Σημειώσεις από το μάθημα 'Αλγεβρας 2 στις 15/05/24

Πρόταση 1. *Έστω G αβελιανή ομάδα και k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τότε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της G πάνω από το k είναι μονοδιάστατη.*

Απόδειξη. 'Εστω (ρ, V) ανάγωγη αναπαράσταση της G πάνω από το k. Έχουμε δει ότι αν $g \in Z(G)$ τότε $\rho(g) \in k^*$ (από λήμμα του Schur αφού λόγω μεταθετικότητας $\rho(g) \in \mathrm{End}_{kG}(V) \backslash \{0\}$). Συνεπώς, αν $G = Z(G)$ (δηλαδή G αβελιανή), τότε $\rho(G) \subseteq k^*$ και άρα κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του V είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της G. Αφού όμως η V είναι ανάγωγη, τότε $\dim_k V = 1$. □

Πρόταση 2. *Έστω G ομάδα και k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τότε οι μονοσιάστατες αναπαραστάσεις της G πάνω από το k είναι οι ακριβώς οι ανάγωγες αναπαραστάσεις που παραγοντοποιούνται μέσω της αβελιανοποίησης G/G', δηλαδή αυτές όπου η G' δρα τετριμμένα.*

Απόδειξη. Μια μονοδιάστατη αναπαράσταση της G είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $G \to k^* = \mathrm{GL}_1(k)$. Αφού η ομάδα k^* είναι αβελιανή τότε κάθε τέτοιος ομομορφισμός παραγοντοποιείται μέσω της G' (υπενθύμιση, η G' ορίζεται μοναδικά ως η μέγιστη υποομάδα H της G' για την οποία το πηλικο G/H είναι αβελιανό). Αντιστρόφως, μία ανάγωγη αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}_k(V)$ της G που παραγοντοποιείται μέσω της G/G', επάγει μια ανάγωγη αναπαράσταση $\rho' : G \to \mathrm{GL}_k(V)$ η όποια, αφού k είναι αλγεβρικά κλειστό και G/G' αβελιανή, είναι μονοδιάστατη από την προηγούμενη πρόταση. □

Άσκηση 1. *Κατασκευή πινάκων χαρακτήρων για τις ομάδες Q_8 και D_4 (πάνω από το $\mathbb{C}$).*

Λύση. 1. quaternion group $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Table 1: Πίνακας πολλαπλασιαμού της Q_8.

	-1	i	j	k
-1	1	-i	-j	-k
i	-i	-1	k	-j
j	-j	-k	-1	i
k	-k	j	-i	-1

Μπορούμε να δούμε ότι οι κλάσεις συζυγίας της Q_8 είναι οι : $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$. Συνεπώς, πρέπει να βρούμε 5 ανάγωγους χαρακτήρες. Μπορούμε πρώτα να ψάξουμε για μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της Q_8, ψάχνοντας για αβελιανά πηλικα της. Έχουμε, για παράδειγμα:

$$Q_8/\langle i \rangle = Q_8/\{\pm 1, \pm i\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Η $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ έχει δύο μη ισόμορφες ανάγωγες (μονοδιάστατες αναπαραστάσεις), την τετριμμένη και την αναπράσταση $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*; 0 \mapsto 1, 1 \mapsto -1$ (θεωρούμε πως έχουμε προσθετικό συμβολισμό στην $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Αυτές επάγουν αντίστοιχα την τετριμμένη αναράσταση και την μονοδιάστατη αναπαράσταση $\rho_i = \chi_i$ της ομάδας Q_8 όπως φαίνεται στον πίνακα (Table 2). Ομοίως, έχουμε $Q_8/\langle j \rangle \cong Q_8/\langle k \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ και παίρνουμε τους μονοδιάστατους χαρακτήρες χ_j, χ_k.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δούμε πως η μικρότερη κανονική υποομάδα H της Q_8 για την οποία η Q_8/H είναι αβελιανή είναι η $\{\pm 1\}$. Αυτό γιατί η $Q_8/\{\pm 1\}$ είναι αβελιανή ως τάξης 4 και η $\{\pm 1\}$ δεν περιέχει μικρότερη τέτοια υποομάδα (αφού η Q_8 δεν είναι η ίδια αβελιανή). Άρα, η $Q_8/\{\pm 1\}$ είναι η αβελιανοποίηση της Q_8 και οι ανάγωγοι χαρακτήρες της πρώτης μας δίνουν όλους τους μονοδιάστατους χαρακτήρες της δεύτερης. Μπορούμε, τώρα, να δούμε ότι $Q_8/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \pm 1 \mapsto (0,0), \pm i \mapsto (1,0), \pm j \mapsto (0,1), \pm k \mapsto (1,1)$ και οι 4 ομομορφισμοί $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ μας δίνουν τους 4 μονοδιάστατους χαρακτήρες του πίνακα.

