Κανονική διάσπαση μιας αναπαράστασης

Έστω (V,ρ) μια αναπαράσταση της G.

Τότε $V = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i V_i$ όπου $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G) = \{ \overset{\chi_1}{V_1}, \dots, \overset{\chi_t}{V_t} \}$

Έχουμε $n_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$, οπότε τα n_i είναι μοναδικά ορισμένα

Έστω $U_i = n_i V_i \ \forall\, i = 1, \dots, t$ Τότε $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_t$ $(*)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω p_i η προβολή $V \longrightarrow U_i$. Τότε

$p_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1}) \rho(g)$, οπότε η διάσπαση $(*)$ είναι μοναδική

<u>Απόδ</u> Θέτουμε $q_i := \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1}) \rho(g)$

$$q_i\big|_{V_j} \underset{\text{Μαθ.16}}{=} \frac{\chi_i(1)}{|G|} \cdot \frac{|G|}{\chi_j(1)} \langle \chi_i, \chi_j \rangle \mathrm{id}_{V_j} = \frac{\chi_i(1)}{\chi_j(1)} \cdot \langle \chi_i, \chi_j \rangle \mathrm{id}_{V_j} = \begin{cases} \mathrm{id}_{V_i} & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$$

Αν τωρα $v \in V$ και $v = u_1 + \dots + u_t$ με $u_i \in U_i$ έχουμε

$q_i(v) = q_i(u_1) + \dots + q_i(u_t) = u_i$

<u>Προσοχή</u>: Τα V_i εξαρτώνται από τη βάση που χρησιμοποιούμε

V_1	1	1
V_2	1	-1

<u>Παράδειγμα</u>: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, s\}$

Έστω $V = \mathbb{R}^4$, $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(\rho(1)+\rho(s)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(\rho(1)-\rho(s)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(x_1+x_2, x_1+x_2, x_3+x_4, x_3+x_4)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} p_1 = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle = U_1$$

$$p_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(x_1-x_2, -x_1+x_2, x_3-x_4, -x_3+x_4)$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} p_2 = \langle (1,-1,0,0), (0,0,1,-1) \rangle = U_2$$

$$\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$$

Από εκεί και πέρα, $U_1 = \underbrace{\langle (1,1,0,0) \rangle}_{\cong V_1} \oplus \underbrace{\langle (0,0,1,1) \rangle}_{\cong V_1}$

$= \underbrace{\langle (1,1,1,1) \rangle}_{\cong V_1} \oplus \underbrace{\langle (1,1,-1,-1) \rangle}_{\cong V_1}$

και γενικότερα U_1 είναι το ευθύ άθροισμα δύο οποιωνδήποτε διακριτών ευθειών μέσα στο U_1

Το Θεώρημα Jordan-Hölder για πρότυπα

Έστω R δακτύλιος, M R-πρότυπο, $M \neq 0$

<u>Ορισμός</u>: Μια <u>σειρά σύνθεσης</u> του M είναι μια σειρά προτύπων $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ τ.ω. M_i / M_{i-1} είναι απλό R-πρότυπο $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Τα M_i / M_{i-1} λέγονται <u>παράγοντες σύνθεσης</u> και το n λέγεται <u>μήκος της σειράς</u>.

<u>Παρατήρηση</u>: M/N απλό $\Leftrightarrow$ Τα μόνα υποπρότυπα του M που περιέχουν το N είναι το M και το N (N maximal)

<u>Θ</u>. M έχει (πεπερασμένη) σειρά συνθεσης $\Leftrightarrow$ M προτυπο της Noether και του Artin

<u>Θ</u>. R Artin $\Rightarrow$ R Noether
(Θα τα δούμε στο Θ. Hopkins-Levitzki)

<u>Πόρισμα</u> R Artin $\Rightarrow$ Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-προτυπο είναι της Noether και του Artin

<u>Πόρισμα</u>: A k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης
$\Rightarrow$ Κάθε A-πρότυπο έχει σειρά σύνθεσης

$\underline{\Theta}$ (Jordan-Hölder)

Αν $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$ (1)

και $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{m-1} \subsetneq N_m = M$ (2)

