Αναπαραστάσεις διάστασης 1

$\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ αναπαράσταση

$\rho(g) = \chi(g) \Rightarrow \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) \quad \forall\, g,h \in G$

$\Rightarrow \chi$ ομομορφισμός ομάδων

Πρόταση: Αν G αβελιανή, τότε όλες οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της είναι διάστασης 1.

Αποδ $|\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)| = \#$ κλάσεις ισοδυναμίας της $G = |G|$

(αφού $hgh^{-1} = g \quad \forall\, g,h \in G$)

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)} \chi(1)^2 = |G| \Rightarrow \chi(1) = 1 \quad \forall\ \chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$$

Πόρισμα Αν G αβελιανή, τότε $\chi(g)$ είναι ρίζα της μονάδας τάξης ίσης με την τάξη του g

Παραδείγματα:

$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	1	c	c^2	c^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

	1	σ_1	σ_2	$\sigma_1\sigma_2$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

Παρατήρηση:

Αν G_1, G_2 είναι δύο πεπερασμένες ομάδες τέτοιες ώστε
$\{\{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G_1)\}\} = \{\{\varphi(1) \mid \varphi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G_2)\}\}$
τότε από το Θ. Wedderburn - Artin, $\mathbb{C}G_1 \cong \mathbb{C}G_2$
Αυτό δε σημαίνει ότι $G_1 \cong G_2$
Την προηγούμενη φορά είδαμε ότι το παραπάνω ισχύει
για $G_1 = D_8$, $G_2 = Q_8$.
Προφανώς ισχύει και για G_1, G_2 αβελιανές με $|G_1| = |G_2|$
αφού αν G αβελιανή, τότε $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}^{|G|}$
Π.χ. $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

Κανονικές υποομάδες και αναπαραστάσεις

Αν $N \trianglelefteq G$, τότε G/N πεπερασμένη ομάδα.
Έστω $\pi_N: G \longrightarrow G/N$ ο κανονικός επιμορφισμός
Αν $\bar{\rho}: G/N \longrightarrow GL(V)$ αναπαράσταση, τότε $\bar{\rho} \circ \pi_N: G \longrightarrow GL(V)$
είναι αναπαράσταση. Άρα κάθε αναπαράσταση της G/N "προέρχεται"
από κάποια αναπαράσταση της G. Από την άλλη, αν $\rho: G \longrightarrow GL(V)$
είναι αναπαράσταση της G, τότε η ρ περνάει (factors through) στην G/N ανν
$N \subseteq \mathrm{Ker}\rho$. Η μια αναπαράσταση είναι ανάγωγη ανν η άλλη είναι
Έχουμε $\mathrm{Irr}(G/N) \longleftrightarrow \{\rho \in \mathrm{Irr}(G) \mid N \subseteq \mathrm{Ker}\rho\}$

Παράδειγμα: $G = S_3$, $N = A_3 = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$G/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	t		
χ_1	1	1	$\rightsquigarrow$ τετριμμένη στην S_3	$\chi_1(A_3) = 1$
χ_2	1	-1	$\rightsquigarrow$ πρόσημο στην S_3	$\chi_2(A_3) = 1$

$t = (1\ 2)A_3$

Εφαρμογή:

$G/[G,G] =: G^{ab}$ αβελιανή

$\Rightarrow$ Όλες οι αναπαραστάσεις είναι διάστασης 1

$\Rightarrow$ Κάθε μία αντιστοιχεί σε αναπαράσταση διάστασης 1 της G

Από την άλλη, αν $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ αναπαράσταση διάστασης 1

τότε $\rho(x^{-1}y^{-1}xy) = \rho(x)^{-1}\rho(y)^{-1}\rho(x)\rho(y) = 1 \quad \forall\, x, y \in G$

οπότε $[G,G] \subseteq \operatorname{Ker}\rho$

$\Rightarrow \{\chi \in \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G) \mid \chi(1) = 1\} \longleftrightarrow \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G^{ab})$

Πρόταση: Έστω $H \leqslant G$.

