<u>Θεώρημα</u>: Έστω R απλός δακτύλιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) R είναι αριστερά του Artin

(2) R είναι (αριστερά) ημιαπλός

(3) R έχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες

(4) $R \cong M_n(D)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και δακτύλιο διαίρεσης D

<u>Αποδ.</u> Wedderburn - Artin: (2) $\Leftrightarrow$ (4)

Επίσης (2) $\Rightarrow$ (1) έχει γίνει και (1) $\Rightarrow$ (3) εξ ορισμού

Θ.δ.ο (3) $\Rightarrow$ (2)

Έστω I ελαχιστικό ιδεώδες, τότε I απλό R-πρότυπο

Έστω $B := \sum\limits_{\substack{J \text{ ελαχιστικό} \\ J \cong I \text{ ως } R\text{-πρότυπο}}} J$.

Θ.δ.ό B ιδεώδες του R $\xrightarrow{R \text{ απλος}}$ $B = R \Rightarrow R$ ημιαπλος

Προφανώς το B είναι αριστερο ιδεώδες του R

Έστω J ελαχιστικό, με $J \cong I$ ως R-πρότυπο και $r \in R$

Έστω $f_r : J \longrightarrow R \in Hom_R(J, R)$

$x \longmapsto xr$

Έχουμε $\ker f_r = \{0\}$ ή $\ker f_r = J$, οπότε είτε $Jr = 0$ είτε $Jr \cong J$

Σε κάθε περίπτωση $Jr \subseteq B$, οπότε $Br \subseteq B$

Θεώρημα (Wedderburn - 1907) Έστω k σώμα

Αν A είναι ημιαπλή k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, τότε

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$$

όπου $n_i \in \mathbb{N}$ και D_i είναι k-άλγεβρες διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης. Αν επιπλέον k είναι αλγεβρικά κλειστό, $D_i = k \ \forall i$.

Αποδ. Άσκηση

Εφαρμογή:

Ταξινόμηση όλων των ημιαπλών αλγεβρών διάστασης 5 επί του $\mathbb{C}$:

$A \cong M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$

ή

$A \cong \mathbb{C}^5$

Ριζικό Jacobson

$$J(R) = \bigcap \{ I \subseteq R \mid I \text{ μεγιστικό αριστερό ιδεώδες του } R \}$$
$$= \bigcap_{\substack{M \text{ απλό} \\ R\text{-πρότυπο}}} \mathrm{Ann}_R(M)$$

Πρόταση: $\mathrm{Ann}_R(M)$ ιδεώδες του R

Αποδ Έχουμε δει ότι $\mathrm{Ann}_R(M)$ αριστερό ιδεώδες του R

Αν τώρα $a \in R$ και $r \in \mathrm{Ann}_R(M)$, τότε :

$$(ra)m = r\underbrace{(am)}_{\in M} = 0 \quad \forall\, m \in M \Rightarrow ra \in \mathrm{Ann}_R(M)$$

Πόρισμα: $J(R)$ ιδεώδες του R

Λήμμα J: Έστω $y \in R$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $y \in J(R)$

(ii) $1 - xy$ είναι αριστερά αντιστρέψιμο $\forall\, x \in R$

(iii) $y \in \mathrm{Ann}_R(M)$ $\forall$ M απλό

Αποδ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν $1-xy$ δεν είναι αριστερά αντιστρέψιμο, τότε $(1-xy) \subsetneq R$

Οποτε υπάρχει μεγιστικό αριστερό ιδεωδες τω $1-xy \in I$

Ομως $y \in I \Rightarrow xy \in I \Rightarrow 1 \in I$: ΑΤΟΠΟ

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Αν $\exists$ M απλό R-προτυπο τ.ω. $y \notin Ann_R(M)$, $\exists\, m \in M \setminus \{0\}$ τ.ω. $(ym) = M$. Συγκεκριμενα $\exists\, x \in R$ τ.ω. $xym = m \Rightarrow m = 0$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Εστω I μεγιστικό αριστερο ιδεωδες. Τότε R/I απλο R-πρότυπο

Αφού $y \cdot (R/I) = 0 \Rightarrow y \in I$

Λήμμα: Εστω $y \in R$. Τότε $y \in J(R) \Leftrightarrow 1 - xyz \in R^\times$ $\forall\, x, z \in R$

Αποδ "$\Leftarrow$" $z = 1$, (ii) Προηγούμενου λήμματος

"$\Rightarrow$" Αφου $J(R)$ ιδεωδες, $yz \in J(R)$ και Λήμμα J (ii) $\Rightarrow$

$\exists\, u \in R$ τ.ω. $u(1 - xyz) = 1$.

Αφου $xyz \in J(R)$, εχουμε $\underbrace{1 + uxyz}_{= u}$ αριστερα αντιστρέψιμο

Αφου u δεξια αντιστρεψιμο,

$u \in R^\times \Rightarrow 1 - xyz \in R^\times$

Πορισμα: $J(R) = \cap \{ I \mid I$ μεγιστικο δεξιό ιδεώδες του $R \}$

Ορισμος: Ο δακτύλιος R λέγεται J-ημιαπλός αν $J(R) = 0$

(Jacobson ημιαπλος)

Πρόταση:

(i) Αν I ιδεώδες του R με $I \subseteq J(R)$, τότε $J(R/I) = J(R)/I$

(ii) $R/J(R)$ είναι J-ημιαπλός

Αποδ (i) Υπάρχει αντιστοιχία

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Μεγιστικά αριστερά ιδεώδη} \\ \text{του } R \text{ που περιέχουν το } I \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Μεγιστικά αριστερά ιδεώδη} \\ \text{του } R/I \end{array} \right\}$$

$$m \longleftrightarrow m/I$$

Αφού $I \subseteq J(R)$, τότε I περιέχεται σε όλα τα μεγιστικά ιδεώδη

Οπότε, $J(R/I) = \bigcap (m/I) = \left(\bigcap m\right)/I = J(R)/I$

(ii) $J(R/J(R)) = J(R)/J(R) = 0$