Γενικά, αν έχουμε δύο αναπαραστάσεις (V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) της G μπορούμε να κατασκευάσουμε τις εξής αναπαραστάσεις:

* $$\rho: G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$
$$g \longmapsto \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$$

* $$\rho: G \longrightarrow GL(\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2))$$
$$g \longmapsto (f \longmapsto \rho_2(g)\circ f \circ \rho_1(g^{-1}))$$

* $$\rho: G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$
$$g \longmapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

Πόρισμα: Αν V αναπαράσταση, τότε V^* αναπαράσταση "δυϊκή"

Ορισμός: Μια αναπαράσταση λέγεται ανάγωγη αν δεν έχει άλλες υποαναπαραστάσεις πέρα από το $\{0\}$ και τον εαυτό της

Παρατήρηση:

V ανάγωγη αναπαράσταση $\Leftrightarrow$ V απλό kG-πρότυπο

Παραδείγματα:

- Η $\mathbb{C}^3$ δεν είναι ανάγωγη αναπαράσταση της S_3
- Αν $\dim_k V = 1$, τότε V ανάγωγη
- Αν $\dim_k V = 2$, τότε V ανάγωγη $\Leftrightarrow \nexists\, v \in V$ τ.ώ. $g\cdot v = \lambda\cdot v \;\; \forall g \in G$ για κάποιο $\lambda \in k$

Κανονική αναπαράσταση (Regular Representation)

Έστω V ένας k-διαν. χώρος διάστασης $|G|$ ⇝ Μπορούμε να πάρουμε $V = kG$

Έστω $\{v_g\}_{g\in G}$ τα στοιχεία της βάσης του

Ορίζουμε $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

$$g \longmapsto (v_h \longmapsto v_{gh})$$

Η $\rho(g)$ είναι γραμμική απεικόνιση (αρκεί που την ορίσαμε στα στοιχεία της βάσης). Είναι μάλιστα αντιστρέψιμη με $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$

Επίσης έχουμε $\rho(1) = id_V$ και $\rho(gg') = \rho(g)\circ\rho(g')$.

Η (V,ρ) ονομάζεται κανονική αναπαράσταση της G

Συμβολίζεται με (V^{reg}, ρ^{reg})

Παράδειγμα:

$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle\sigma\rangle$ με $\sigma^4 = 1$

$$\bar{0} \mapsto I_4,\ \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix},\ \bar{2} \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},\ \bar{3} \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

$$Tr(\rho^{reg}(g)) = \begin{cases} |G| & \text{αν } g = 1 \\ 0 & \text{αν } g \neq 1 \end{cases}$$

Χαρακτήρες

Έστω (V,ρ) μια αναπαράσταση. Ονομάζουμε <u>χαρακτήρα</u> της αναπαράστασης τη συνάρτηση
$$\chi_V : G \longrightarrow k$$
$$g \longmapsto Tr(\rho(g))$$
Ονομάζουμε <u>χαρακτήρα</u> της G οποιαδήποτε συνάρτηση $\chi : G \to k$ για την οποία υπάρχει αναπαράσταση V τέτοια ώστε $\chi = \chi_V$

<u>Παραδείγματα:</u>

- Αν $V = k$ είναι η τετριμμένη αναπαράσταση τότε $\chi_k(g) = 1 \ \forall g \in G$
  Γενικότερα αν $\dim_k V = 1$, τότε $\rho(g) = \chi_V(g) \ \forall g \in G$
- Αν $V = \mathbb{C}^3$ και $\rho : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}_3)$ είναι η standard representation τότε $\chi_V(1) = 3$, $\chi_V(1\,2) = \chi_V(1\,3) = \chi_V(2\,3) = 1$
  $\chi_V(1\ 2\ 3) = \chi_V(3\ 2\ 1) = 0$