$H \trianglelefteq G \iff \exists\, \rho$ αναπαράσταση της G τ.ω. $\operatorname{Ker}\rho = H$

Αποδ. Αν $H \trianglelefteq G$, έστω $\bar{\rho} = \rho^{reg}_{G/H}$. Έχουμε $\operatorname{Ker}\rho^{reg}_{G/H} = \{H\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\bar{\rho} \circ \pi_N) = H$. Η άλλη κατεύθυνση είναι κλασική Θ. Ομάδων

__Πόρισμα:__ $H \trianglelefteq G \iff \exists$ χαρακτήρας χ τ.ω. $H = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$

__Αποδ__ Αν $H \trianglelefteq G$, τότε $\chi_{\rho^{reg}_{G/H} \circ \pi_N}(g) = \begin{cases} |G/H| = \chi_{\rho^{reg}_{G/H} \circ \pi_N}(1) & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases}$

Για την άλλη κατεύθυνση, αν $g \in G$ και $h \in H$, τότε

$\chi(g^{-1}hg) = \chi(h) = \chi(1) \Rightarrow g^{-1}hg \in H$

__Ορισμος__ : $\operatorname{Ker}\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$

__Πρόταση:__ $\operatorname{Ker}\chi = \operatorname{Ker}\rho$, οπου χ είναι ο χαρακτήρας της ρ

__Αποδ.__ $\operatorname{Ker}\rho \subseteq \operatorname{Ker}\chi$ προφανες

Αν τωρα $\chi(g) = \chi(1)$, δεδομενου ότι το $\chi(g)$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του $\rho(g)$ και οι ιδιοτιμες είναι ρίζες της μοναδας, αναγκαστικά όλες οι ιδιο $\xRightarrow[\text{Λήμμα}]{} \rho(g) = 1$ $(|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|)$

__Λήμμα:__ $\rho(g)$ διαγωνοποιησιμος (επι του $\mathbb{C}$)

__Αποδ.__ Έχουμε $\rho(g)^n = 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$

Αρα το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το $x^n - 1$

$\Rightarrow$ το ελάχιστο πολυωνυμο είναι γινόμενο διακριτών πρωτοβάθμιων πολυωνυμων $\Rightarrow \rho(g)$ διαγωνοποιήσιμος

<u>Πρόταση</u>: Αν $\chi = \sum_{i=1}^{t} n_i \chi_i$ όπου $\{\chi_1, \dots, \chi_t\} = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$,
τότε $\mathrm{Ker}\chi = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}\chi_i$

<u>Αποδ.</u> $\rho = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i \rho_i \Rightarrow \mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}\rho_i$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G) = \{\chi_1, \dots, \chi_t\}$ και $N_i = \mathrm{Ker}\chi_i$, $i = 1, \dots, t$
Τότε $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow N$ είναι η τομή κάποιων N_i

<u>Παράδειγμα</u>:

$G = S_3$
$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$
$C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

	C_1	C_2	C_3	
χ_1	1	1	1	$N_1 = S_3$
χ_2	1	-1	1	$N_2 = A_3$
χ_3	2	0	-1	$N_3 = \{1\}$

Αυτές είναι οι κανονικές υποομάδες της S_3

<u>Άσκηση</u>: Ποιες είναι οι κανονικές υποομάδες της S_4;

Παραδείγματα:

$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	1	c	c^2	c^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

$N_1 = G$

$N_2 = \{1\}$

$N_3 = \{1, c^2\}$

$N_4 = \{1\}$

$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

	1	σ_1	σ_2	$\sigma_1\sigma_2$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

$N_1 = G$

$N_2 = \{1, \sigma_2\}$

$N_3 = \{1, \sigma_1\}$

$N_4 = \{1, \sigma_1\sigma_2\}$

$N_2 \cap N_3 = \{1\}$