ΒΙΒΛΙΑ:

- S. Lang, Algebra
- T. Y. Lam, A first course in non-commutative rings
- J.-P. Serre, Linear representations of finite groups

R μπορεί να είναι μη μεταθετικός, π.χ. πίνακες

Παρατηρήσεις:

① αριστερό vs δεξί R-πρότυπο

$(r_1 r_2)\cdot m = r_1 (r_2 \cdot m)$ σε αριστερό

$m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1)\cdot r_2$ σε δεξί

② I ιδεώδες αριστερό $r\cdot a \in I \;\; \forall r \in R, \forall a \in I$ ⇝ αριστερό R-υποπρότυπο

δεξί $a \cdot r \in I \;\; \forall r \in R, \forall a \in I$ ⇝ δεξί R-υποπρότυπο

αμφίπλευρο $r \cdot a \in I$ και $a \cdot r \in I$

R/I είναι αντίστοιχα αριστερό ή δεξί ή αμφίπλευρο R-πρότυπο

Μάλιστα $R/I = (1_R + I)$ κυκλικό

ΠΡΟΣΟΧΗ: R/I είναι δακτύλιος αν I αμφίπλευρο

Μηδενιστής:

Έστω M ένα R-πρότυπο.

$\mathrm{Ann}_R(M) = \{ r \in R \mid r\cdot m = 0_M \;\; \forall m \in M \}$

Αν $m \in M$, $\mathrm{Ann}_R(m) = \{ r \in R \mid rm = 0 \}$

Έχουμε $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}_R(m)$

Πρόταση: Ο μηδενιστής είναι αριστερό ιδεώδες (υποπρότυπο) του R

Αποδ 1) $0_R \in Ann_R(M)$

2) Αν $a, b \in Ann_R(M)$, τότε $(a-b)\cdot m = a\cdot m - b\cdot m = 0_M - 0_M = 0_M$ $\forall\, m \in M$

3) Αν $r \in R$, $a \in Ann_R(M)$, τότε $(r\cdot a)(m) = r\cdot(a\cdot m) = r\cdot 0_M = 0_M$ $\forall\, m \in M$

Παραδείγματα:

① $R = k$ σώμα, $Ann_R(M) = \{0\}$ για $M \neq \{0\}$

$Ann_k(M) \in \{\{0\}, k\}$.

Όμως έχουμε $1 \notin Ann_k(M)$ αν $M \neq \{0\}$

② $Ann_R(\{0_M\}) = R$

③ $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow Ann_{\mathbb{Z}}(M) = (n)$

④ $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (\bar{1}) \Rightarrow Ann_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\bar{0}\}$

Πρόταση:

Αν $M \cong N$, τότε $Ann_R(M) = Ann_R(N)$.

Αποδ. Αν $f: M \to N$ ισομορφισμός και $a \in Ann_R(M)$, τότε

$a\cdot m = 0$ $\forall\, m \in M \Leftrightarrow f(am) = f(0) = 0$ $\forall\, m \in M \Leftrightarrow$

$a\cdot f(m) = 0$ $\forall\, m \in M \Leftrightarrow a\cdot n = 0$ $\forall\, n \in N$

Πρόταση: Αν M κυκλικό R-πρότυπο με $M=(m)$, τότε $M \cong R/Ann_R(m)$

Αποδ. Ορίζουμε $f: R \to M$

$$r \mapsto r \cdot m$$

Η f είναι ομομορφισμός R-προτύπων:

- $f(r_1+r_2) = (r_1+r_2)\cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m = f(r_1)+f(r_2)$
- Για $a \in R$, $f(a\cdot r) = (a \cdot r)\cdot m = a\cdot(rm) = a \cdot f(r)$

Η f είναι επί αφού $M = \{ r\cdot m \mid r \in R\}$

$Ker f = \{ r \in R \mid r \cdot m = 0\} = Ann_R(m)$

1ο Θ. Ισομ. $\Rightarrow R/Ann_R(m) \cong M$

Πόρισμα: Αν M, N κυκλικά R-πρότυπα και $Ann_R(m) = Ann_R(n)$ όπου $M=(m)$, $N=(n)$, τότε $M \cong N$

Ορισμός: Το M λέγεται <u>πιστό</u> αν $Ann_R(M) = \{0_R\}$.

