1(A) \oplus H_1(B) \arrow[r] & H_1(S_g) \arrow[dllll, rounded corners] \\ H_0(A \cap B) \arrow[r, "\theta"] & H_0(A) \oplus H_0(B) \arrow[r] & H_0(S_g) \arrow[r] & 0, & \end{tikzcd}$$

όπου $\theta(x) = (x, x)$, το οποίο, αφού η $\theta$ είναι $1-1$, μας δίνει το ακριβές τμήμα

$$0 \longrightarrow H_2(S_g) \xrightarrow{\omega} H_1(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\psi} H_1(S_g) \longrightarrow 0.$$

Σημειώνουμε ότι ο ομομορφισμός $\varphi$ επάγεται στην ουσία από την ένθεση της κλάσης του γεννήτορα $\gamma \in A \cap B$ (βλέπε σχήμα 10.5) στον υπόχωρο $A$, αφού $\varphi([\gamma]) = ([\gamma], [\gamma])$ και $H_1(B) = 0$. Όμως $[\gamma] = [a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}] = 0$, αφού η $H_1(A)$ είναι αβελιανή. Άρα ο ομομορφισμός $\varphi$ είναι ο τετριμμένος ($\varphi = 0$) και έτσι $H_2(S_g) \cong \mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathbb{Z}$. Εφόσον $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi = 0$, η $\psi$ είναι ισομορφισμός και συνεπώς $H_1(S_g) \cong H_1(A) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. □

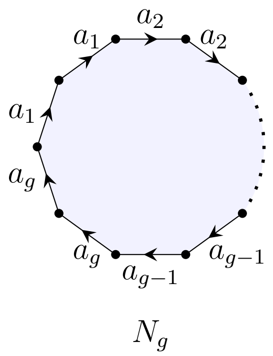
Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τις ομάδες ομολογίας και των κλειστών μη προσανατολίσιμων επιφανειών.

**Θεώρημα 10.6.10.** *Έστω $N_g$ η κλειστή μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Τότε*

$$H_n(N_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n = 0 \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{αν } n = 1 \\ 0, & \text{αν } n \geq 2. \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Η επιφάνεια $N_g$ προκύπτει από μια σφήνα $\vee_{i=1}^{g} S^1$, $g$ το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1, \ldots, a_g$, επισυνάπτοντας ένα κελί διάστασης 2 κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 a_1 \ldots a_g a_g$. Δηλαδή επιδέχεται μια πολυγωνική παράσταση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που σημαίνει ότι η $N_g$ προκύπτει ως χώρος πηλίκο από ένα πολύγωνο με $2g$ το πλήθος πλευρές, ταυτοποιώντας ζεύγη πλευρών σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα.

Εργαζόμενοι ακριβώς όπως πριν, και χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, θα έχουμε τις ακόλουθες διαφορές: $A \simeq \vee_{i=1}^{g} S^1$, άρα $H_1(A) = \mathbb{Z}^g = \langle [a_1] \rangle \oplus \cdots \oplus \langle [a_g] \rangle$, $H_1(B) = 0$




**Σχήμα 10.6**

και έτσι $\varphi([\gamma]) = [a_1^2 \cdots a_g^2] = 2[a_1] + \cdots + 2[a_g] \neq 0$. Εφόσον η απεικόνιση $\varphi$ είναι μονομορφισμός από το ακριβές τμήμα

$$0 \longrightarrow H_2(N_g) \xrightarrow{\omega} H_1(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\psi} H_1(N_g) \longrightarrow 0$$

προκύπτει ότι $H_2(N_g) \cong \text{Im}\,\omega = \text{Ker}\,\varphi = 0$. Για τον υπολογισμό της $H_1(N_g)$, έχουμε

$$H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^g/\text{Ker}\,\psi = \mathbb{Z}^g/\text{Im}\,\varphi = \frac{\langle [a_1] \rangle \oplus \cdots \oplus \langle [a_g] \rangle}{\langle 2[a_1] + \cdots + 2[a_g] \rangle} = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

$\square$

Για τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας πεπερασμένων συμπλεγμάτων κελιών, γενικότερα, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [5].

