**Ορισμός:** Έστω $M$ $R$-πρότυπο και $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq M$

Θα λέμε ότι το $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν $\exists\, r_1, \dots, r_n \in R$ όχι όλα $0$ τ.ω. $r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = 0$

Διαφορετικά, το σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητο

**Παρατηρήσεις:**

1. Αν $E \subseteq M$ και $0 \in E$, τότε το $E$ δεν είναι γραμ. ανεξάρτητο
2. Αν $Ann_R(M) \neq \{0\}$, τότε υπάρχει $r \in Ann_R(M) \setminus \{0\}$ τ.ω. $r \cdot m = 0 \ \forall\, m \in M$. Άρα δεν υπάρχουν γραμ. ανεξάρτητα υποσύνολα του $M$

**Ορισμός:**

Ένα γραμ. ανεξάρτητο σύνολο $E \subseteq M$ λέγεται <u>βάση</u> του $M$ αν $M = (E)$. Αν το $M$ διαθέτει βάση, τότε το $M$ λέγεται ελεύθερο $R$-πρότυπο

**Παρατηρήσεις:**

1. $M$ ελεύθερο $\Rightarrow$ $M$ πιστό (δηλ. $Ann_R(M) = \{0\}$)
2. Κάθε $m \in M$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμ. συνδυασμός των στοιχείων της βάσης
3. Αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ βάση του $M$, τότε $M = (e_1) \oplus \dots \oplus (e_n)$

   Αν $f: M \to N$ ομομορφισμός, τότε $f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(e_i)$.

Παραδείγματα:

- $R$ είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο με βάση $\{1\}$
  Γενικότερα, $R^n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R\}$, $M_i \cong R$
  είναι ελεύθερο
  $R$-πρότυπο με βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ όπου $e_i = (0, 0, \dots, \underset{\text{θέση } i}{1}, \dots, 0)$
- Αν $R = k$, τότε κάθε $k$-πρότυπο είναι ελεύθερο.
- $R[X]$ είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο με βάση $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$
- $Mat_{m\times n}(R)$ είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο με βάση που δίνεται από τους πίνακες $E_{ij} = (e_{k\ell})_{1\le k, \ell \le n}$ $e_{k\ell} = \begin{cases} 1, & (k,\ell) = (i,j) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
- $\mathbb{Z}[i]$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με βάση $\{1, i\}$
- $R$ ακέραια περιοχή και $I$ κύριο ιδεώδες, $I \neq \{0\}$, $I = (a)$
  τότε το $I$ είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο με βάση $\{a\}$
  Αν το $I$ δεν είναι κύριο ιδεώδες του $R$, τότε το $I$ δεν είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο (έστω $x, y$ στοιχεία της βάσης τότε $y \cdot x - x \cdot y = 0$)
- Το $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο $(Ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (n))$
  Γενικότερα το $R/I$ δεν είναι ελεύθερο $R$-πρότυπο για κάθε ιδεώδες $I$ του $R$.

$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{n}} \cdot \bar{a} = \overline{n \cdot a}$ $\quad\quad$ $\bar{n} \cdot \bar{a} = \overline{na}$

$n \cdot g = \overbrace{g + g + \dots + g}^{n \text{ φορές}}$ για οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα

- Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, αλλά είναι πιστό. Ομοίως το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Πρόταση:

$M$ $R$-πρότυπο

$M$ πεπ. παραγόμενο $\iff$ $\exists$ επιμορφισμός $R$-προτύπων $f: R^n \longrightarrow M$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$

$M$ ελεύθερο πεπ. παραγόμενο $\iff$ $\exists$ ισομορφισμός $R$-προτύπων $f: R^n \longrightarrow M$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$

Ιδέα

Αποδ. $M$ πεπ. παραγ $\iff \exists\, m_1, \dots, m_n$ τ.ω. $M = (m_1, \dots, m_n)$

