<u>Προταση</u> : Αν $u := \sum \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$ και τα λ_g είναι αλγεβρικοί ακέραιοι, τοτε το u είναι ακέραιο επι του $\mathbb{Z}$.

<u>Αποδ</u> Έστω $C_1, \dots, C_t$ οι κλάσεις συζυγίας της G και $s_j \in C_j \ \forall j$

Τοτε $u = \sum \lambda_{s_j} e_j$ όπου $e_j = \sum\limits_{g \in C_j} g$

Αρκει ν.δ.ο. το e_j είναι ακέραιο επι του $\mathbb{Z}$

Για καθε $i,j \in \{1, \dots, t\}$ εχουμε $e_i e_j \in Z(\mathbb{C}[G])$

οποτε το $e_i e_j$ γραφεται ως γραμμικός συνδυασμος των $e_1, \dots, e_t$

και μάλιστα με ακέραιους συντελεστές. Αρα το

$\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_t$ είναι υποδακτύλιος του $Z(\mathbb{C}[G])$ που

είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

Αρα τα $e_1, \dots, e_t$ είναι ακέραια επι του $\mathbb{Z}$

<u>Πορισμα</u>: $\omega_{\chi_i}(u) = \dfrac{\chi_i(u)}{\chi_i(1)}$ είναι αλγεβρικος ακέραιος

<u>Πόρισμα</u>: $\chi_i(1) \mid |G| \quad \forall i = 1, \dots, t$

<u>Αποδ.</u> Έστω $u = \sum\limits_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g$

Αφου τα χ είναι συναρτήσεις κλάσης, έχουμε $u \in Z(\mathbb{C}[G])$

Επίσης τα $\chi(g^{-1})$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι, οποτε το παραπάνω

πόρισμα μας δίνει ότι ο αριθμος: $\dfrac{1}{\chi_i(1)} \sum\limits_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_i(g)$

είναι αλγεβρικος ακέραιος $\Rightarrow$

$$\frac{|G|}{\chi_i(1)} \cdot \langle \chi_i, \chi_i \rangle = \frac{|G|}{\chi_i(1)}$$ είναι αλγεβρικός ακέραιος

Αφού $\frac{|G|}{\chi_i(1)} \in \mathbb{Q}$, προκύπτει ότι $\frac{|G|}{\chi_i(1)} \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα Burnside

Ορισμός: Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν υπάρχουν κανονικές υποομάδες $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_k = G$ τ.ω. G_j / G_{j-1} είναι αβελιανή $\forall j = 1, \ldots, k$

Θεώρημα: Αν $|G| = p^a q^b$ όπου p, q πρώτοι και $a, b \in \mathbb{N}$, τοτε η G είναι επιλύσιμη.

Αποδ. Έστω $p^a q^b$ το μικρότερο γινόμενο δυνάμεων δύο πρώτων για το οποίο ισχύει ότι η G δεν είναι επιλύσιμη

Η G είναι απλή, γιατί αν $H \trianglelefteq G$, $H \neq \{1\}, G$ τοτε λόγω ελαχιστικότητας της G, οι ομάδες H και G/H είναι επιλύσιμες, και άρα η G είναι επιλύσιμη.

Αν $ab = 0$, τοτε η G είναι επιλυσιμη, άρα $a \neq 0, b \neq 0$

Επίσης η G δεν είναι αβελιανή και το κέντρο της είναι τετριμμένο (αφού είναι απλή)

Έστω S μια p-υποομάδα Sylow της G.

$Z(S) \neq \{1\}$, αφού S p-ομάδα.

Έστω $x \in Z(S)$, $x \neq 1$

Έχουμε $|Cl(x)| = |G| / |G_x|$ όπου $G_x = \{ g \in G \mid gx = xg \}$

Έχουμε $S \leq G_x$, άρα $|Cl(x)| = q^d$ για κάποιο $0 \leq d \leq b$

Αν $d = 0$, τότε $x \in Z(G) = \{1\}$: Άτοπο

Άρα $1 \leq d \leq b$.

Αφού το x δεν είναι συζυγές με το 1, είδαμε στο Μάθημα 17

ότι $\sum_{i=1}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x) = 0$ όπου $Irr(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$

Αν χ_1 είναι ο τετριμμένος χαρακτήρας, τότε $\sum_{i=2}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x) = -1$

Αν όποτε $\chi_i(x) \neq 0$ έχουμε $q \mid \chi_i(1)$ για $i \geq 2$, τότε ο αριθμός

$\frac{1}{q} \sum_{i=2}^{t} \chi_i(1)\chi_i(x)$ είναι αλγεβρικός ακέραιος και άρα $-\frac{1}{q}$

είναι αλγεβρικός ακέραιος : Άτοπο

Άρα υπάρχει χ_i με $i \geq 2$ τ.ω. $\chi_i(x) \neq 0$ και $q \nmid \chi_i(1)$.

Έστω $e = \sum_{g \in Cl(x)} g \in Z(\mathbb{C}[G])$

Έχουμε ότι το $\omega_{\chi_i}(e)$ είναι αλγεβρικός ακέραιος

$$\omega_{\chi_i}(e) = \frac{\chi_i(e)}{\chi_i(1)} = q^d \frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$$

Αφού $\text{μκδ}(q^d, \chi_i(1)) = 1$, υπάρχουν ακέραιοι α, β τ.ω.

$$\alpha q^d + \beta \chi_i(1) = 1 \Rightarrow \alpha q^d \frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)} + \beta \chi_i(x) = \frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$$

Άρα $\frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)} \in \mathbb{C}$ είναι αλγεβρικός ακέραιος

Έστω $\alpha_1 := \frac{\chi_i(x)}{\chi_i(1)}$ και έστω $p(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του α_1

στο $\mathbb{Q}[x]$. Έχουμε $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (ιδιότητα αλγ. ακεραίων)

Αν $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι οι ρίζες του $p(x)$, τότε κάθε α_i είναι

το άθροισμα $\chi_i(1)$ ριζών της μονάδας διαιρούμενες από $\chi_i(1)$

Εχουμε $|\alpha_i| \leq 1$. Ο σταθερός όρος του $p(x)$ είναι $\pm \prod \alpha_i \in \mathbb{Z}$

Εχουμε $|\prod \alpha_i| = \prod |\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow \prod \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$

Αν $\prod \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$: Ατοπο

Αν $\prod \alpha_i = 1$, τοτε $|\alpha_1| = 1$, και άρα $|\chi_i(x)| = \chi_i(1)$

$\Rightarrow \chi_i(x) = \chi_i(1) \cdot z$ για κάποια ρίζα της μονάδας $z \in \mathbb{C}$

δηλ. $\rho_i(x) = z \cdot id$

Εστω $N := Ker\rho_i$

Τοτε $G/N \cong Im\rho_i$

$x \cdot N \mapsto \rho_i(x)$

$\rho_i(x) \in Z(Im\rho_i) \Rightarrow xN \in Z(G/N)$

Αρα $(gN)(xN) = (xN)(gN) \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow \quad g^{-1}x^{-1}gx \in N \quad \forall g \in G$

Αφου $x \notin Z(G)$, υπάρχει $g \in G$ τ.ω. $g^{-1}x^{-1}gx \neq 1$

Αρα $N \neq \{1\}$

G απλη $\Rightarrow N = G \Rightarrow \rho_i = \rho_1$: Ατοπο.

<u>Πορισμα</u>: Αν G μη αβελιανη απλή πεπερασμένη ομαδα, τότε η τάξη της G έχει τουλάχιστον 3 πρώτους διαιρέτες