## Το γενικευμένο θεώρημα της καμπύλης του Jordan

Το κλασικό θεώρημα της καμπύλης του Jordan μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Έστω $K$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ομοιομορφικό με τον κύκλο $S^1$. Τότε το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^2 \setminus K$ αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες και το $K$ είναι το σύνορο (με την τοπολογική έννοια) της καθεμίας.

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε, με τη βοήθεια της ακολουθίας Mayer-Vietoris, μια γενίκευση του θεωρήματος αυτού στον $\mathbb{R}^n$.

**Θεώρημα 10.6.11.** *Δοθείσης μιας εμφυτεύσεως $f : D^k \to S^n$, όπου $0 \leq k \leq n$, έχουμε ότι $\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0$, για κάθε $i$. Ιδιαιτέρως, το κλειστό κελί $f(D^k)$ δεν διαχωρίζει τη σφαίρα $S^n$, δηλαδή, ο χώρος $S^n \setminus f(D^k)$ είναι συνεκτικός.*

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια, ταυτίζουμε τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $D^k$ με τον αντίστοιχο κύβο $I^k$ και συμβολίζουμε την εικόνα $f(D^k)$ με $B$. Σταθεροποιούμε το $n$ και αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος με επαγωγή επί του $k$. Για $k = 0$ το $B$ είναι σημείο. Αν $n = 0$, τότε το $S^n \setminus B$ είναι μονοσύνολο και το συμπέρασμα ισχύει. Αν $n > 0$, τότε $S^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n$ και το συμπέρασμα έπεται πάλι άμεσα, αφού ο $\mathbb{R}^n$ έχει τον τύπο ομοτοπίας σημείου. Αν $k \geq 1$, τότε, προχωρώντας επαγωγικά, υποθέτουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα για $k-1$ και εκφράζουμε το $B$ ως ένωση $B = B_1 \cup B_2$, όπου $B_1 = f(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ και $B_2 = f(I^{k-1} \times [1/2, 1])$. Σημειώνουμε ότι τα $B_i$ είναι κλειστά $k$-κελιά στην $S^n$. Θεωρούμε επίσης το κλειστό $(k-1)$-κελί $\Gamma = f(I^{k-1} \times \{1/2\}) = B_1 \cap B_2$ και το συμπλήρωμά του $X = S^n \setminus \Gamma$ (για το οποίο ισχύει το συμπέρασμα από επαγωγική υπόθεση).

Έστω $a = [\sigma]$ ένα μη μηδενικό στοιχείο της ομάδας $\widetilde{H}_i(S^n \setminus B)$. Τα $X_i = S^n \setminus B_i$, για $i = 1, 2$, είναι ανοικτοί υπόχωροι του $X$ και $X = X_1 \cup X_2$. Από την ακολουθία Mayer-Vietoris προκύπτει το ακόλουθο ακριβές τμήμα

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{i+1}(X) \longrightarrow \widetilde{H}_i(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{H}_i(X_1) \oplus \widetilde{H}_i(X_2) \longrightarrow \widetilde{H}_i(X) \longrightarrow \cdots,$$

όπου $\varphi(a) = \big(i_*(a), j_*(a)\big)$ και $i_*, j_*$ είναι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί (στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας) των ενθέσεων $i : S^n \setminus B \hookrightarrow S^n \setminus B_1$ και $j : S^n \setminus B \hookrightarrow S^n \setminus B_2$, αντίστοιχα. Από την επαγωγική υπόθεση $\widetilde{H}_{i+1}(X) = \widetilde{H}_i(X) = 0$. Άρα $\widetilde{H}_i(X_1 \cap X_2) \cong \widetilde{H}_i(X_1) \oplus \widetilde{H}_i(X_2)$ και συνεπώς ένα από τα στοιχεία $i_*(a), j_*(a)$ είναι επίσης μη τετριμμένο (αφού $a \neq 0$ και $X_1 \cap X_2 = S^n \setminus B$). Ας υποθέσουμε ότι $i_*(a) \neq 0$. Γράφουμε το $B_1$ ως ένωση κλειστών $k$-κελιών $B_1 = B_{11} \cup B_{12}$, όπου $B_{11} = f(I^{k-1} \times [0, 1/4])$ και $B_{12} = f(I^{k-1} \times [1/4, 1/2])$. Όπως πριν, η εικόνα (της εικόνας) του $a$ θα είναι μη τετριμμένη σε τουλάχιστον μια από τις ομάδες $\widetilde{H}_i(S^n \setminus B_{11})$, $\widetilde{H}_i(S^n \setminus B_{12})$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μια (γνησίως) φθίνουσα ακολουθία κλειστώ διαστημάτων

$$[x_1, y_1] \supsetneq [x_2, y_2] \supsetneq \cdots [x_m, y_m] \supsetneq \cdots$$

του $I = [0, 1]$, όπου το μήκος του κάθε διαστήματος είναι το μισό του προηγούμενου, έτσι ώστε η εικόνα του $a$ είναι μη τετριμμένο στοιχείο στην ομάδα $\widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(I^{k-1} \times [x_m, y_m])\big)$. Εφόσον τα μήκη των παραπάνω κλειστών διαστημάτων τείνουν στο μηδέν, η τομή τους είναι μονοσύνολο, δηλαδή $\cap_{i=1}^{\infty}[x_i, y_i] = \{p\}$. Το σύνολο $f(I^{k-1} \times \{p\})$ είναι κλειστό $(k-1)$ -κελί στην $S^n$ το οποίο ισούται με την τομή $\cap_{m=1}^{\infty} D_m$ της γνησίως φθίνουσας ακολουθίας των $k$-κελιών $D_m = f(I^{k-1} \times [x_m, y_m])$. Από επαγωγική υπόθεση $\widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})\big) = 0$. Συνεπώς, η εικόνα του $\sigma$ στον υπόχωρο $S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})$

είναι σύνορο, δηλαδή $\sigma \in \operatorname{Im} \partial_{i+1}$. Έστω, λοιπόν, $\tau$ μια ιδιάζουσα $(i+1)$-αλυσίδα στον $S^n \setminus f(I^{k-1} \times \{p\})$ με $\partial\tau = \sigma$. Το $K = \operatorname{Im} \tau$ είναι συμπαγές ως πεπερασμένη ένωση συμπαγών, αφού είναι η εικόνα των συνεχών απεικονίσεων που ορίζουν τα πεπερασμένα το πλήθος πλέγματα που απαρτίζουν την αλυσίδα $\tau$. Παρατηρούμε ότι η σφαίρα γράφεται ως ένωση ανοικτών ως εξής:

$$S^n = (S^n \setminus K) \cup \big( \cup_{m=1}^{\infty} (S^n \setminus D_m) \big).$$

Εφόσον $S^n \setminus D_m \subseteq S^n \setminus D_{m+1}$ για κάθε $m$, από τη συμπάγεια της $S^n$ έπεται ότι $K \subseteq S^n \setminus D_m$ για κάποιο $m$ και ως εκ τούτου $\partial\tau = \sigma$ στο $S^n \setminus D_m$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι η εικόνα του $a = [\sigma]$ είναι μη τετριμμένο στοιχείο στην $\widetilde{H}_i(S^n \setminus D_m)$. □

**Θεώρημα 10.6.12.** *Έστω $f : S^k \to S^n$ μια εμφύτευση, όπου $n > k \geq 0$. Τότε*

$$\widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^k)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } i = n-k-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

