Πρότυπα (Modules)

R δακτύλιος με μονάδα

Ορισμός: Ένα R-πρότυπο είναι μια αβελιανή ομάδα $(M,+)$ (προσεταιριστική, μεταθετική, $\exists\, 0_M$, $\exists$ αντίθετος) εφοδιασμένη με έναν εξωτερικό (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό:
$R\times M \longrightarrow M$, $(r,m)\longmapsto r\cdot m$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $r\cdot(m_1+m_2) = r\cdot m_1 + r\cdot m_2 \qquad \forall\, r\in R,\ \forall\, m_1,m_2\in M$

(β) $(r_1+r_2)\cdot m = r_1\cdot m + r_2\cdot m \qquad \forall\, r_1,r_2\in R,\ \forall\, m\in M$

(γ) $(r_1\cdot r_2)\cdot m = r_1(r_2\cdot m) \qquad \forall\, r_1,r_2\in R,\ \forall\, m\in M$

(δ) $1_R\cdot m = m \qquad \forall\, m\in M$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός είναι του αριστερού R-προτύπου. Παρόμοια μπορούμε να δώσουμε ορισμό δεξιού R-προτύπου, με εξωτερικό πολ/σμό $M\times R\longrightarrow M$, $(m,r)\longmapsto m\cdot r$

Παραδείγματα (Ασκήσεις)

- $R=k$ σώμα $\Rightarrow$ M k-διανυσματικός χώρος
- $R=\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ M αβελιανή ομάδα

Έστω $m\in M$, $\lambda\in\mathbb{Z}$. Τότε:

$$\lambda \cdot m = \begin{cases} \underbrace{m+m+\dots+m}_{\lambda \text{ φορές}} & \lambda > 0 \\ 0_M & \lambda = 0 \\ (-\lambda)(-m) & \lambda < 0 \end{cases}$$

- $\{0_M\}$ $\quad r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall r \in R$
- $R[x]$ R-προτυπο $\quad r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (r \cdot a_i) x^i$
- $Mat_{m\times n}(R)$ R-πρότυπο $\quad r \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (r a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$
- R R-πρότυπο
- I ιδεωδες του R είναι R-προτυπο
- $R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ φορές}}$ R-προτυπο

με $r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$

- Αν I ιδεωδες του R, τότε R/I είναι R-πρότυπο

με $r \cdot (a+I) = ra + I$

Ο εξωτεριμος πολ/σμος είναι καλά ορισμένος γιατί

αν $a + I = b + I$, τοτε $a - b \in I$ και άρα

$r \cdot (a-b) \in I$, οποτε $ra - rb \in I \Rightarrow ra + I = rb + I$

- $f : R \longrightarrow S$ ομομορφισμός δακτυλίων, τοτε

το S είναι R-προτυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό

$r \cdot s = f(r) \cdot s \quad \forall r \in R, \forall s \in S$

- V k-διανυσματικος χώρος, $\alpha : V \longrightarrow V$ γραμ. απεικόνιση

V είναι $k[x]$-προτυπο με $f(x) \cdot v = f(\alpha)(v)$

όπου $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \alpha^i$ αν $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \alpha^i$ με $\alpha^i = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \dots \circ \alpha}_{i \text{ φορές}}$

Λήμμα: (α) $0_R \cdot m = 0_M \quad \forall\, m \in M$

(β) $r \cdot 0_M = 0_M \quad \forall\, r \in R$

(γ) $(-r)\cdot m = -(r\cdot m) = r\cdot(-m) \quad \forall\, r \in R, \forall\, m \in M$

Αποδ (α) $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R)\cdot m = 0_R \cdot m$

$\Rightarrow 0_R \cdot m + 0_R \cdot m = 0_R \cdot m \Rightarrow 0_R \cdot m = 0_M$

(β) $0_M + 0_M = 0_M \Rightarrow r\cdot(0_M + 0_M) = r \cdot 0_M$

$\Rightarrow r\cdot 0_M + r \cdot 0_M = r\cdot 0_M \Rightarrow r \cdot 0_M = 0_M$