Σε κάθε περίπτωση, ξέρουμε τώρα πως λείπει ένας ανάγωγος χαρακτήρας, τον οποίο μπορούμε να βρούμε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Για παράδειγμα, θα είναι βαθμού 2 λόγω της σχέσης
$\chi_{\tau\epsilon\tau}(1)^2 + \chi_i(1)^2 + \chi_j(1)^2 + \chi_k(1)^2 + +\chi_5(1)^2 = |Q_8| = 8$. Γενικότερα, οι σχέσεις ορθογωνιότητας αντιστοιχούν σε εσωτερικά γινόμενα κατα στήλες και κατα γραμμές:

$$\sum_{g\in G} \chi_\lambda(g)\overline{\chi_\mu(g)} = \delta_{\lambda\mu}|G| \Leftrightarrow \text{γραμμη-}\lambda \cdot \text{γραμμή-}\mu = \delta_{\lambda\mu} \cdot |G|,$$

και

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g_\lambda)\overline{\chi(g_\mu)} = \delta_{\lambda\mu}|G|/|\mathrm{cl}(g_\mu)| \Leftrightarrow \text{στήλη-}\lambda \cdot \text{στήλη-}\mu = \delta_{\lambda\mu} \cdot |G|/|\mathrm{cl}(g_\mu)|$$

(όπου g_λ, g_μ ανήκουν στις κλάσεις συζυγίας των στηλών λ και μ, αντίστοιχα).

Από τη σχέση στήλη-3 $\cdot$ στήλη-3 $= 8/2 = 4$, δηλαδή $1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + \chi_5(\pm i)^2 = 4$ παίρνουμε $\chi_5(\pm i) = 0$ και με τον ίδιο τρόπο $\chi_5(\pm j) = \chi_5(\pm k) = 0$. Τέλος, από την σχέση στήλη-1 $\cdot$ στήλη-2 $= 0$ παίρνουμε $1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot \chi_5(-1) = 0$, που μας δίνει $\chi_5(-1) = -2$.

Σημείωση: Στην τάξη δεν δικαιολογήσαμε ακριβώς έτσι την εύρεση του χ_5 αλλά είπαμε καταρχάς ότι αφού ο χ_5 είναι ο μοναδικός ανάγωγος χαρακτήρας διάστασης 2 τότε θα πρέπει να είναι αναλλοίωτος κάτω από πολλαπλασιασμό με όλους τους μονοδιάστατους χαρακτήρες (γιατί μονοδιάστατος $\cdot$ ανάγωγος $=$ ανάγωγος). Άρα,
$\chi_5(\pm i) = \chi_5(\pm j) = \chi_5(\pm k) = 0$. Επίσης, αφού ο χ_5 είναι ανάγωγος τότε
$\chi_5(1)^2 + \chi_5(-1)^2 = 8 \Rightarrow \chi_5(-1) = \pm 2$. Αν, όμως, $\chi_5(-1) = 2$ και $(\rho_5, \mathbb{C}^2)$ η αντίστοιχη ανάγωγη αναπαράσταση, τότε η μοναδική δυνατότητα για το $\rho_5(-1)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, αφού έχει δυο ιδιοτιμές $\in \{\pm 1\}$ (το -1 είναι στοιχείο τάξης 2) με άθροισμα 2. Σε αυτήν την περίπτωση, η υποομάδα $\{\pm 1\} \subseteq Q_8$ θα δρα τετριμμένα στον $\mathbb{C}^2$ και άρα η ρ_5 παραγοντοποιείται μέσω της $Q_8/\{\pm 1\}$ που έχει τάξη 4 και είναι συνεπώς αβελιανή. Αυτό είναι άτοπο γιατί τότε η ρ_5 δεν μπορεί να είναι ανάγωγη αφού δεν είναι μονοδιάστατη. Άρα $\rho_5(-1) = -2$. Ο πρώτος τρόπος είναι πιο "άμεσος" στην συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά αυτος ο δεύτερος τρόπος θα δούλευε στην περίπτωση που γνωρίζαμε πως έχουμε μοναδικο μονοδιάστατο χαρακτήρα αλλά κι άλλους χαρακτήρες μεγαλύτερου βαθμού τους οποίους δεν γνωρίζουμε (λείπουν δηλαδή γραμμές από τον πίνακα.)

Για την ανάγωγη αναπαράσταση της Q_8 με χαρακτήρα χ_5 θεωρούμε την quaternion algebra $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ με σχέσεις πολλαπλασιασμού για τα i, j, k όπως στην Q_8 και όπου το $-1 \in Q_8$ έχει ταυτιστεί με το $-1 \in \mathbb{R}$. Η $\mathbb{H}$ είναι μια πραγματική άλγεβρα (όντως υπάρχει) διάστασης 4 που αποκτά δομή $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου διάστασης 2 μέσω της εμφύτευσης δακτυλίων $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \subseteq \mathbb{H}$ (σχόλιο: δεν είναι όμως $\mathbb{C}$-άλγεβρα γιατι $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \not\subseteq Z(\mathbb{H})$ αφού π.χ. ij=k=-ji). Η $\mathbb{H}$ γίνεται Q_8-αναπαράσταση αν θεωρήσουμε τη δράση της $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subseteq \mathbb{H}$ στην $\mathbb{H}$ με αντίστροφο πολλαπλασιασμό απο τα δεξία, δηλαδή $z * h = hz^{-1}$ για $z \in Q_8, h \in \mathbb{H}$ (σχόλιο: ο αρίστερος πολλαπλασιαμός δεν

Table 2: Πίνακας χαρακτήρων της Q_8.

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
$\chi_{\tau\epsilon\tau}$	1	1	1	1	1
χ_i	1	1	1	-1	-1
χ_j	1	1	-1	1	-1
χ_k	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

μετατίθεται με τη δράση του $\mathbb{C}$ στην $\mathbb{H}$ που θεωρούμε). Μια βάση της $\mathbb{H}$ ως $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου είναι το $\{1, j\}$, και ως προς αυτήν τη βάση η δράση της Q_8 είναι:

$$-1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

που δίνει τον χαρακτήρα χ_5.

2. διεδρική ομάδα $D_4 = \langle a, b | a^1 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$, όμαδα συμμετριών του τετραγώνου. (*διόρθωση, στην τάξη είχαμε γράψει κατα λάθος* $(ab)^4 = 1$).

   Λόγω της σχέσης $ab = ba^{-1}$ μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία της D_4 στη μορφή $b^i a^j$, δηλαδή $D_4 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ και οι κλάσεις συζυγίας είναι:

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \{a^2\}, \{b, ba^2\}, \{ba, ba^{-1}\}.$$

   Όπως και πριν, βρίσκουμε πρώτα τις μονοδιάστατες αναπαραστάσεις βρίσκοντας αβελιανά πηλίκά. Βλέπουμε ότι η $\{1, a^2\}$ είναι κανονική υποομάδα της D_4 και ο πυρήνας του επιμορφισμού $D_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; a \mapsto (1, 0), b \mapsto (0, 1)$. Αυτό μας δίνει 4 μονοδιάστατους χαρακτήρες της D_4, έναν για κάθε ομομορφισμό $D_4/(a^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ (Table 3). Τον πεμπτο χαρακτήρα τον βρίσκουμε ακριβώς όπως και στην περίπτωση της Q_8.

   Για την ανάγωγη αναπαράσταση της D_4 βαθμού 2 μπορούμε να θεωρήσουμε τη φυσική της δράση στο $\mathbb{R}^2$ (ή τη δράση που ορίζουν οι ίδιοι πίνακες στο $\mathbb{C}^2$) όπου το a δρα ως περιστροφή κατα $\pi/2$ και το b ως ανάκλαση ως προς τον $y'y$. Δηλαδή,

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Table 3: Πίνακας χαρακτήρων της D_4.

	$\{1\}$	$\{a^2\}$	$\{a, a^{-1}\}$	$\{b, ba^2\}$	$\{ba, ba^{-1}\}$
$\chi_{\tau\epsilon\tau}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Παρατήρηση: Οι ομάδες D_4, Q_8 έχουν τον ίδιο πίνακα χαρακτήρων, παρόλαυτα δεν είναι ισόμορφες. Για παράδειγμα, η Q_8 έχει μοναδικό στοιχείο ταξης 2 το -1, ενώ η D_4 έχει 5, τα $a^2, b, ba^2, ba, ba^{-1}$. $\square$