Το κέντρο $Z(\mathbb{C}[G])$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \{ u \in \mathbb{C}[G] \mid ux = xu \ \forall x \in \mathbb{C}[G] \}$$
$$= \{ u \in \mathbb{C}[G] \mid ug = gu \ \forall g \in G \}$$

μεταθετικός δακτύλιος

Έστω $C_1, \dots, C_t$ οι κλάσεις συζυγίας της G και $e_i := \sum_{g \in C_i} g$

Τότε $h e_i h^{-1} = e_i \ \forall i = 1, \dots, t \ \forall h \in G$

$\Rightarrow e_i \in Z(\mathbb{C}[G])$

Προφανώς τα e_i είναι γραμ. ανεξάρτητα

Αν $u = \sum \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$, τότε $huh^{-1} = \sum \lambda_g hgh^{-1} = \sum \lambda_g g = u$

για κάθε $h \in G$. Άρα $\lambda_{h^{-1}gh} = \lambda_g$.

Οπότε τα $\{e_1, \dots, e_t\}$ αποτελούν βάση του $Z(\mathbb{C}[G])$

ως $\mathbb{C}$-διαν. χώρο, δηλ. $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}[G]) = t$.

Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$

ορίζει ένα ομομορφισμό αλγεβρών $\tilde{\rho}_i : \mathbb{C}[G] \longrightarrow End_K(V_i)$

Αν $u \in Z(\mathbb{C}[G])$, τότε $\tilde{\rho}_i(u) = \lambda_i \cdot id_{V_i}$ για κάποιο $\lambda_i \in \mathbb{C}$

από το Λήμμα του Schur. Έχουμε ένα ομομορφισμό αλγεβρών

$\omega_{\chi_i} : Z(\mathbb{C}[G]) \longrightarrow \mathbb{C}, \ u \longmapsto \lambda_i = \dfrac{\chi_i(u)}{\chi_i(1)}$

Αν $u = \sum \lambda_g g$, τότε $\chi_i(u) = \sum \lambda_g \chi_i(g)$

Αν $u = \sum \mu_j e_j$, τότε $\chi_i(u) = \sum \mu_j c_j \chi_i(s_j)$ όπου $c_j = |C_j|$

και $s_j \in C_j$

Πρόταση: $Z(\mathbb{C}[G]) \cong \mathbb{C}^t$

<u>Αλγεβρικοί ακέραιοι και αναπαραστάσεις</u>

Έστω A ένας μεταθετικός δακτύλιος και $B \subseteq A$ υποδακτύλιος. Ένα στοιχείο $a \in A$ ονομάζεται ακέραιο (integral) επί του B αν υπάρχει μονικό πολυώνυμο $f(x) \in B[X]$ με $\deg f(x) \geq 1$ τ.ώ. $f(a) = 0$.
Αν $A = \mathbb{C}$ και $B = \mathbb{Z}$, τότε το a ονομάζεται <u>αλγεβρικός ακέραιος</u>.

<u>Παρατήρηση:</u> Τα στοιχεία του A είναι ακέραια επί του A

<u>Θεώρημα:</u> Έστω B υποδακτύλιος του A και $a \in A$. Τ.Α.Ε.Ι:

(i) a ακέραιο επί του B

(ii) $B[a]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο B-πρότυπο

(iii) $B[a] \subseteq C$ όπου C είναι υποδακτύλιος του A που είναι πεπ. παραγ. ως B-πρότυπο

(iv) Υπάρχει πιστό $B[a]$-πρότυπο M, που είναι πεπ. παραγ. ως B-πρότυπο.

<u>Αποδ.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν $a^n = -b_{n-1}a^{n-1} - \dots - b_1 a - b_0$, τότε

$B[a] = \{ f(a) \mid f(x) \in B[X] \} = \langle 1, a, \dots, a^{n-1} \rangle$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Παίρνουμε $C = B[a]$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Παίρνουμε $M = C$. Εστω $f(x) \in B[x]$. Αν $f(a) \in Ann_{B[a]} M$ τότε $f(a) \cdot 1 = 0 \Rightarrow f(a) = 0$. Αρα M πιστό.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Εστω $f : M \longrightarrow M, \ m \longmapsto a \cdot m \ \in End_B(M)$

Τότε απο το παρακάτω θεώρημα (αντίστοιχο του Cayley-Hamilton) υπάρχουν $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ τ.ω. $f^n + b_{n-1} f^{n-1} + \dots + b_1 f + b_0 \, id_M = 0$

Αρα $\forall \ m \in M \ (a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0) \cdot m = 0 \overset{M \text{ πιστό}}{\Longrightarrow}$

$a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = 0$

<u>Θεώρημα:</u> Αν M πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο με n γεννήτορες και $f \in End_R(M)$ με $f(M) \subseteq IM$ για κάποιο ιδεώδες I του R, τοτε υπάρχουν $a_0, \dots, a_{n-1} \in I$ τ.ω.

$f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \, id_M = 0$

<u>Πόρισμα:</u> Αν $a_1, \dots, a_m$ ακέραια επί του B, τότε $B[a_1, \dots a_m]$ πεπερασμένα παραγ. B-πρότυπο

<u>Πόρισμα:</u> $\overline{B}^A = \{ a \in A \mid a \text{ ακεραιο επι του } B \}$ είναι υποδακτύλιος του A που περιέχει το B.

<u>Αποδ.</u> Αν $x, y \in \overline{B}^A$ τοτε $C = B[x, y]$ είναι ενας υποδακτύλιος

του A πεπερ. παραγ. ως B-πρότυπο, που περιέχει το $B[x-y]$ και το $B[xy]$. Απο το κύριο θεωρημα, παίρνουμε ότι $x-y \in \overline{B}^A$ και $xy \in \overline{B}^A$

Ορισμος : Ο δακτύλιος $\overline{B}^A$ ονομάζεται ακέραια θήκη του B μέσα στο A. Αν $\overline{B}^A = B$, λέμε ότι το B είναι ακέραια κλειστό μεσα στο A. Αν ο ορος «μέσα στο A» παραλείπεται, εννοείται ότι το A είναι το σώμα πηλίκο της ακέραιας περιοχής B.

Παρατήρηση : Το $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια κλειστό.

Πρόταση Για καθε χαρακτήρα χ και για καθε $g \in G$, το $\chi(g)$ είναι αλγεβρικός ακέραιος.

Απόδ. Το $\chi(g)$ είναι άθροισμα ριζών της μονάδας.