(γ) $r\cdot m + (-r)\cdot m = (r + (-r))\cdot m = 0_R \cdot m = 0_M$

$\Rightarrow -(rm) = (-r)\cdot m$

$r\cdot m + r(-m) = r\cdot(m + (-m)) = r \cdot 0_M = 0_M$

$\Rightarrow -(rm) = r\cdot(-m)$

Ορισμός Έστω M ένα R-πρότυπο. Ένα υποσύνολο N του M λέγεται **R-υποπρότυπο του M** ανν:

(i) $(N,+)$ υποομάδα της $(M,+)$

(ii) Για κάθε $r \in R$ και για κάθε $n \in N$, $r\cdot n \in N$

Δηλ. το N είναι R-πρότυπο με τον εξωτερικό πολ/σμό του M

Θα γράφουμε $N \leq M$

Λήμμα: Έστω N ένα μη κενό υποσύνολο του M. Τότε

$N \leq M \Leftrightarrow \forall\, a, b \in N, \forall\, r \in R$ έχουμε $a - b \in N$ και $r\cdot a \in N$

<u>Παραδείγματα:</u>

- $\{0_M\} \leq M$ για κάθε R-πρότυπο M
- $R = k$ σώμα : Υποπρότυπα ≡ Υποχώροι
- $R = \mathbb{Z}$: Υποπροτυπα ≡ Υποομάδες
- Τα ιδεώδη είναι τα R-υποπρότυπα του R
- $\{ f(x) \in R[X] \mid \deg f(x) \leq n \} \leq R[X]$ ως R-προτυπα

  (Θεωρώντας οτι $\deg 0 = -\infty$)

  <u>Προσοχή</u>: Δεν ειναι υποδακτύλιος του $R[X]$!

  Ειδικότερα $R \leq R[X]$ ως R-προτυπα

<u>Λήμμα</u>: Αν $N_1, N_2 \leq M$, τότε $N_1 \cap N_2 \leq M$

<u>Αποδ.</u> 1) $0_M \in N_1 \cap N_2$

2) $a, b \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a, b \in N_i \ \forall i = 1,2$

$$\overset{N_i \leq M}{\Longrightarrow} a - b \in N_i \ \forall i = 1,2$$

$$\Rightarrow a - b \in N_1 \cap N_2$$

3) $r \in R, a \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow a \in N_i, \ \forall i = 1,2$

$$\Rightarrow r \cdot a \in N_i, \ \forall i = 1,2$$

$$\Rightarrow r \cdot a \in N_1 \cap N_2$$

Πηλίκο προτύπων

Αν $N \leq M$, τότε $(N,+) \trianglelefteq (M,+)$

κανονική υποομάδα

Αρα μπορουμε να ορίσουμε την ομάδα πηλικο

$M/N = \{ m+N \mid m \in M \}$

όπου $m+N = \{ m+n \mid n \in N \}$

Εχουμε $m_1+N = m_2+N \iff m_1-m_2 \in N$

Θ. Ομάδων $\Rightarrow$ M/N είναι αβελιανή ομάδα με πράξη την προσθεση : $(m_1+N)+(m_2+N)=(m_1+m_2)+N$

Το σύνολο M/N είναι R-προτυπο με :

- προσθεση την πρόσθεση της ομάδας πηλικο
- εξωτεριυο πολλαπλασιασμό που ορίζεται ως εξής :

$$R \times M/N \longrightarrow M/N$$

$$(r\ ,\ m+N) \longmapsto r\cdot m+N$$

Είναι καλά ορισμένος γιατί αν $m_1+N=m_2+N$, τότε $m_1-m_2 \in N$. Αφού $N \leq M$, έχουμε $r\cdot(m_1-m_2) \in N$ και αρα $r\cdot m_1 - r\cdot m_2 \in N$. Επομενως $r\cdot m_1+N = r\cdot m_2+N$.