Ορίζουμε $f: R^n \longrightarrow M$, $\underset{\underset{\underset{\uparrow i}{(0,0,\dots,1,\dots,0)}}{\parallel}}{e_i} \longmapsto m_i$

Παίρνουμε $\{m_1, \dots, m_n\}$ βάση αν το $M$ είναι ελεύθερο

Παρατηρήσεις:

- $\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με βάση $\{1\}$

$\{2\} \subseteq \mathbb{Z}$ είναι γραμ. ανεξ. υποσύνολο του $\mathbb{Z}$

Δεν ισχύει ότι $(2) = \mathbb{Z}$, δηλ. ότι έχουμε βάση επειδή έχουμε το σωστό αριθμό γραμ. ανεξάρτητων στοιχείων

Επίσης έχουμε $(2) \leq \mathbb{Z}$, αλλά $(2) \neq \mathbb{Z}$.

Δεν αληθεύει ότι κάθε γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο επεκτείνεται σε βάση

• $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-πρότυπο

$I = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Το $I$ δεν είναι πιστό υποπρότυπο του $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ αφού

$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(I) = I$ (έχουμε $\bar{2}\cdot\bar{0} = \bar{0}$, $\bar{2}\cdot\bar{2} = \bar{0}$)

$M$ ελεύθερο, $N \leq M$ $\not\Rightarrow$ $N$ ελεύθερο

## Πρότυπα της Noether και του Artin

$R$ δακτύλιος με μονάδα, $M$ $R$-πρότυπο

**Ορισμοί:**

(i) $M$ ικανοποιεί τη συνθήκη αύξουσας αλυσίδας (ΣΑΑ)

αν κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του $M$ αλυσίδα

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή, δηλ. υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ τ.ω. $N_k = N_{k+1} = \dots$

(ii) $M$ ικανοποιεί τη συνθήκη φθίνουσας αλυσίδας (ΣΦΑ)

αν κάθε φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του $M$ αλυσίδα

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

είναι τελικά σταθερή, δηλ. υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ τ.ω. $N_k = N_{k+1} = \dots$

(iii) $M$ ικανοποιεί τη μεγιστική συνθήκη υποπροτύπων (MAX)

αν κάθε μη κενό σύνολο $S$ υποπροτύπων του $M$ περιέχει ένα

maximal

μεγιστικό στοιχείο ($N$ μεγιστικό αν $\nexists$ $T \in S$ τ.ω. $N \subsetneq T$)

(iv) M ικανοποιεί την ελαχιστική συνθήκη υποπροτύπων (MIN) αν κάθε μη κενό σύνολο $S$ υποπροτύπων του M περιέχει ένα ελαχιστικό στοιχείο (N ελαχιστικό αν $\nexists\, T \in S$ τ.ώ. $N \supsetneq T$)

minimal

<u>Παρατήρηση:</u>

Ένα σύνολο υποπροτύπων μπορεί να έχει περισσότερα από ένα μεγιστικά στοιχεία π.χ. στο $\mathbb{Z}$ τα μεγιστικά στοιχεία του συνόλου των ιδεωδών του είναι τα ιδεώδη που παράγονται από πρώτους αριθμούς.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης ικανοποιεί και την ΣΑΑ και την ΣΦΑ.

<u>Θεώρημα 1:</u> Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) M ικανοποιεί την ΣΑΑ

(2) M ικανοποιεί την MAX

(3) Όλα τα υποπρότυπα του M (συμπεριλαμβανομένου του M) είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

<u>Αποδ.</u> (1) $\Rightarrow$ (2)

Έστω $S$ ένα μη κενό σύνολο υποπροτύπων του M.

Ας υποθέσουμε ότι το $S$ δεν έχει μεγιστικό στοιχείο.
Παίρνουμε $N_1 \in S$. Αφού το $N_1$ δεν είναι μεγιστικό, υπάρχει $N_2 \in S$ τ.ω. $N_1 \subsetneq N_2$. Αφού το $N_2$ δεν είναι μεγιστικό, υπάρχει $N_3 \in S$ τ.ω. $N_2 \subsetneq N_3$ κ.ο.κ. Κατασκευάζουμε έτσι μια άπειρη ακολουθία $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \dots$
Αυτό αντικρούει την ΣΑΑ. Άρα το $M$ ικανοποιεί την MAX.

$(2) \Rightarrow (3)$

Έστω $N \leq M$ μη πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω $x_1 \in N$
Τότε $(x_1) \subsetneq N$. Θέτουμε $N_1 := (x_1)$.
Έστω $x_2 \in N \setminus N_1$ και θέτουμε $N_2 = (x_1) + (x_2)$
Τότε $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N$
Έστω $x_3 \in N \setminus N_2$ και θέτουμε $N_3 = (x_1) + (x_2) + (x_3)$
Τότε $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq N$
Συνεχίζουμε έτσι παίρνοντας $x_k \in N \setminus N_{k-1}$ και θέτοντας $N_k := (x_1) + (x_2) + \dots + (x_k)$
Έστω $S = \{N_k : k \in \mathbb{N}^*\}$. Τότε το $S$ δεν έχει μεγιστικό στοιχείο. Αυτό αντικρούει την MAX. Άρα το $N$ είναι πεπ παραγ.

$(3) \Rightarrow (1)$

Έστω $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του $M$. Έστω $N := \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. Τότε $N \leq M$ (Άσκηση)
Άρα το $N$ είναι πεπ. παραγ. Έχουμε δηλ. $x_1, \dots, x_k \in N$ τ.ω. $N = (x_1, \dots, x_k)$. Άρα υπάρχουν $i_1, \dots, i_k$ τ.ω. $x_j \in N_{i_j}$.

Άρα $x_j \in N_{\max\{i_1, i_2, \dots, i_k\}}$ $\forall j=1,\dots,k$

Επομένως $N = (x_1, \dots, x_k) \subseteq N_{\max\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} \subseteq N$

Οπότε έχουμε $N_\ell = N_{\max\{i_1, i_2, \dots, i_k\}}$ $\forall \ell \geq \max\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

<u>Ορισμός</u> Ένα πρότυπο που ικανοποιεί τις συνθήκες (1),(2),(3) του Θ.1 λέγεται <u>πρότυπο της Noether</u>

<u>Θεώρημα 2</u>: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) M ικανοποιεί τη ΣΦΑ

(2) M ικανοποιεί την MIN

<u>Αποδ.</u> (1) $\Rightarrow$ (2)

Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο υποπροτύπων του M

Ας υποθέσουμε ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παίρνουμε $N_1 \in S$. Αφού το $N_1$ δεν είναι ελάχιστο, υπάρχει $N_2 \in S$ τ.ω. $N_1 \supsetneq N_2$. Αφού το $N_2$ δεν είναι ελάχιστο, υπάρχει $N_3 \in S$ τ.ω. $N_2 \supsetneq N_3$ κ.ο.κ. Κατασκευάζουμε έτσι μια άπειρη ακολουθία $N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq N_3 \supsetneq \dots$

Αυτό αντικρούει την ΣΦΑ. Άρα το M ικανοποιεί την MIN.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Έστω $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$ μια φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του M. Έστω $S = \{N_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Αφού M ικανοποιεί την

MIN, το S έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $N_r$ ελάχιστο στο S. Τότε $N_r = N_{r+1} = N_{r+2} = \ldots$

(αφού $N_r \supseteq N_{r+1}$ και $N_r$ ελάχιστο $\Rightarrow N_r = N_{r+1}$)

Οπότε το M ικανοποιεί την ΣΦΑ.

<u>Ορισμός</u> Ένα πρότυπο που ικανοποιεί τις συνθήκες (1),(2) του Θ.2 λέγεται <u>πρότυπο του Artin</u>.