*Απόδειξη.* Αν $k = 0$, τότε $S^n \setminus f(S^0) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Αφού ο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ έχει τον τύπο ομοτοπίας της $S^n$, προκύπτει ότι

$$\widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^0)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } i = n-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για $k \geq 1$, χρησιμοποιούμε επαγωγή και εκφράζουμε τη σφαίρα $S^k$ ως ένωση των δύο ημισφαιρίων $D^k_+$ (άνω) και $D^k_-$ (κάτω) με $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$. Σημειώνουμε ότι καθένα από τα δύο ημισφαίρια είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $D^k$. Έστω $A = S^n \setminus f(D^k_+)$ και $B = S^n \setminus f(D^k_-)$. Τα $A, B$ είναι ανοικτά, η ένωσή τους ισούται με $S^n \setminus f(S^{k-1})$ και η τομή τους με $S^n \setminus f(S^k)$. Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα τα $A, B$ έχουν τετριμμένες ομάδες ανηγμένης ομολογίας. Συνεπώς, από την ακολουθία Mayer-Vietoris προκύπτει ότι $\widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^k)\big) \cong \widetilde{H}_i\big(S^n \setminus f(S^{k-1})\big)$ που μαζί με την επαγωγική υπόθεση ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Θεώρημα 10.6.13** (Το γενικευμένο θεώρημα της καμπύλης του Jordan)**.** *Έστω $n > 0$ και $K$ υποσύνολο της σφαίρας $S^n$ ομοιομορφικό με την $S^{n-1}$. Τότε το συμπλήρωμα $S^n \setminus K$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το $K$.*

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι η $S^n$ είναι χώρος τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και έτσι οι συνιστώσες ενός υπόχωρου ταυτίζονται με τις κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες αυτού.

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για $k = n - 1$, έχουμε ότι $\widetilde{H}_0(S^n \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει ότι το συμπλήρωμα $S^n \setminus K$ αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες, έστω $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$, οι οποίες είναι ανοικτά υποσύνολα της $S^n$ (αφού $S^n$ τοπικά κατά τόξα συνεκτικός χώρος). Έτσι για το (τοπολογικό) σύνορο του $\Sigma_i$, $i \in \{1, 2\}$, έχουμε: $\mathrm{Bd}\Sigma_i = \overline{\Sigma}_i \setminus \mathrm{Int}(\Sigma_i) = \overline{\Sigma}_i \setminus \Sigma_i$.

Συνεπώς, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 = K = \overline{\Sigma}_2 \setminus \Sigma_2$. Αρκεί να δειχθεί η μία ισότητα (λόγω συμμετρίας). Εφόσον το $\Sigma_2$ είναι ανοικτό, κανένα σημείο του δεν είναι οριακό σημείο του $\Sigma_1$ (διαφορετικά κάθε περιοχή του υποτιθέμενου οριακού σημείου θα έτεμνε το $\Sigma_1$ το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$). Ως εκ τούτου $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 \subseteq K$.

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι $K \subseteq \overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1$, αποδεικνύοντας ότι κάθε σημείο του $K$ ανήκει στην κλειστότητα του $\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1$ (το οποίο όμως είναι κλειστό). Δηλαδή, θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ και κάθε ανοικτή περιοχή $U$ του $x$, έχουμε ότι $U \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$. Εφόσον το $K$ είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα $S^{n-1}$, μπορούμε να το εκφράσουμε ως ένωση δύο κλειστών $(n-1)$-κελιών $K_1$ και $K_2$ (ομοιομορφικά αντίτυπα ημισφαιρίων), έτσι ώστε $K_1 \subset U$ (αρκεί να θεωρήσουμε το $K_1$ εντός μιας «μικρής» μπάλας εντός του $U$). Από το Θεώρημα 10.6.11, το κελί $K_2$ δεν διαχωρίζει την $S^n$ και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε μονοπάτι $p$ στο συμπλήρωμα $S^n \setminus K_2$ από σημείο του $\Sigma_1$ σε σημείο του $\Sigma_2$. Αυτό μπορεί να γίνει γιατί $(S^n \setminus K_2) \cap \Sigma_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \{1, 2\}$, αφού $\Sigma_i \cap K = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Im}\, p \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$. Πράγματι, διαφορετικά η εικόνα $\mathrm{Im}\, p$ θα περιείχετο στην ένωση των $\Sigma_1$ και $(S^n \setminus \overline{\Sigma}_1)$ τα οποία είναι ανοικτά, ξένα, και το καθένα από αυτά τέμνει μη τετριμμένα την εικόνα $\mathrm{Im}\, p$ του μονοπατιού $p$ (το $p$ ενώνει σημείο του $\Sigma_1$ με σημείο του $\Sigma_2$). Αυτό όμως αντιφάσκει στη συνεκτικότητα της εικόνας $\mathrm{Im}\, p$.

Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε σημείο $y \in \mathrm{Im}\, p \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1)$. Τότε $y \in \overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1 \subseteq K = K_1 \cup K_2$ και αφού $\mathrm{Im}\, p \subseteq S^n \setminus K_2$, έπεται ότι $y \in K_1$ και άρα $y \in U$. Δηλαδή, $U \cap (\overline{\Sigma}_1 \setminus \Sigma_1) \neq \emptyset$. □

**Παρατήρηση 10.6.14.** Ενδεχομένως ο αναγνώστης θα περίμενε ότι, υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, τα σύνολα $\overline{\Sigma}_1$ και $\overline{\Sigma}_2$ είναι $n$-κελιά. Αυτό όμως δεν ισχύει εν γένει, όπως δεν ισχύει ότι οι συνιστώσες είναι ανοικτές μπάλες. Υπάρχει παράδειγμα εμφύτευσης $S^2 \hookrightarrow S^3$ για την οποία η μια από τις δύο συνιστώσες δεν είναι απλά συνεκτική [3, Example 2B.2].

Τέλος, διατυπώνουμε μια εκδοχή του θεωρήματος για σφαίρες που εμφυτεύονται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ αντί για τη σφαίρα $S^n$.

**Πόρισμα 10.6.15.** *Έστω $K$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ομοιομορφικό με τη σφαίρα $S^{n-1}$, όπου $n > 1$. Τότε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^n \setminus K$ αποτελείται από δύο ακριβώς συνιστώσες, οι οποίες έχουν κοινό σύνορο (τοπολογικά) το $K$.*

*Απόδειξη.* Ταυτίζουμε (ομοιομορφικά) τον χώρο $\mathbb{R}^n$ με τον υπόχωρο $S^n \setminus \{N\}$ της σφαίρας $S^n$, όπου ως συνήθως $N$ είναι ο «βόρειος» πόλος της σφαίρας. Έχουμε αποδείξει ότι το συμπλήρωμα $S^n \setminus K$ έχει δύο συνιστώσες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με κοινό σύνορο $K$. Αφού το $N$ δεν ανήκει στο $K$, θα ανήκει είτε στο $\Sigma_1$ είτε στο $\Sigma_2$. Ας υποθέσουμε ότι ανήκει στο $\Sigma_1$ (ομοίως η άλλη περίπτωση). Τότε το $\Sigma_1 \setminus \{N\}$ είναι συνεκτικό, γιατί το $\Sigma_1$ είναι ανοικτό, συνεκτικό και $n > 1$. Έπεται ότι τα σύνολα $\Sigma_1 \setminus \{N\}$ και $\Sigma_2$ είναι οι συνιστώσες του $\mathbb{R}^n \setminus K$ και το $K$ είναι το κοινό σύνορό τους. □

# Ασκήσεις

10.1 (**Φυσικότητα**) Έστω $X$, $Y$ δύο τοπολογικοί χώροι και $A$, $B$ υπόχωροι των $X$, $Y$, αντίστοιχα. Μια απεικόνιση $f : (X, A) \to (Y, B)$ μεταξύ των ζευγών, είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$, έτσι ώστε $f(A) \subseteq B$. Να δειχθεί ότι κάθε απεικόνιση $f : (X, A) \to (Y, B)$ επάγει ομομορφισμούς $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ στις αντίστοιχες ομάδες σχετικής ομολογίας για τους οποίους το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(Οι απεικονίσεις $i$ και $j$, για κάθε ζεύγος, είναι αυτές που εισάγονται μετά τον Ορισμό 10.2.6.)

10.2 Έστω $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \Gamma \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακολουθία αβελιανών ομάδων. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(1) Η υποομάδα $\varphi(A)$ είναι ευθύς προσθετέος της $B$. Δηλαδή, υπάρχει υποομάδα $K$ της τέτοια, ώστε $B = \varphi(A) \oplus K$.

