<u>Προταση</u>: Εστω V k-διαν. χωρος με $\dim_k V < \infty$. Τοτε

V αναπαράσταση $\Leftrightarrow$ V kG-προτυπο

<u>Απόδ.</u> Έστω $v \in V$. Αν V αναπαράσταση, τοτε ορίζουμε

τον βαθμωτό πολ/σμο : $kG \times V \longrightarrow V$

$$\left(\sum \lambda_g g, v\right) \longmapsto \sum \lambda_g \rho(g)(v)$$

- $\left(\sum \lambda_g g\right)(v_1 + v_2) = \sum \lambda_g \rho(g)(v_1 + v_2) = \sum \lambda_g \rho(g)(v_1) + \sum \lambda_g \rho(g)(v_2)$
- $\left(\left(\sum \lambda_g g\right) + \left(\sum \mu_g g\right)\right)(v) = \sum (\lambda_g + \mu_g)\rho(g)(v) = \ldots$
- $1 \cdot v = \rho(1)(v) = v$
- Είδαμε ότι $\left(\sum \lambda_g g\right)\left(\sum \mu_g g\right) = \sum\limits_{g \in G}\left(\sum\limits_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}\right)$

  Οποτε $\left(\left(\sum \lambda_g g\right)\left(\sum \mu_g g\right)\right)(v) = \sum\limits_{g \in G}\left(\sum\limits_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}\right)\rho(g)(v) =$

  $= \sum\limits_{g \in G}\sum\limits_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}\rho(h)\rho(h^{-1}g)(v) = \sum\limits_{h \in G} \lambda_h \rho(h) \sum\limits_{g \in G} \mu_{h^{-1}g}\rho(h^{-1}g)(v) =$

  $= \sum\limits_{h \in G} \lambda_h \rho(h)\left(\sum\limits_{g \in G} \mu_g \rho(g)(v)\right) = \left(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum\limits_{g \in G} \mu_g g \cdot v\right)$

$$(g \cdot h)(v) = \rho(gh)(v) = \rho(g)\rho(h)(v) = g \cdot (hv)$$

Απο την άλλη πλευρά, αν V είναι kG-προτυπο, τοτε

ορίζουμε $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

$$g \longmapsto (v \longmapsto g \cdot v)$$

- $\rho(1) = id_V$
- $\rho(gh)(v) = (gh) \cdot v = g(h \cdot v) = \rho(g)(\rho(h)(v))$
- $\rho(g^{-1})(v) = g^{-1} \cdot v = \rho(g)^{-1}(v)$ αφού $(g \cdot g^{-1})(v) = v = (g^{-1} \cdot g)(v)$

<u>Πρόταση</u>: $f: V_1 \longrightarrow V_2$ μορφισμός αναπαραστάσεων $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$

$\iff f: V_1 \longrightarrow V_2$ ομομορφισμός kG-προτύπων

<u>Απόδ.</u> "$\Longrightarrow$"

f γραμμική $\Rightarrow f(v+v') = f(v) + f(v') \ \forall\, v, v' \in V_1$

$f \circ \rho_1(g)(v) = \rho_2(g) \circ f(v) \Rightarrow f(\underset{\substack{\uparrow \\ V_1}}{g \cdot} v) = \underset{\substack{\uparrow \\ V_2}}{g \cdot} f(v)$

"$\Longleftarrow$"

f ομομορφισμός kG-προτύπων $\Rightarrow$

$f(v+v') = f(v) + f(v') \ \forall\, v, v' \in V_1$

$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \ \forall\, \lambda \in k, v \in V_1$

Επίσης $f(g \cdot v) = g \cdot f(v) \Rightarrow f(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(f(v))$

Από εδώ και στο εξής, αν δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς τον ορισμό της ρ, θα γράφουμε $g \cdot v$ αντί για $\rho(g)(v)$ $\forall\, g \in G, \forall\, v \in V$

Επίσης αν V_1, V_2 αναπαραστάσεις της G, θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Hom}_{kG}(V_1, V_2)$ το σύνολο των μορφισμών αναπαραστάσεων από την V_1 στην V_2.

<u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι μια αναπαράσταση είναι <u>πιστή</u> αν ο ομομορφισμός $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ είναι 1-1 ($\iff \ker\rho = \{1\}$)

Παράδειγμα

$G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ με $\zeta^n = 1$

Αν ζ είναι πρωταρχική ρίζα της μονάδας, τότε

$\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL(\mathbb{C})$, $\bar{a} \longmapsto \zeta^a$ είναι 1-1

γιατί αν $\bar{a} \in \mathrm{Ker}\rho$, τότε $\zeta^a = 1$, οπότε $a \equiv 0 \bmod n$, δηλ. $\bar{a} = \bar{0}$.

Αν ζ δεν είναι πρωταρχική ρίζα της μονάδας αυτό δεν ισχύει

Π.χ. Η τετριμμένη αναπαράσταση δεν είναι πιστή, εκτός και αν G τετριμμένη.

Παρατήρηση:

Θυμίζουμε ότι ένα πρότυπο είναι πιστό αν ο μηδενιστής του είναι 0

Αν V είναι πιστό kG-πρότυπο και $g \in \mathrm{Ker}\rho$, τότε

$g \cdot v = v \ \forall v \in V \Rightarrow (g-1)\cdot v = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow$

$g - 1 \in \mathrm{Ann}_{kG}(V) \Rightarrow g = 1$

Άρα η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι πιστή.

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.

Π.χ. Θεωρήστε την αναπαράσταση $\rho : S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$\sigma \longmapsto$ Πίνακας μετάθεσης

Η αναπαράσταση αυτή είναι προφανώς πιστή.

Ωστόσο $\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = n^2$ ενώ $|\mathrm{Im}\rho| = |S_n| = n!$

Οπότε για $n \geq 4$, τα $\rho(\sigma)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

και μπορούμε να βρούμε $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \rho(\sigma) = 0 \in \mathrm{Ann}_{kG}(V)$

<u>Ορισμος:</u> Εστω (V, ρ) αναπαράσταση της G.

Ενας υπόχωρος W του V ονομάζεται υποαναπαράσταση

αν $\rho(g)(w) \in W \;\; \forall\, w \in V$. Θα γράφουμε $W \leq V$.

 $\text{``}g \cdot w$

<u>Παρατηρήσεις</u>

- W υποαναπαράσταση $\Longleftrightarrow$ W kG-υποπρότυπο του V
- Με την ιδια λογική, μπορουμε να κατασκευάσουμε και την αναπαράσταση V/W

<u>Παραδείγματα:</u>

- $\{0\} \leq V$
- $\rho: S_3 \longrightarrow GL(V)$ όπου $V = \mathbb{C}^3$

  $\sigma \longmapsto$ Πινακας μετάθεσης

Εστω $W_1 = \langle (1,1,1) \rangle = \{ (x,x,x) \mid x \in \mathbb{C} \} = V^{S_3}$

Τοτε $\rho(\sigma)(w) = w \;\; \forall\, w \in W_1$

Οποτε $W_1 \cong$ τετριμμένη αναπαράσταση

Επισης $W_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z=0 \}$

είναι άλλη υποαναπαράσταση της V.

Εχουμε $V = W_1 \oplus W_2$

<u>Ορισμος</u> $V^G = \{ v \in V \mid \forall\, g \in G \;\; g \cdot v = v \}$