Ορισμός :

(i) Ένας δακτύλιος R που είναι αριστερό R-πρότυπο της Noether λέγεται αριστερός δακτύλιος της Noether (Αντίστοιχα ορίζουμε το δεξί)

(ii) Ένας δακτύλιος R που είναι αριστερό R-πρότυπο του Artin λέγεται αριστερός δακτύλιος του Artin (Αντίστοιχα ορίζουμε το αριστερό)

(iii) Ένας δακτύλιος R λέγεται δακτύλιος της Noether (αντ. του Artin) αν είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether (αντ. του Artin).

Παρατήρηση:

Ένας δακτύλιος είναι αριστερός (αντ. δεξιός) της Noether αννν όλα τα αριστερά (αντ. δεξιά) ιδεώδη είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Παραδείγματα:

(1) Τα σώματα και οι δακτύλιοι διαίρεσης (μη μεταθετικοί αλλά κάθε στοιχείο $\neq 0$ είναι αντιστρέψιμο) είναι και του Artin και της Noether (αφού έχουν μόνο 2 ιδεώδη)

(2) Οι περιοχές κυρίων ιδεωδών είναι δακτύλιοι της Noether γιατί κάθε ιδεώδες είναι πεπερασμένα παραγόμενο (π.χ. $\mathbb{Z}$, $k[X]$ κ σώμα, $\mathbb{Z}[i]$)

(3) R περιοχη. R Artin $\Leftrightarrow$ R σώμα

Εστω $a \in R$, $a \neq 0$, a μη αντιστρέψιμο

$(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \dots$

Αν η παραπάνω ακολουθία σταθεροποιείται, τοτε υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $(a^n) = (a^{n+1})$. Αρα υπάρχει $r \in R$ τ.ω. $a^n = a^{n+1} \cdot r \Rightarrow a \cdot r = 1 \Rightarrow a$ αντιστρεψιμο

(4) Οποιοσδηποτε πεπερασμένος δακτύλιος είναι και του Artin και της Noether π.χ. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Θεώρημα: $N \leq M$, M R-πρότυπο

M R-προτυπο της Noether (αντ. του Artin)

$\Leftrightarrow$ N και M/N είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. "$\Rightarrow$" M προτυπο της Noether. Καθε αύξουσα ακολουθία υποπροτυπων του M/N είναι της μορφης:

$L_1/N \subseteq L_2/N \subseteq L_3/N \subseteq \dots$

οπου $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$

είναι μια αυξουσα ακολουθια υποπροτυπων του M που περιέχουν το N. Η δευτερη ακολουθια σταθεροποιείται, και αρα σταθεροποιειται και η πρωτη. Επομενως το M/N είναι της Noether.

Επισης οποιαδήποτε ακολουθια υποπροτύπων του N είναι και ακολουθια υποπροτυπων του M. Αρα το N ικανοποιει την ΣΑΑ.

Οποτε το N είναι της Noether

Αντιστοιχα αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για Artin

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι το N και το M/N είναι της Noether

Έστω $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$

μια αυξουσα ακολουθια υποπροτύπων του M

Θεωρουμε την ακολουθια

$L_1 \cap N \subseteq L_2 \cap N \subseteq L_3 \cap N \subseteq \dots$

υποπροτυπων του N. Αφου το N είναι της Noether,

υπαρχει $m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $L_k \cap N = L_m \cap N \quad \forall\, k \geqslant m$

Θεωρουμε την ακολουθια

$L_1 + N \subseteq L_2 + N \subseteq L_3 + N \subseteq \dots$

υποπροτύπων του M που περιέχουν το N

Οποτε υπάρχει αντιστοιχη ακολουθια υποπροτυπων του M/N:

$(L_1+N)/N \subseteq (L_2+N)/N \subseteq (L_3+N)/N \subseteq \dots$

Αφου το M/N είναι της Noether, υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$(L_k+N)/N = (L_n+N)/N \quad \forall\, k \geqslant n$

Αρα $L_k + N = L_n + N \qquad \forall\, k \geqslant n$

Εστω $t = \max\{m, n\}$. Για κάθε $k \geqslant t$

$$L_k = L_k \cap (L_k + N) = L_k \cap (L_t + N) \overset{\text{Ασκηση ! Μαθ. 3}}{\underset{L_t \subseteq L_k}{=}}$$
$$= L_t + (L_k \cap N)$$
$$= L_t + (L_t \cap N) = L_t$$

Αρα το M ικανοποιει την ΣΑΑ, οποτε είναι της Noether

Αντιστοιχα αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για Artin.

Πόρισμα: Έστω I ένα ιδεώδες (αμφίπλευρο) του R.
Τότε ο R είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether (αντ του Artin) $\Rightarrow$ R/I είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether (αντ. του Artin)

Πρόταση ⊛: Έστω $N_1, N_2, \ldots, N_t \leq M$ είναι R-υποπρότυπα της Noether (αντ. του Artin). Τότε το $N_1 + \ldots + N_t$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. Θα το δείξουμε για $t=2$. Μια απλή επαγωγή μας δίνει τη γενικότερη περίπτωση. Έστω $N_1, N_2 \leq M$ της Noether. Από το Θεώρημα, το πρότυπο $N_1/N_1 \cap N_2$ είναι πρότυπο της Noether. Από το 2ο Θ. Ισομ. Προτύπων, $N_1/N_1 \cap N_2 \cong N_1+N_2/N_2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } (N_1+N_2)/N_2 \text{ είναι της Noether} \\ N_2 \text{ είναι της Noether}\end{array}\right\} \underset{\Theta.}{\Rightarrow} N_1+N_2 \text{ είναι της Noether}$$