<u>Παρατήρηση:</u> Έχουμε $\chi_V(1) = \dim_k V$

<u>Ορισμός</u> Η διάσταση $\dim_k V = \chi_V(1)$ ονομάζεται <u>διάσταση</u> ή <u>βαθμός</u> της αναπαράστασης

<u>Πρόταση:</u> Αν $V \cong W$, τότε $\chi_V = \chi_W$

<u>Αποδ.</u> Εστω $f: V \longrightarrow W$ ισομορφισμος με $f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f \ \forall g \in G$

Τοτε $\rho_V(g) = f^{-1} \circ \rho_W(g) \circ f$

Ομοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος

(αφού $Tr(A) = Tr(BB^{-1}A) = Tr(B^{-1}AB)$)

Αρα $\chi_V = \chi_W$

<u>Παρατήρηση</u> : Βλέπουμε ότι ισόμορφες αναπαραστάσεις αντιστοιχουν σε αλλαγή βάσης του διαν. χωρου.

<u>Προταση</u> Εστω V, W αναπαραστάσεις της G

(1) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$

(2) $\chi_{Hom_k(V,W)}(g) = \chi_W(g) \cdot \chi_V(g^{-1}) = \chi_{V^* \otimes W}$

(3) $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$

(4) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$

<u>Αποδ.</u> Ασκηση

<u>Προταση:</u> Αν $k = \mathbb{C}$, τοτε $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$

<u>Αποδ.</u> Αφού G πεπερασμένη, $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ τ.ω. $g^n = 1$

Οποτε $\rho(g)^n = id_V \Rightarrow min_{\rho(g)}(x) \mid x^n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ του $\rho(g)$ είναι ρίζες της μονάδας

Αν $z \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα της μονάδας τότε $z^{-1} = \bar{z}$

Επίσης λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A

$\Leftrightarrow$ λ^{-1} είναι ιδιοτιμη του A^{-1}

$\chi(g^{-1}) = Tr(\rho(g)^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_m^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_m = \overline{Tr(\rho(g))} = \overline{\chi(g)}$

<u>Πρόταση</u> $\chi_v(g) = \chi_v(hgh^{-1})$ $\forall$ $g, h \in G$

<u>Αποδ.</u> $Tr\,\rho(hgh^{-1}) = Tr\,\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = Tr\,\rho(h)^{-1}\rho(h)\rho(g) = Tr\,\rho(g)$

Άρα οι χαρακτήρες παίρνουν σταθερή τιμη πάνω στις κλάσεις συζυγίας της ομάδας

<u>Πόρισμα</u>: $\chi_v(gh) = \chi_v(hg)$ $\forall$ $g, h \in G$ ⊛

<u>Λήμμα</u> : Εστω $F, F' : G \to k$ δύο συναρτήσεις (που ικανοποιουν τη συνθήκη ⊛ (« συναρτήσεις ίχνους »)) και υποθέτουμε οτι $\mathrm{char}\,k \nmid |G|$. Τότε η απεικονιση

$$(F, F') \mapsto \langle F, F' \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) F'(g^{-1})$$

είναι διγραμμική, συμμετρική, μη εκφυλισμένη

εύκολα

Για το μη εκφυλισμένη : $F' : G \to k$, $g \mapsto \begin{cases} F(g^{-1})^{-1} & \text{αν } F(g^{-1}) \neq 0 \\ 0 & \text{αν } F(g^{-1}) = 0 \end{cases}$

· Έχουμε $\langle F, F' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G \\ F(g) \neq 0}} F(g) F(g)^{-1} = 1$

Αν επιπλέον η F είναι συνάρτηση ίχνους, τότε $F(g^{-1}) = F(hg^{-1}h^{-1})$ και

$$F'(hgh^{-1}) = \begin{cases} F(hg^{-1}h^{-1})^{-1} = F(g^{-1})^{-1} = F'(g) & \text{αν } F(g^{-1}) \neq 0 \\ 0 = F'(g) & \text{αν } F(g^{-1}) = 0 \end{cases}$$