Άθροισμα Προτύπων

Έστω $M_1, \dots, M_t \leq M$. Το άθροισμα των υποπροτύπων $M_1, \dots, M_t$ είναι το υποπρότυπο του M που παράγεται από την ένωσή τους και συμβολίζεται με $M_1 + \dots + M_t$ ή $\sum_{i=1}^{t} M_i$

Εχουμε $M_1 + \ldots + M_t = \{ m_1 + m_2 + \ldots + m_t \mid m_i \in M_i \} \supseteq M_i \ \forall i$

Άσκηση!: $K, L, N \leq M$ με $K \subseteq L$. Τότε
$K + (L \cap N) = L \cap (K + N)$

Λύση: $\left.\begin{array}{l} K \subseteq L \\ K \subseteq K+N \end{array}\right\} \Rightarrow K \subseteq L \cap (K+N) \quad (1)$

$\left.\begin{array}{l} L \cap N \subseteq N \subseteq K+N \\ L \cap N \subseteq L \end{array}\right\} \Rightarrow L \cap N \subseteq L \cap (K+N) \quad (2)$

$(1), (2) \Rightarrow K + (L \cap N) \subseteq L \cap (K+N)$

Εστω $x \in L \cap (K+N)$. Τότε $x = \underset{\in L}{l} = \underset{\in K}{k} + \underset{\in N}{n} \Rightarrow n = \underset{\in L}{l} - \underset{\in L}{k} \in L$

Αρα $n \in L \cap N$. Οποτε $x \in K + (L \cap N)$

Επομενως $L \cap (K+N) \subseteq K + (L \cap N)$

2ο Θ. Ισομ. R-προτύπων

$L, N \leq M$. Τότε $L+N/N \cong L/L \cap N$

Αποδ. $f : L \longrightarrow L+N/N$
$\quad l \longmapsto l + N$

$\ker f = L \cap N$

Παρατήρηση : M πεπερασμένα παραγομενο, δηλ. $M=(x_1,\dots,x_n)$ τοτε $M=(x_1)+\dots+(x_n)$

Ευθύ άθροισμα προτύπων (εξωτερικό)

Έστω R-προτυπα $M_1, M_2, \dots, M_t$. Το ευθύ άθροισμα των $M_1, M_2, \dots, M_t$ είναι το καρτεσιανό γινομενο $M_1 \times \dots \times M_t$ με δομή R-προτύπου που δίνεται ως εξής:

- πρόσθεση:

$$(m_1, m_2, \dots, m_t) + (m_1', m_2', \dots, m_t') = (\underset{M_1}{m_1+m_1'}, \underset{M_2}{m_2+m_2'}, \dots, \underset{M_t}{m_t+m_t'})$$

- εξωτερικό πολλαπλασιασμο:

$$r \cdot (m_1, m_2, \dots, m_t) = (\underset{M_1}{r \cdot m_1}, \underset{M_2}{r \cdot m_2}, \dots, \underset{M_t}{r \cdot m_t})$$

Ορισμός : Έστω R-προτυπο M και $M_1, M_2, \dots, M_t \leq M$. Θα λέμε οτι το M είναι το (εσωτερικο) ευθύ άθροισμα των $M_1, \dots, M_t$ αν καθε $m \in M$ γράφεται κατά μοναδικο τροπο ως $m_1 + \dots + m_t$ με $m_i \in M_i$. Εχουμε $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_t$, $m \mapsto (m_1, \dots, m_t)$.
Γράφουμε $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$.

Πρόταση : $M_1, \dots, M_t \leq M$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t \iff \begin{cases} \text{(i) } M = M_1 + \dots + M_t \\ \text{(ii) } M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0_M\} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, t\} \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u> : M πεπερασμένα παραγόμενο, δηλ. $M=(x_1,\dots,x_n)$ τότε $M=(x_1)+\dots+(x_n)$

<u>Ευθύ άθροισμα προτύπων</u> (εξωτερικό)

Έστω R-πρότυπα $M_1, M_2, \dots, M_t$. Το <u>ευθύ άθροισμα</u> των $M_1, M_2, \dots, M_t$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο $M_1 \times \dots \times M_t$ με δομή R-προτύπου που δίνεται ως εξής:

- πρόσθεση:

$$(m_1, m_2, \dots, m_t) + (m_1', m_2', \dots, m_t') = (\underset{M_1}{m_1+m_1'}, \underset{M_2}{m_2+m_2'}, \dots, \underset{M_t}{m_t+m_t'})$$

- εξωτερικό πολλαπλασιασμό:

$$r\cdot(m_1, m_2, \dots, m_t) = (\underset{M_1}{r\cdot m_1}, \underset{M_2}{r\cdot m_2}, \dots, \underset{M_t}{r\cdot m_t})$$

<u>Ορισμός</u> : Έστω R-πρότυπο M και $M_1, M_2, \dots, M_t \leq M$. Θα λέμε ότι το M είναι το (εσωτερικό) ευθύ άθροισμα των $M_1, \dots, M_t$ αν κάθε $m \in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $m_1 + \dots + m_t$ με $m_i \in M_i$. Έχουμε $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_t$
$m \mapsto (m_1, \dots, m_t)$
Γράφουμε $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$.

<u>Πρόταση</u> : $M_1, \dots, M_t \leq M$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t \iff \begin{cases} \text{(i) } M = M_1 + \dots + M_t \\ \text{(ii) } M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0_M\} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, t\} \end{cases}$$

Αποδ. Άσκηση

Ορισμός Θα λέμε ότι το $N \leq M$ είναι ευθύς προσθετέος του M αν υπάρχει $N' \leq M$ ώστε $M = N \oplus N'$

Πρόταση 1:
Αν $M = M_1 \oplus M_2$, τότε $M/M_2 \cong M_1$. Γενικότερα, αν $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$, τότε $M_i \cong M / \bigoplus_{j \neq i} M_j$

Αποδ. $f: \underset{\substack{\omega \\ m_1 \oplus m_2 = m}}{M} \longrightarrow M_1$ προβολή στο M_1

$m_1 \oplus m_2 = m \longmapsto m_1$

Δείχνουμε εύκολα ότι η f είναι ομομορφισμός R-προτύπων:

- $f(m+m') = f(m_1+m_2+m_1'+m_2') = f(\underline{m_1+m_1'}+m_2+m_2')$
$= m_1+m_1' = f(m)+f(m')$
- $f(r \cdot m) = f(r \cdot (m_1+m_2)) = f(\underline{rm_1}+rm_2) = rm_1 = r \cdot f(m)$

Επίσης η f είναι επί αφού $m_1 = f(m_1)$ $\forall m_1 \in M_1$

$\operatorname{Ker} f = \{ m \mid f(m) = 0 \}$
$= \{ m_1 + m_2 \mid m_1 = 0 \} = M_2$

1º Θ. Ισομ $\Rightarrow M/M_2 \cong M_1$

Πρόταση 2: Έστω $M_1, \dots, M_t \leq M$

(1) $M = M_1 + \dots + M_t$, M_i πεπ. παραγ. $\Rightarrow M$ πεπ. παραγ.

② M πεπ. παραγ $\Rightarrow M/M_i$ πεπ. παραγ. $\forall i$

③ $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$, M πεπ. παραγ $\Rightarrow M_i$ πεπ. παραγ.

Αποδ ① $M_i = (X_i)$ X_i πεπερασμένο

$$M = (M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_t) = (\underbrace{X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t}_{\text{πεπερασμένο}})$$

② $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow M/M_i = (x_1 + M_i, x_2 + M_i, \ldots, x_n + M_i)$

③ Πρόταση 1 $\Rightarrow M_i \cong M / \bigoplus_{j \neq i} M_j$

② $\Rightarrow M_i$ πεπ. παραγ.

Παράδειγμα - Ορισμος:

$R = (1)$ R-προτυπο

$$R^n := \bigoplus_{i=1}^{n} \underset{R}{\underset{\wr\wr}{M_i}} = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_i \in R\} \text{ R-προτυπο}$$

πεπ. παραγομενο απο τα στοιχεία $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overset{\text{θεση } i}{1}, 0, \ldots, 0)$

Παρατήρηση:

Τυχαία υποπρότυπα πεπ. παραγ. προτύπου δεν είναι αναγκαστικα πεπ. παραγόμενο, Π.χ. $R = k[X_1, X_2, \ldots]$, $R = (1)$ ως R-προτυπο $I = (X_1, X_2, \ldots)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο γιατί αν $I = (\underset{\text{πεπ.}}{S})$ και $X_j \notin S$, τότε $X_j \notin I$