(2) Υπάρχει ομομορφισμός $\pi : B \to A$, έτσι ώστε $\pi \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$.

(3) Υπάρχει ομομορφισμός $\tau : \Gamma \to B$, έτσι ώστε $\psi \circ \tau = \mathrm{Id}_\Gamma$.

Αν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις τρεις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε λέμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία είναι **διασπώμενη**. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων αβελιανών ομάδων, προκύπτει εύκολα ότι η β.α.α. είναι διασπώμενη αν η ομάδα Γ είναι ελεύθερη αβελιανή.

10.3 Έστω $r : X \to A$ μια συστολή (retraction) από έναν χώρο $X$ σε έναν υπόχωρο $A$. Αποδείξτε ότι $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$ για κάθε $n$.

10.4 Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ οι κατά τόξα συνεκτικές συνιστώσες του $X$ και $A$ ένας υπόχωρος του $X$. Τότε

(1) $H_n(X, A) \cong \oplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda, A \cap X_\lambda)$.

(2) Η ομάδα $H_0(X, A)$ είναι ελεύθερη αβελιανή με διάσταση ίση με το πλήθος των συνιστωσών $X_\lambda$ που έχουν κενή τομή με το $A$.

10.5 Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας $H_n(S^2, A)$ του ζεύγους $(S^2, A)$, όπου το $A$ αποτελείται από δύο σημεία της σφαίρας $S^2$. Υπόδειξη: η απεικόνιση $H_0(A) \to H_0(S^2)$ που επάγεται από την αντίστοιχη ένθεση, απεικονίζει κάθε γεννήτορα της $H_0(A)$ στον γεννήτορα της $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

10.6 Να βρεθεί τύπος για τη συστολή που περιγράφεται στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer.

10.7 Έστω $X, Y$ ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων και $x_0 \in X, y_0 \in Y$ με την ιδιότητα ότι υπάρχουν ανοικτές περιοχές $U, V$ των σημείων $x_0, y_0$, αντίστοιχα, και συστέλλουσες παραμορφώσεις $U \to \{x_0\}, V \to \{y_0\}$. Αν με $X \vee Y$ συμβολίσουμε τη σφήνα των δύο χώρων που προκύπτει, ταυτοποιώντας το $x_0$ με το $y_0$ (δηλαδή τον χώρο πηλίκο $X \sqcup Y/(x_0 \equiv y_0)$), τότε $H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y)$, για κάθε $n > 0$. Γενικεύστε για πεπερασμένο το πλήθος χώρους.

10.8 Οι χώροι $S^1 \times S^1$ και $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας (σε όλες τις διαστάσεις), όμως τα καθολικά τους καλύμματα όχι. Υπόδειξη: το ένα κάλυμμα είναι συμπτύξιμος χώρος, ενώ το άλλο όχι.

10.9 Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένο γράφημα είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με μια σφήνα πεπερασμένων το πλήθος κύκλων και την προηγούμενη άσκηση, υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας ενός τυχαίου πεπερασμένου γραφήματος $X$.

10.10 Για έναν τοπολογικό χώρο $X$ θεωρούμε τον χώρο $Y = X \sqcup_f D^k$ που λαμβάνεται επισυνάπτοντας ένα $k$-κελί στον $X$ μέσω μιας (συνεχούς πάντα) απεικονίσεως $f : S^{k-1} \to X$. Αποδείξτε ότι $H_n(X \sqcup_f D^k) = H_n(X)$ αν $n \neq k, k-1$.

10.11 Η **ανάρτηση** (suspension) $\Sigma X$ ενός τοπολογικού χώρου $X$ είναι ο χώρος πηλίκο που λαμβάνεται από τον $X \times [-1, 1]$, θεωρώντας τα υποσύνολα $X \times \{-1\}$ και $X \times \{1\}$ ως μονοσύνολα. Δηλαδή είναι δύο κώνοι του $X$ κολλημένοι στις βάσεις τους. Αποδείξτε ότι για κάθε χώρο $X$ και κάθε $n$ υπάρχει ισομορφισμός $\widetilde{H}_n(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{n-1}(X)$.

