

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.**  
**615. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**3 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με  $2 + \frac{1}{2}$  μονάδες.
- Ο μέγιστος βαθμός λαμβάνεται με την συμπλήρωση 10 μονάδων.
- Να λύσετε όσα θέματα θέλετε.
- Εξετάζετε με ανοιχτές τις σημειώσεις.
- Ο συμβολισμός των διατυπώσεων είναι ο ίδιος με αυτόν στις σημειώσεις.
- Ο,τιδήποτε υπάρχει στις σημειώσεις να το παίρνετε έτοιμο.
- Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.
- Μην διστάζετε να κάνετε σχήματα.

I. (Κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση έχει την ιδιότητα  $N$  του Lusin) Αποδείξτε την Πρόταση 4.2.3.1 των σημειώσεων.

- II. 1. Αποδείξτε την Πρόταση 5.3.2.4 των σημειώσεων.  
2. Βρείτε τον καθετο χώρο της προσανατολισμένης

$$S = \{t \in \mathbb{R}^3 \mid t_1^2 + t_2^2 - t_3 = 0\} \in \mathcal{M}_2^{\circ}(\mathbb{R}^3)$$

στο  $t \in S$  (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της  $S$ ).

III. (Όγκος της εικόνας άκαμπτης κίνησης ή ομοθεσίας μιας πολλαπλότητας) Αποδείξτε την Πρόταση 6.3.1 των σημειώσεων.

- IV. 1. Διατυπώστε το λήμμα του Poincaré (Θεώρημα 9.1.3.1 των σημειώσεων) μέσω συνομολογιών του de Rham.  
2. (Αρχή της ομοτοπίας) Αποδείξτε το Θεώρημα 8.3.1 των σημειώσεων

V. Μια από τις τέσσερις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις του Maxwell) είναι η εξίσωση των Maxwell-Faraday (νομός της επαγωγής του Faraday), η οποία είναι η ακόλουθη

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

όπου

$$E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) \mapsto E(t, x)$$

το ηλεκτρικό πεδίο και

$$B: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) \mapsto B(t, x)$$

το μαγνητικό πεδίο. Δείξτε ότι αν το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό (ανεξάρτητο του χρόνου  $t$ ), τότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό.