Πρόταση: $\mathrm{End}_R(M_1 \oplus M_2) \cong \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(M_1) & \mathrm{Hom}_R(M_2, M_1) \\ \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) & \mathrm{End}_R(M_2) \end{pmatrix}}_{A}$

Αποδ. Έστω $f_{11} \in \mathrm{End}_R(M_1)$, $f_{12} \in \mathrm{Hom}_R(M_2, M_1)$

$f_{21} \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$, $f_{22} \in \mathrm{End}_R(M_2)$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11}' & f_{12}' \\ f_{21}' & f_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}f_{11}' + f_{12}f_{21}' & f_{11}f_{12}' + f_{12}f_{22}' \\ f_{21}f_{11}' + f_{22}f_{21}' & f_{21}f_{12}' + f_{22}f_{22}' \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $f : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$

$$(m_1, m_2) \longmapsto (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2),\ f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2))$$

Τότε $f((m_1, m_2) + (m_1', m_2')) = f(m_1 + m_1', m_2 + m_2')$

$= (f_{11}(m_1 + m_1') + f_{12}(m_2 + m_2'),\ f_{21}(m_1 + m_1') + f_{22}(m_2 + m_2'))$

$= (f_{11}(m_1) + f_{11}(m_1') + f_{12}(m_2) + f_{12}(m_2'),\ f_{21}(m_1) + f_{21}(m_1') + f_{22}(m_2) + f_{22}(m_2'))$

$= (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2),\ f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2)) + (f_{11}(m_1') + f_{12}(m_2'),\ f_{21}(m_1') + f_{22}(m_2'))$

$= f(m_1, m_2) + f(m_1', m_2')$

$f(r \cdot (m_1, m_2)) = f(rm_1, rm_2) = (f_{11}(rm_1) + f_{12}(rm_2),\ f_{21}(rm_1) + f_{22}(rm_2)) =$

$= (r \cdot (f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2)),\ r \cdot (f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2))) = r \cdot f(m_1, m_2)$

Άρα $f \in \mathrm{End}_R(M_1 \oplus M_2)$

Θ.δ.ο. $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{End}_R(M_1 \oplus M_2)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \longmapsto f$$

$$\bullet\ \varphi\begin{pmatrix} id_{M_1} & 0 \\ 0 & id_{M_2} \end{pmatrix} = \left(f : (m_1, m_2) \longmapsto (m_1, m_2) \right) = id_{M_1 \oplus M_2}$$

$$\bullet\ \varphi\left(\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi\begin{pmatrix} f_{11}+g_{11} & f_{12}+g_{12} \\ f_{21}+g_{21} & f_{22}+g_{22} \end{pmatrix} =$$

$$(m_1, m_2) \longmapsto \left(f_{11}(m_1)+g_{11}(m_1)+f_{12}(m_2)+g_{12}(m_2),\ f_{21}(m_1)+g_{21}(m_1)+f_{22}(m_2)+g_{22}(m_2) \right)$$

$$= \left(f_{11}(m_1)+f_{12}(m_2),\ f_{21}(m_1)+f_{22}(m_2) \right) + \left(g_{11}(m_1)+g_{12}(m_2),\ g_{21}(m_1)+g_{22}(m_2) \right)$$

$$= f + g = \varphi\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \varphi\left(\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi\begin{pmatrix} f_{11}g_{11}+f_{12}g_{21} & f_{11}g_{12}+f_{12}g_{22} \\ f_{21}g_{11}+f_{22}g_{21} & f_{21}g_{12}+f_{22}g_{22} \end{pmatrix} =$$

$$(m_1, m_2) \longmapsto \left(f_{11}g_{11}(m_1)+f_{12}g_{21}(m_1)+f_{11}g_{12}(m_2)+f_{12}g_{22}(m_2), \right.$$

$$\left. f_{21}g_{11}(m_1)+f_{22}g_{21}(m_1)+f_{21}g_{12}(m_2)+f_{22}g_{22}(m_2) \right)$$

$$= \left(f_{11}\left(g_{11}(m_1)+g_{12}(m_2)\right) + f_{12}\left(g_{21}(m_1)+g_{22}(m_2)\right), \right.$$

$$\left. f_{21}\left(g_{11}(m_1)+g_{12}(m_2)\right) + f_{22}\left(g_{21}(m_1)+g_{22}(m_2)\right) \right)$$

$$= f\left(g_{11}(m_1)+g_{12}(m_2),\ g_{21}(m_1)+g_{22}(m_2) \right)$$

$$f\left(g(m_1, m_2) \right)$$

$$= f \cdot g = \varphi\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \varphi\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_i \overset{\alpha_i}{\hookrightarrow} M_1 \oplus M_2 \overset{p_i}{\twoheadrightarrow} M_i$$

$\alpha_1(m_1) = (m_1, 0)$ $\qquad p_1(m_1, m_2) = m_1$

$\alpha_2(m_2) = (0, m_2)$ $\qquad p_2(m_1, m_2) = m_2$

Αν $f \in End_R(M_1 \oplus M_2)$ με $f(m_1, m_2) = (m_1', m_2')$

$$f = \varphi \begin{pmatrix} p_1 \circ f \circ \alpha_1 & p_1 \circ f \circ \alpha_2 \\ p_2 \circ f \circ \alpha_1 & p_2 \circ f \circ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$(m_1, m_2) \longmapsto (p_1 \circ f \circ \alpha_1(m_1) + p_1 \circ f \circ \alpha_2(m_2), p_2 \circ f \circ \alpha_1(m_1) + p_2 \circ f \circ \alpha_2(m_2))$$

$$(p_1 \circ f(m_1, 0) + p_1 \circ f(0, m_2), p_2 \circ f(m_1, 0) + p_2 \circ f(0, m_2))$$

$$(p_1(f(m_1, 0) + f(0, m_2)), p_2(f(m_1, 0) + f(0, m_2)))$$

$$(p_1(f(m_1, m_2)), p_2(f(m_1, m_2))) = f(m_1, m_2)$$

Οπότε η φ είναι επι

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \forall (m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2 \\ f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2) = f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2) = 0 \end{array} \right\}$$

Για $m_1 = 0$ $\quad f_{12}(m_2) = 0 \ \forall m_2 \Rightarrow f_{12} = 0$

$\qquad\qquad f_{22}(m_2) = 0 \ \forall m_2 \Rightarrow f_{22} = 0$

$f_{11}(m_1) = 0 \ \forall m_1 \Rightarrow f_{11} = 0$

$f_{21}(m_1) = 0 \ \forall m_1 \Rightarrow f_{21} = 0$

Άρα $\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \varphi$ 1-1

<u>Πορισμα 1</u>:

$$End_R(M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t) \cong \begin{pmatrix} End_R(M_1) & Hom_R(M_2,M_1) & \dots & Hom_R(M_t,M_1) \\ Hom_R(M_1,M_2) & End_R(M_2) & \dots & Hom_R(M_t,M_2) \\ \vdots & \vdots & & \\ Hom_R(M_1,M_t) & Hom_R(M_2,M_t) & \dots & End_R(M_t) \end{pmatrix}$$

<u>Πορισμα 2</u> Εστω $n \in \mathbb{N}^*$. Τοτε $End_R(nM) \cong M_n(End_R(M))$

<u>Πορισμα 3</u>

Αν $M_1, \dots, M_t$ είναι R-πρότυπα τ.ώ. $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ για $i \neq j$, τότε $End_R(M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t) \cong End_R(M_1) \times End_R(M_2) \times \dots \times End_R(M_t)$

<u>Ορισμος</u>: Αν R είναι ένας δακτύλιος, τοτε ορίζουμε ως R^{op} τον δακτύλιο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του R και $x \underset{R}{+} y = x \underset{R^{op}}{+} y$ ενώ $x \underset{R^{op}}{\cdot} y = y \underset{R}{\cdot} x$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- $(R^{op})^{op} = R$
- Γενικά $R \not\cong R^{op}$
- Αν D δακτύλιος διαίρεσης, D^{op} δακτύλιος διαίρεσης

<u>Λήμμα (A)</u> Η απεικόνιση $\varphi: R \longrightarrow End_R({}_RR)^{op}$, $r \longmapsto (x \longmapsto xr)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων, οπότε $R \cong End_R({}_RR)$ ως δακτύλιοι

<u>Αποδ</u> Για κάθε $r \in R$, ορίζουμε την απεικόνιση $\chi_r : R \to R,\ x \mapsto xr$

$$\left.\begin{array}{l}\chi_r(x_1+x_2) = (x_1+x_2)r = x_1r + x_2r = \chi_r(x_1)+\chi_r(x_2) \\ \chi_r(ax) = (ax)r = a(xr) = a\,\chi_r(x)\ \ \forall\, a \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\chi_r \\ \cap \\ \mathrm{End}_R({}_RR)\end{array}$$

$\varphi(1) = id_R,\ \varphi(r_1+r_2) = \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$ και

$\varphi(r_1r_2)(x) = x(r_1r_2) = (xr_1)r_2 = \chi_{r_2}\chi_{r_1}(x) \Rightarrow \varphi(r_1r_2) = \varphi(r_2)\varphi(r_1)$

$\mathrm{Ker}f = \{r \in R \mid xr = 0\ \forall\, x \in R\} \overset{1\in R}{=} \{0\}$

Αν $f \in \mathrm{End}_R({}_RR)$, τότε $f(x) = f(x\cdot 1) = x\cdot f(1) = \chi_{f(1)}(x)$

Άρα $f = \varphi(f(1))$, οπότε $f \in \mathrm{Im}\varphi$

<u>Λήμμα</u> (B) Η απεικόνιση $\varphi : R \longrightarrow \mathrm{End}_R(R_R),\ r \longmapsto (x \mapsto rx)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων, οπότε $R \cong \mathrm{End}_R(R_R)$ ως δακτύλιοι

<u>Αποδ</u> Για κάθε $r \in R$, ορίζουμε την απεικόνιση $\chi_r : R \to R,\ x \mapsto rx$

$$\left.\begin{array}{l}\chi_r(x_1+x_2) = r(x_1+x_2) = rx_1 + rx_2 = \chi_r(x_1)+\chi_r(x_2) \\ \chi_r(xa) = r(xa) = (rx)a = \chi_r(x)a\ \ \forall\, a \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\chi_r \\ \cap \\ \mathrm{End}_R(R_R)\end{array}$$

$\varphi(1) = id_R,\ \varphi(r_1+r_2) = \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$ και

$\varphi(r_1r_2)(x) = (r_1r_2)x = r_1(r_2x) = \chi_{r_1}\chi_{r_2}(x) \Rightarrow \varphi(r_1r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$

$\mathrm{Ker}f = \{r \in R \mid rx = 0\ \forall\, x \in R\} \overset{1\in R}{=} \{0\}$

Αν $f \in \mathrm{End}_R({}_RR)$, τότε $f(x) = f(1\cdot x) = f(1)\cdot x = \chi_{f(1)}(x)$

Άρα $f = \varphi(f(1))$, οπότε $f \in \mathrm{Im}\varphi$

Θεώρημα (Wedderburn-Artin)

Έστω R ένας δεξιά (αντ. αριστερά) ημιαπλός δακτύλιος

Τότε $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_t}(D_t)$

για κάποιους δακτυλίους διαίρεσης $D_1, \dots, D_t$ και $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$

Υπάρχουν ακριβώς t απλά R-πρότυπα, αμοιβαίως μη ισόμορφα.

$V_1, \dots, V_t$.

Απόδ $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ όπου I_j ελαχιστικά ιδεώδη

Μπορούμε να γράψουμε $R \cong n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t$

όπου V_i απλά R-πρότυπα τ.ω. $V_i \not\cong V_j$ για $i \neq j$

και για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ $\exists\, i \in \{1, \dots, t\}$ τ.ω. $I_k \cong V_i$

Αν τώρα V είναι ένα απλό R-πρότυπο, $V \cong V_i$ για κάποιο i

από το Λήμμα ★.

Από το Λήμμα του Schur έχουμε $End_R(V_i) \cong D_i$ δακτύλιος διαίρεσης

και από την Πρόταση στην αρχή του μαθήματος, $End_R(n_i V_i) \cong M_{n_i}(D_i)$

$$
\begin{aligned}
R \cong End_R(R)^{op} &\cong End_R(n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \dots \oplus n_t V_t)^{op} \\
&\cong End_R(n_1 V_1)^{op} \times End_R(n_2 V_2)^{op} \times \dots \times End_R(n_t V_t)^{op} \\
&\cong M_{n_1}(D_1)^{op} \times M_{n_2}(D_2)^{op} \times \dots \times M_{n_t}(D_t)^{op} \\
&\cong M_{n_1}(D_1^{op}) \times M_{n_2}(D_2^{op}) \times \dots \times M_{n_t}(D_t^{op})
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση: Η γραφή είναι μοναδική (αν εξαιρέσουμε τη σειρά). Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Jördan-Holder.

Πόρισμα: R αριστερά ημιαπλος $\Leftrightarrow$ R δεξιά ημιαπλος

Αποδ. Ακολουθώντας την απόδειξη της προηγούμενης φοράς μπορούμε να δείξουμε ότι ο δακτύλιος $M_n(D)$, όπου D δακτύλιος διαίρεσης, είναι και δεξιά ημιαπλός

Ορισμός: Θα λέμε πως ένας δακτύλιος είναι ημιαπλός αν είναι αριστερά ημιαπλος.

Πόρισμα: R μεταθετικός ημιαπλός $\Leftrightarrow$ Υπάρχουν σώματα $F_1, \dots, F_t$ τ.ω. $R \cong F_1 \times \dots \times F_t$