είναι δύο σειρές σύνθεσης του M, τότε $m = n$ και υπάρχει αντιστοιχία $f : \{M_i/M_{i-1} : i = 1, \dots, n\} \leftrightarrow \{N_i/N_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$ τ.ώ. $M_i/M_{i-1} \cong f(M_i/M_{i-1})$

Ισοδύναμα, υπάρχει $\sigma \in S_n$ τ.ω. $M_i/M_{i-1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)-1}$

<u>Αποδ.</u> Επαγωγή στο ελάχιστο μήκος σειράς για ένα πρότυπο.
(ή στο $\dim_k M$ για R k-άλγεβρα πεπ. διάστασης)

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά (1) έχει ελάχιστο μήκος.

Αν $n = 1$, τότε το M είναι απλό και η μόνη σειρά σύνθεσης που έχει το M είναι $0 = M_0 \subsetneq M_1 = M$.

Έστω $n > 1$. Έχουμε $m \geq n$. Θέτουμε $K = M_{n-1} \cap N_{m-1}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $M_{n-1} = N_{m-1}$, τότε $K = M_{n-1} = N_{m-1}$. Τότε από την υπόθεση επαγωγής για το K έχουμε $n-1 = m-1$ και οι παράγοντες των σειρών $0 = M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} = K$ και $0 = N_0 \subsetneq \dots \subsetneq N_{n-1} = K$ είναι οι ίδιοι. Επίσης $M/M_{n-1} = M/K = M/N_{n-1}$
- Αν $M_{n-1} \neq N_{m-1}$ τότε $K \neq M_{n-1}$ και $K \neq N_{m-1}$, αφού M_{n-1}, N_{m-1} μεγιστικά. Για τον ίδιο λόγο $M_{n-1} + N_{m-1} = M$. Από το 2º Θ.Ι. έχουμε $M_{n-1}/K \cong M/N_{m-1}$ και $N_{m-1}/K \cong M/M_{n-1}$ <u>απλά</u>

M Noether & Artin $\Rightarrow K$ Noether & Artin

Άρα το K έχει σειρά σύνθεσης

$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K$

Οπότε παίρνουμε τις παρακάτω σειρές σύνθεσης για το M:

$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M \quad (*)$

$0 = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_{l-1} \subsetneq K_l = K \subsetneq N_{m-1} \subsetneq M \quad (**)$

Όμως το M_{n-1} έχει σειρά σύνθεσης με μήκος $n-1$, οπότε

απο την επαγωγική υπόθεση $l+1 = n-1$ και η σειρά $(*)$

έχει τους ίδιους παράγοντες σύνθεσης με τη σειρά

$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M$

Επίσης το N_{m-1} έχει σειρά σύνθεσης με μήκος $l+1 = n-1$

οπότε απο την επαγωγική υπόθεση η σειρά $(**)$

έχει τους ίδιους παράγοντες σύνθεσης με τη σειρά

$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{m-1} \subsetneq M$

Άρα $m-1 = l+1 = n-1 \Rightarrow \boxed{m=n}$

Οι παράγοντες σύνθεσης της σειράς $(*)$ είναι:

$K_1/K_0, K_2/K_1, \dots, K_l/K_{l-1}, M_{n-1}/K \cong M/N_{m-1}, M/M_{n-1}$

Οι παράγοντες σύνθεσης της σειράς $(**)$ είναι:

$K_1/K_0, K_2/K_1, \dots, K_l/K_{l-1}, N_{n-1}/K \cong M/M_{n-1}, M/N_{n-1}$

Επομένως οι σειρές (1) & (2) έχουν τους ίδιους παράγοντες σύνθεσης.

Παρατήρηση:

Αν M ημιαπλό, Noether & Artin τότε $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, M_i απλά

$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \subsetneq \ldots \subsetneq M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = M$

Έστω $N_j = M_1 \oplus \ldots \oplus M_j$

Τότε $N_j \oplus M_{j+1} / N_j \cong M_{j+1} / M_{j+1} \cap N_j \cong M_j$

Παρατήρηση :

Οι σειρές σύνθεσης μας επιτρέπουν να μελετήσουμε τη θεωρία αναπαραστάσεων μη ημιαπλών αλγεβρών, όπως π.χ. η kG όταν $\chi\alpha\rho k \mid |G|$.