Ορισμός : Ένας δακτύλιος R λέγεται αριστερά (αντ. δεξιά ή αμφί-πλευρα) **ημιαπλός** αν είναι ημιαπλό αριστερό (αντ. δεξιό ή αμφίπλευρο) R-πρότυπο. Ο δακτύλιος R λέγεται **απλός** αν τα μόνα αμφίπλευρα ιδεώδη του είναι το $\{0\}$ και το R.

Πρόταση R ημιαπλός $\Leftrightarrow$ Κάθε R-πρότυπο είναι ημιαπλό

Αποδ "$\Leftarrow$" Ειδική περίπτωση προτύπου

"$\Rightarrow$" Έστω $x \in M$. Έχουμε $(x) \cong R/Ann_R(x)$ που είναι ημιαπλό ως πηλίκο ημιαπλού R-προτύπου. Αφού $M = \sum_{x \in M} (x)$, από το προηγούμενο θεώρημα, το M είναι ημιαπλό.

Πρόταση Έστω R ένας (αριστερά) ημιαπλός δακτύλιος. Τότε

(1) Υπάρχουν ελαχιστικά ιδεώδη $I_1, I_2, \dots, I_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$$

(2) Ο δακτύλιος R είναι (αριστερός) δακτύλιος και της Noether και του Artin

Αποδ (1) R ημιαπλός $\Rightarrow R = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ για κάποια οικογένεια ελαχιστικών ιδεωδών (απλών R-υποπροτύπων)

Έστω $1 = e_1 \oplus e_2 \oplus \dots \oplus e_n$ με $e_j \in I_j$ για $j = 1, \dots, n$

Τότε $r = re_1 \oplus re_2 \oplus \dots \oplus re_n \ \forall r \in R$, οπότε $R = \bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

(2) Έστω $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ όπως πριν

Κάθε I_j έχει μόνο 2 υποπρότυπα, άρα είναι και της Noether και του Artin. Η ιδιότητα μεταφέρεται στο ευθύ άθροισμα

<u>Πόρισμα</u>:

(1) Το καρτεσιανό γινόμενο ημιαπλών δακτυλίων είναι ημιαπλός δακτύλιος

(2) R ημιαπλός $\Rightarrow$ Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο είναι της Noether και του Artin

<u>Λήμμα</u>*: Τα στοιχεία $e_1, \ldots, e_n$ που εμφανίζονται στην προηγούμενη απόδειξη έχουν τις εξής ιδιότητες:

(1) $e_i^2 = e_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

(2) $e_i e_j = 0 \quad \forall\, i,j = 1, \ldots, n$ με $i \neq j$

(3) $I_j = (e_j) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$

(4) Αν M είναι απλό R-πρότυπο, τότε $M \cong I_j$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$

<u>Αποδ.</u> $1 = e_1 \oplus \ldots \oplus e_n$

$\Rightarrow e_i \cdot 1 = e_i e_1 \oplus \ldots \oplus e_i^2 \oplus \ldots \oplus e_i e_n \in I_i$

$\Rightarrow e_i = e_i^2$ και $e_i e_j = 0$ για $i \neq j$

Αν τώρα $r \in I_j$, έχουμε $r = re_1 \oplus \ldots \oplus re_n \in I_j$, οπότε $r = re_j$

Αν M είναι R-πρότυπο, τότε $M = (x) \ \forall\, x \in M \setminus \{0\}$

Έστω $f: R \longrightarrow M, r \longmapsto rx \in Hom_R(R, M)$

Τότε $f|_{I_j} \in Hom_R(I_j, M)$ για κάθε $j=1,\dots,n$

Από το Λήμμα του Schur, έχουμε $f|_{I_j} = 0$ ή $f|_{I_j}$ ισομορφισμός

Αν $f|_{I_j} = 0 \ \forall j$, τότε $e_j x = 0 \ \forall j = 1,\dots,n$

$\Rightarrow x = 1\cdot x = (e_1 + \dots + e_n)\cdot x = 0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $\exists\ I_j$ τ.ώ. $M \cong I_j$