10.12 Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση και την Πρόταση 10.1.13 για να υπολογίσετε εκ νέου τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών.

10.13 Έχοντας υπολογίσει τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών, η έννοια του βαθμού που είδαμε για απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του γενικεύεται ως εξής: Δοθείσης μιας (πάντα συνεχούς) απεικονίσεως $f : S^n \to S^n$, θεωρούμε τον επαγόμενο ομομορφισμό $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Εφόσον η ομάδα $H_n(S^n)$ είναι άπειρη κυκλική, ο επαγόμενος ομομορφισμός θα δίνεται με πολ/μό με έναν ακέραιο. Δηλαδή θα είναι της μορφής $f_*([\sigma]) = k[\sigma]$. Ο ακέραιος $k$ ονομάζεται **βαθμός** της $f$ και συμβολίζεται με $\deg f$. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $\deg \mathrm{Id}_{S^n} = 1$.
(ii) Ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : S^n \to S^n$ έχουν τον ίδιο βαθμό.
(iii) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.
(iv) Αν η $f : S^n \to S^n$ επεκτείνεται σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : D^{n+1} \to S^n$, τότε $\deg f = 0$.
(v) Αν η $f$ είναι ανάκλαση ως προς κάποιο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε $\deg f = -1$.
(vi) Αν η $f = \alpha$ είναι η αντιποδική απεικόνιση, τότε $\deg \alpha = (-1)^{n+1}$.
(vii) Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν είναι επί, τότε $\deg f = 0$.
(viii) Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν έχει σταθερά σημεία, τότε $\deg f = (-1)^{n+1}$.
Υπόδειξη για το (v): έστω ότι η $f$ είναι η $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Κατά τον υπολογισμό των ομάδων ομολογίας των σφαιρών, αποδείξαμε την ύπαρξη ισομορφισμού $\varphi : H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1})$. Έστω $\mu_0 = [+1] - [-1] \in H_0(S^0)$, $\mu_1 \in H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1)$ ο συνήθης γεννήτορας ($t \mapsto e^{2\pi i t}$) της $H_1(S^1)$ και ορίζουμε τον γεννήτορα $\mu_n$ της $H_n(S^n)$ μέσω της σχέσης $\varphi(\mu_n) = \mu_{n-1}$. Η «φυσικότητα» του $\varphi$ δίνει ότι $f_*(\mu_n) = -\mu_n$.

10.14 Έστω $f : S^n \to S^n$ μια απεικόνιση μηδενικού βαθμού. Αποδείξτε ότι υπάρχουν σημεία $x, y \in S^n$, έτσι ώστε $f(x) = x$ και $f(y) = -y$.

10.15 Για έναν τοπολογικό Hausdorff χώρο και $x \in X$, οι ομάδες **τοπικής ομολογίας** του $X$ στο $x$ είναι οι ομάδες $H_n(X, X - \{x\})$. Να δειχθεί ότι:

(1) $H_n(X, X - \{x\}) \cong H_n(U, U - \{x\})$, για κάθε ανοικτή περιοχή $U$ του $x$.

(2) $H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } n \neq m \\ 0, & \text{διαφορετικά .} \end{cases}$

10.16 Αποδείξτε ότι κάθε ομοιομορφισμός $f : D^n \to D^n$ απεικονίζει το σύνορο επί του συνόρου, δηλαδή $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$.

10.17 Χρησιμοποιήστε ομάδες τοπικής ομολογίας για να αποδείξετε ότι μια πολλαπλότητα διάστασης $m$ και μια πολλαπλότητα διάστασης $n$ δεν είναι ομοιομορφικές, αν $m \neq n$.

# Βιβλιογραφία

[1] G. E. Bredon. Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 139, Springer, 1993.

[2] S. Eilenberg and N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.

[3] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[4] P. J. Hilton and S. Wylie. Homology Theory, Cambridge University Press, 1967.

[5] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[6] J. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesiley, 1984.

[7] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.

# Ευρετήριο

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας