Θεώρημα Maschke

Αν χαρ$k \nmid |G|$, τότε kG ημιαπλή

$Irr(kG) = \{V_1, V_2, \dots, V_t\}$

$\Theta.A\text{-}W \Rightarrow kG \cong \prod_{i=1}^{t} Mat_{n_i}(\underbrace{End_{kG}(V_i)}_{D_i})$

όπου $kG = \bigoplus_{i=1}^{t} n_i V_i$

Αν k αλγεβρικά κλειστό, $kG \cong \prod_{i=1}^{t} Mat_{n_i}(k)$

Μάθημα 7 $\rightsquigarrow Mat_{n_i}(D_i) \cong n_i V_i$

Μες στην απόδειξη βλέπουμε ότι $V_i \cong D_i^{n_i}$ ως kG-πρότυπο

Έχουμε $\dim_k V_i = n_i \dim_k D_i$

Αν k αλγεβρικά κλειστό, $\dim_k V_i = n_i$

Επίσης, $\underset{\underset{|G|}{\|}}{\dim_k kG} = \sum_{i=1}^{t} n_i^2$

Τέλος, $\sum_{i=1}^{t} n_i \chi_{V_i}(g) = \chi_{V_{reg}}(g) = 0 \quad \forall g \in G \setminus \{1\}$

Θεώρημα Mascke (Part 2):

Αν χαρ $k \mid |G|$, τοτε kG όχι ημιαπλή

Απόδ Εστω $x = \sum_{g\in G} g \in kG$

Τότε $g \cdot x = x \ \forall g \in G$ (δηλ. $x \in kG^G$)

και $x^2 = \sum_{g\in G} g \cdot x = \sum_{a\in G} x = |G| \cdot x = 0$

Έστω I το ιδεώδες $\langle x \rangle$

Αν υπάρχει J τ.ω. $kG = I \oplus J$, τοτε $1 = e \oplus 1-e$

οπου $e \in I$ με $e^2 = e$ και $I = \langle e \rangle$

Ομως $e = (\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot x = (\sum_{g\in G} \lambda_g) \cdot x = \lambda \cdot x$ για κάποιο $\lambda \in k$

και $e^2 = \lambda^2 \cdot x^2 = 0$

Αρα $e = 0 \Rightarrow x = 0$: ΑΤΟΠΟ

Γενικά όπου k αλγεβρικά κλειστό, αυτό μπορεί να αντικατασταθεί με k διαχωριστικό σώμα για την G (splitting field) δηλαδή οποιοδήποτε σώμα για το οποίο ισχυει $\dim_k \mathrm{End}_{kG}(V) = 1 \ \forall$ απλό kG-πρότυπο V

Από εδώ και στο εξής $k = \mathbb{C}$

Έστω $\mathrm{Char}\, G = \langle \chi : G \to k \mid \chi \text{ χαρακτήρας} \rangle \leq \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$

Τότε $\mathrm{Char}\, G = \langle \chi_{V_i} \mid 1 \leq i \leq t \rangle$

Αν $\sum \lambda_i \chi_{V_i} = 0$, τότε $\langle \sum \lambda_i \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = \lambda_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, t$

Άρα το σύνολο των ανάγωγων χαρακτήρων αποτελεί (ορθοκανονική) βάση του $\mathrm{Char}\, G$

Έχουμε δει ότι $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$

Είδαμε την προηγούμενη φορά ότι αν V, W ανάγωγες και $\chi_V = \chi_W$, τότε $V \cong W$

Πρόταση Αν $\chi_V = \chi_W$, τότε $V \cong W$

Αποδ. Αν $V = \sum n_i V_i$ και $W = \sum m_i V_i$, τότε

$$\chi_V = \sum n_i \chi_{V_i} \quad \text{και} \quad \chi_W = \sum m_i \chi_{V_i}$$

Αν $\chi_V = \chi_W$, τότε $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = n_i = m_i = \langle \chi_W, \chi_{V_i} \rangle \; \forall\, i$, οπότε $V \cong W$.

Πρόταση Αν $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$, τότε V ανάγωγη

Αποδ $V = \sum n_i V_i$, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = n_i^2 = 1 \Rightarrow V = V_i$ για κάποιο i

<u>Θεωρημα</u> : Το σύνολο $\{\chi_{V_i} \mid 1 \leq i \leq t\}$ είναι (ορθοκανονική) βάση του $\mathcal{F}(G,\mathbb{C}) = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \ \forall g,h \in G\}$

<u>Λήμμα 1</u>: Εστω $f \in \mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ και $V \in Irr(\mathbb{C}G)$

Εστω $\varphi_V := \sum_{g\in G} f(g)\rho_V(g^{-1})$

Τοτε $\varphi_V = \left(\frac{|G|}{\dim V} \langle f, \chi_V \rangle \right) id_V$

<u>Αποδ.</u> $\varphi_V(\rho_V(h)\cdot v) = \sum_{g\in G} f(g)\rho_V(g^{-1}h)(v) =$

$$= \sum_{g\in G} f(hg)\rho_V(g^{-1})(v)$$

$$= \sum_{g\in G} f(gh)\rho_V(g^{-1})(v)$$

$$= \sum_{g\in G} f(g)\rho_V(hg^{-1})(v)$$

$$= \rho_V(h)\varphi_V(v)$$

Αρα $\varphi_V \in End_{\mathbb{C}G}(V) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\varphi = \lambda \cdot id_V$

$$\left.\begin{aligned} Tr(\varphi_V) &= \sum_{g\in G} f(g)\chi_V(g^{-1}) = |G| \langle f, \chi_V \rangle \\ Tr(\varphi_V) &= \lambda \cdot \dim V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{|G|}{\dim V} \langle f, \chi_V \rangle$$

Λήμμα 2 : Αν $\langle f, \chi_V \rangle = 0 \ \forall V \in Irr(\mathbb{C}G)$, τοτε $f = 0$

Αποδ Εχουμε $\varphi_V = 0 \ \forall \ V \in Irr(\mathbb{C}G)$

Επισης $\varphi_{V \oplus W} = \varphi_V \oplus \varphi_W$

Αρα $\varphi_{V_{reg}} = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} f(g) g^{-1} h = 0 \ \forall h \in G \Rightarrow f(g) = 0 \ \forall g \in G$

Αποδειξη Θεωρηματος

$\operatorname{Char} G \leq \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ υποχωρος

$\mathcal{F}(G, \mathbb{C}) = \operatorname{Char} G \oplus \operatorname{Char} G^{\perp}$

Αλλα $\operatorname{Char} G^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow \operatorname{Char} G = \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$

Πόρισμα: $|Irr(\mathbb{C}G)| = \#$ κλασεις συζυγιας της G

Αποδ. $|Irr(\mathbb{C}G)| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) = \#$ κλάσεις συζυγιας της G