<u>Πρόταση</u>: Έστω D ένας δακτύλιος διαίρεσης. Ο δακτύλιος $R := M_n(D)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Είναι απλός

(2) Υπάρχει ένα μοναδικό απλό R-πρότυπο τ.ώ. $R \cong nV = \bigoplus_{i=1}^{n} V$

(3) R είναι αριστερά ημιαπλός

(4) R είναι αριστερός της Noether και του Artin

(5) $End_R V \cong D$

<u>Αποδ.</u> Έστω I ιδεώδες του R, $I \neq 0$. Έστω $A = (a_{ij}) \in I$, $A \neq 0$

Έστω $(E_{kl})_{1\le k,l \le n}$ η κλασική βάση του R ως D-πρότυπο

Αν $a_{ij} \neq 0$ για κάποια $i,j \in \{1,\dots,n\}$ τότε $(a_{ij}^{-1} E_{ki}) A E_{jl} = E_{kl}$

Άρα $E_{kl} \in I$ για κάθε k,l.

Οπότε ο μοναδιαίος πίνακας $E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn} \in I$

και άρα $I = R$. Αυτό αποδεικνύει το (1)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ως D-πρότυπο έχουμε $R \cong D^{n^2}$. Όμως το D δεν είναι R-πρότυπο. Αλλά το D^n είναι.

Εχουμε $R \cong V^{\oplus n}$ ως όπου $V \cong D^n$. Ο ισομορφισμός δίνεται από:

$$f : R \longrightarrow V^{\oplus n}, \quad \begin{array}{cccc} \Sigma 1 & \Sigma 2 & & \Sigma n \\ \end{array} \atop \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (\Sigma 1, \Sigma 2, \dots, \Sigma n)$$

Έχουμε $B \cdot A = (B\Sigma_1, B\Sigma_2, \dots, B\Sigma_n) \ \forall\ A, B \in R$

Το V είναι απλό R-πρότυπο γιατί για κάθε $v \in V$, $R \cdot v = V$

(γνωστό από Γραμμική Άλγεβρα - πολύ απλή άσκηση)

Αυτό αποδεικνύει το (2)

Έχουμε δει ότι (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)

Για το (5), θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων

$$f : D \longrightarrow \mathrm{End}_R(V)$$
$$\lambda \longmapsto \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1\lambda \\ \vdots \\ v_n\lambda \end{pmatrix} \right)$$

D έχει μόνο 2 ιδεώδη, και άρα $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ ή $\mathrm{Ker} f = D$

Αφού $f(1) = id_V$, έχουμε f 1-1

Έστω $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$

Αν $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$, τότε $\varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

Άρα $\varphi \in \mathrm{Im} f$ και η f είναι επί.

Θεώρημα (Wedderburn - Artin)

Έστω R ένας (αριστερά) ημιαπλος δακτύλιος.

Τότε $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_t}(D_t)$

για κάποιους δακτύλιους διαίρεσης $D_1, \ldots, D_t$ και $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$

Υπάρχουν ακριβώς t απλά R-πρότυπα, αμοιβαίως μη ισόμορφα.

$V_1, \ldots, V_t$ και $D_i \cong End_R(V_i)$

<u>Αποδ</u> $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_n$ όπου I_j ελαχιστικά ιδεώδη

Μπορουμε να γραψουμε $R \cong n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \ldots \oplus n_t V_t$

όπου V_i απλά R-πρότυπα τ.ω. $V_i \ncong V_j$ για $i \neq j$

και για καθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists\, i \in \{1, \ldots, t\}$ τ.ω. $I_k \cong V_i$

Αν τώρα V είναι ένα απλό R-πρότυπο, $V \cong V_i$ για κάποιο i

από το Λήμμα ⋆.

Απο το Λήμμα του Schur, $End_R(V_i) \cong D_i$ δακτυλιος διαίρεσης

Οποτε, απο το Λήμμα ⋆⋆, $End_R(n_i V_i) \cong M_{n_i}(D_i)$

<u>Λήμμα</u>⋆⋆ : Αν M είναι R-προτυπο και $n \in \mathbb{N}^*$. Τοτε

$End_R(nM) \cong M_n(E)$ όπου $E = End_R(M)$