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε για Artin

Πρόταση: Αν M_1, M_2 είναι R-πρότυπα της Noether (αντ του Artin) τότε $M_1 \oplus M_2$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

Αποδ. Το $\underset{\underset{M_1}{\cong}}{M_1 \oplus \{0\}}$ είναι υποπρότυπο του $M_1 \oplus M_2$

Έχουμε $M_1 \oplus M_2 / M_1 \oplus \{0\} \cong \{0\} \oplus M_2 \cong M_2$
(αρκεί να πάρουμε $f: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \{0\} \oplus M_2$ και να εφαρμόσουμε το 1ο Θ. Ισομ.)
$(x, y) \longmapsto (0, y)$

Άρα από το Θεώρημα, $M_1 \oplus M_2$ είναι της Noether.

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε για Artin.

<u>Πόρισμα</u>: R δακτύλιος της Noether (αντ. Artin)
$\Rightarrow$ R^n R-πρότυπο της Noether (αντ. Artin)

<u>Πόρισμα</u>: Έστω R αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether (αντ. του Artin) και M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό (αντ. δεξιό) R-πρότυπο. Τότε το M είναι της Noether (αντ. του Artin)

<u>Αποδ.</u> <u>1ος τρόπος</u> $M = (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_n)$
για $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$. Έχουμε δείξει ότι $(x_i) \cong R/Ann_R(x_i)$
Θ. $\Rightarrow$ $R/Ann_R(x_i)$ είναι της Noether (αντ. του Artin)
Πρόταση (*) $\Rightarrow$ $(x_1) + \ldots + (x_n)$ είναι της Noether (αντ. του Artin)

<u>2ος τρόπος</u>

M πεπ. παραγ $\Leftrightarrow \exists$ $f: R^n \longrightarrow M$ επιμορφισμός R-προτύπων για κάποιο n
Αφού R^n είναι της Noether (αντ. του Artin) $\overset{Θ.}{\Rightarrow}$ $R^n/Kerf$ είναι της Noether (αντ. του Artin). Από το 1ο Θ. Ισομ., $M \cong R^n/Kerf$.

<u>Πόρισμα</u> : R της Noether (του Artin) $\Leftrightarrow$ Κάθε R-πρότυπο πεπ. παραγόμενο είναι της Noether (του Artin)

<u>Θεώρημα Βάσης του Hilbert</u>

Αν ο R είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether τότε ο $R[X]$ είναι αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether

<u>Αποδ.</u> Έστω ότι ο $R[X]$ δεν έχει την ιδιότητα.

Τότε μπορούμε να βρούμε αριστερό ιδεώδες I του $R[X]$ που δεν είναι πεπ. παραγόμενο. Προφανώς $I \neq \{0\}$.

Επιλέγουμε $f_1 \in I$ με τον ελάχιστο βαθμό

Αφού $I \neq (f_1)$ $\big((f_1) = R[X] \cdot f_1\big)$

Επιλέγουμε πολυώνυμο $\underset{\text{ελαχ. βαθμού}}{f_2} \notin (f_1)$ και γενικώς συνεχίζουμε έτσι πολυώνυμα $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ στο I ελαχίστου βαθμού με το $f_{m+1} \notin (f_1) + (f_2) + \dots + (f_m)$

Έστω $n_i = \deg f_i$ και a_i ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου του f_i.

Έχουμε $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$

Θεωρούμε την ακολουθία ιδεωδών του R

$(a_1) \subseteq (a_1) + (a_2) \subseteq (a_1) + (a_2) + (a_3) \subseteq \dots$

R της Noether $\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sum_{i=1}^{t} (a_i) = \sum_{i=1}^{t+1} (a_i)$

Οπότε $a_{t+1} \in \sum_{i=1}^{t} (a_i)$, δηλ. $\exists\ r_1, r_2, \dots, r_t \in R$ τ.ω.

$a_{t+1} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_t a_t$

Έστω $f = f_{t+1} - \sum_{i=1}^{t} r_i f_i X^{n_{t+1}-n_i}$

Οπότε

$$f = a_{t+1} X^{n_{t+1}} - \sum_{i=1}^{t} r_i a_i X^{n_{t+1}} + (\text{όροι βαθμού} < n_{t+1})$$

$$= \underbrace{\Big(a_{t+1} - \sum_{i=1}^{t} r_i a_i\Big)}_{0} X^{n_{t+1}} + (\text{όροι βαθμού} < n_{t+1})$$

Οπότε $f \in I$, $f \notin (f_1) + \dots + (f_t)$ (γιατί διαφορετικά θα είχαμε $f_{t+1} \in (f_1) + \dots + (f_t)$) και $\deg f < n_{t+1}$.
ΑΤΟΠΟ, γιατί επιλέξαμε το f_{t+1} να είναι πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού με αυτήν την ιδιότητα.
Άρα το I είναι πεπ. παραγόμενο και το $R[X]$ είναι της Noether. ■

<u>Πόρισμα</u>: k σώμα $\Rightarrow k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ είναι δακτύλιος της Noether.

<u>Πόρισμα</u> (*): Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη μεταθετική k-άλγεβρα A είναι της Noether.

<u>Αποδ.</u> $A \cong k[X_1, X_2, \dots, X_n]/I$ όπου I ιδεώδες