Άλγεβρα ΙΙ 2023–24

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(1) Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Έστω

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Δείξτε ότι ο R είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Q})$ και ότι για κάθε $\mathbb{Z}$-υποπρότυπο M του $\mathbb{Q}$, το σύνολο

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι δεξιό ιδεώδες του R. Δείξτε ότι

i) ο R είναι αριστερός δακτύλιος της $Noether$.
ii) ο R δεν είναι δεξιός δακτύλιος της $Noether$.
iii) ο R δεν είναι αριστερός δακτύλιος του $Artin$.
iv) ο R δεν είναι δεξιός δακτύλιος του $Artin$.

Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}^2$ δεν είναι ημιαπλό R-πρότυπο γιατί το

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

δεν έχει συμπλήρωμα.

(2) Θεωρούμε τον δακτύλιο $C([0,1])$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$.

i) Είναι ο $C([0,1])$ δακτύλιος της $Noether$;
ii) Είναι ο $C([0,1])$ δακτύλιος του $Artin$;
iii) Είναι ο $C([0,1])$ ημιαπλός δακτύλιος;

(Υπόδειξη: για κάθε $S \subseteq [0,1]$, το σύνολο $\{f \in C[0,1] \mid f|_S = 0\}$ είναι ιδεώδες του $C([0,1])$.)

(3) Έστω R δακτύλιος με μονάδα και $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Δείξτε ότι τα αριστερά ιδεώδη του $M_n(R)$ είναι της μορφής

$$M_{n\times 1}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in I \right\},$$

όπου I είναι αριστερό R-υποπρότυπο του R^n (αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τα δέξια ιδεωδή).

ii) Δείξτε ότι τα ιδεώδη του $M_n(R)$ είναι της μορφής $M_n(J)$ όπου J ιδεώδες του R.
iii) Δείξτε ότι ο $M_n(R)$ είναι αριστερός (αντίστοιχα δεξιός) δακτύλιος της $Noether$ (αντίστοιχα του $Artin$) αν και μόνο ο R είναι αριστερός (αντίστοιχα δεξιός) δακτύλιος της $Noether$ (αντίστοιχα του $Artin$).
iv) Δείξτε ότι ο $M_n(R)$ είναι ημιαπλός αν και μόνο ο R είναι ημιαπλός.
v) Δείξτε ότι κάθε ομομορφική εικόνα του $M_n(R)$ είναι της μορφής $M_k(S)$ για κάποιο δακτύλιο S και $k \in \mathbb{N}^*$.
vi) Δείξτε ότι αν $M_{n_1}(D_1) \cong M_{n_2}(D_2)$ όπου $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ και D_1, D_2 δακτύλιοι διαίρεσης, τότε $D_1 \cong D_2$ (ακόμα και αν $n_1 \neq n_2$).

(4) Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης.

i) Δείξτε ότι το κέντρο του D είναι ένα σώμα K, και άρα ο D είναι K-άλγεβρα.
ii) Έστω ότι ο D είναι άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης επί ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος K. Δείξτε ότι $D = K$.
iii) Αν K είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και A είναι μια πεπερασμένης διάστασης K-άλγεβρα, τότε η A είναι ημιαπλή αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με το γινόμενο αλγεβρών πινάκων με συντελεστές στο K.