Ανάλυση Πιθανότητες Lecture 6 20/1/21

Υπενθυμίσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χ.μ. και μετρήσιμη $f: \Omega \to [0, +\infty)$

1) για $A \in \mathcal{F}$ το $\int_A f\, d\mu = \int f \cdot \chi_A \, d\mu$ όπου $(f \cdot \chi_A)(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \omega \in A \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

2) Το $\nu: \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ με $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ είναι μέτρο. και $\nu \ll \mu$

3) $\nu \ll \mu$ αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ με $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

4) Πολύ βασική ιδιότητα: Για κάθε g μετρήσιμη ισχύει $\int g\, d\nu = \int f g\, d\mu$

5) <u>Παράγωγος Radon-Nikodym</u>

Αν $\nu \ll \mu$ (ν, μ μέτρα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$)

Τότε $\exists!\ \underbrace{f}_{\mathcal{F}}: \Omega \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

παράγωγος Radon-Nikodym $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ προϋπόθεση ότι $\nu \ll \mu$.

Αν $\mu \ll \nu$ τότε $\exists!\ g = d\mu/d\nu$ και τέτοια ώστε $\mu(A) = \int_A g\, d\nu$

6) μ, ν ισοδύναμα μέτρα $\Leftrightarrow$ $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$

$\Leftrightarrow \big(\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0\big)$.

και σε αυτή την περίπτωση $g = \frac{1}{f}$, όπου $g = \frac{d\mu}{d\nu}$ και $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Άσκηση   Έστω το π.τ. της ρίψης δύο νομισμάτων

$$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$

Θεωρώ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ οπότε όλες οι $f: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες

Θεωρώ και 2 μέτρα πιθανότητας

1. Διαφορετικά σε δίκαια νομίσματα - Ανεξ. ρίψεις οπότε

$$P(\{KK\}) = P(\{K\Gamma\}) = P(\{\Gamma K\}) = P(\{\Gamma\Gamma\}) = \frac{1}{4}$$

2. Μη δίκαια νομίσματα

$$Q(\{KK\}) = \frac{1}{2}, \quad Q(\{K\Gamma\}) = \frac{1}{3}, \quad Q(\{\Gamma K\}) = \frac{1}{6}, \quad Q(\{\Gamma\Gamma\}) = 0.$$

Είναι τα P, Q ισοδύναμα μέτρα; $P, Q : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty)$

a) Ισχύει ότι $P \ll Q$; Εδώ θα πρέπει για τα $A \in \mathcal{F}$ όπου $Q(A) = 0$ τότε το $P(A) = 0$

Έστω $A = \{\Gamma\Gamma\}$. Το $Q(\{\Gamma\Gamma\}) = 0$ ενώ το $P(\{\Gamma\Gamma\}) \neq 0$. άρα δεν ισχύει.

Το P δεν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το Q.

Άρα σίγουρα τα P, Q δεν είναι ισοδύναμα. Τι ισχύει όμως;

Όμως $Q \ll P$ γιατί μόνο για $A = \emptyset$ ισχύει $P(A) = 0$

και $Q(\emptyset) = 0$ από ορισμό μέτρου. Άρα ισχύει

Ποιά παράγωγος Radon-Nikodym ορίζεται;

Αφού $Q \ll P$ ορίζεται η $f = \frac{dQ}{dP} : \Omega \to [0, +\infty)$ τ.μ.

τέτοια ώστε $Q(A) = \int_A f \, dP$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Η f είναι μοναδική!

Να βρεθεί η $f: \Omega \to [0,+\infty)$ ζητάω $f(\kappa\kappa), f(\kappa\gamma), f(\gamma\kappa), f(\gamma\gamma)$

Έστω $A=\{\kappa\kappa\}$ τότε $Q(\{\kappa\kappa\}) = \int_{\{\kappa\kappa\}} f\,dP = \int f\cdot\chi_{\{\kappa\kappa\}}\,dP = \int f(\kappa\kappa)\,\chi_{\{\kappa\kappa\}}\,dP$

$= f(\kappa\kappa)\int \chi_{\{\kappa\kappa\}}\,dP$

$$(f\cdot\chi_{\{\kappa\kappa\}})(\omega) = \begin{cases} f(\kappa\kappa), & \omega=\kappa\kappa \\ 0 & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$= f(\kappa\kappa)\cdot P(\kappa\kappa)$

Άρα $Q(\kappa\kappa) = f(\kappa\kappa)\cdot P(\kappa\kappa) \to f(\kappa\kappa) = \dfrac{Q(\kappa\kappa)}{P(\kappa\kappa)} = \dfrac{1/2}{1/4} = 2$

και όμοια

$Q(\kappa\gamma) = f(\kappa\gamma)\cdot P(\kappa\gamma) \Rightarrow f(\kappa\gamma) = \dfrac{1/3}{1/4} = 4/3$

$Q(\gamma\kappa) = f(\gamma\kappa)\cdot P(\gamma\kappa) \Rightarrow f(\gamma\kappa) = \dfrac{1/6}{1/4} = \dfrac{2}{3}$

$Q(\gamma\gamma) = f(\gamma\gamma)\cdot P(\gamma\gamma) \Rightarrow f(\gamma\gamma) = 0$

$$f(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega=\kappa\kappa \\ 4/3 & \omega=\kappa\gamma \\ 2/3 & \omega=\gamma\kappa \\ 0 & \omega=\gamma\gamma. \end{cases}$$

Ορισμός Συνάρτησης Πυκνότητας

Θυμίζω ότι από Πιθανότητες: Η φ πυκνότητα της τ.μ. X αν η συνεχής $\varphi: \mathbb{R}\to[0,+\infty)$ είναι τέτοια ώστε $P(a<X\le b) = \int_a^b \varphi(t)\,dt$ να ισχύει

και να ισχύει $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1.$

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ και έστω $P \ll \lambda$

δηλ. για κάθε $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A)=0$ τότε $P(A)=0$.

Ποια είναι τα A Borel με $\lambda(A)=0$; Τα $A=\{c\}$ άρα θέλω P μ.π. με $P(\{c\})=0$

Άρα αφού $P \ll \lambda$ τότε ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodym

$$\varphi = \frac{dP}{d\lambda} : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$$

με $P(A) = \int_A \varphi \, d\lambda$ A Borel.

Δηλ. $A = (a,b]$ άρα $\underline{\underline{P((a,b])}} = \int_{(a,b]} \varphi \, d\lambda = \int \varphi \chi_{(a,b]} \, d\lambda$ Riemann

$$= \underline{\underline{\int_a^b \varphi(t)\,dt}}$$

$$1 = P(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

με τους ίδιους υπολογισμούς

Συνάρτηση Κατανομής

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ορίζεται ως

για $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P((-\infty, x]) = \int_{(-\infty,x]} \varphi \, d\lambda = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$.

$$= P(X \le x)$$

όπου $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. και $F(x) \uparrow_x$

Επενδυτική Δυνατότητα

→ κριτήρια για την αξιολόγηση διαφορετικών επενδυτικών δυνατοτήτων

Παράδειγμα Έστω οι τ.μ. X, Y, Z που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες αξίες

X = τιμή μετοχής με μέτρο πιθανότητας P_X

Y = τιμή ομολόγου " " P_Y ορισμένα στο σ-άλγεβρα

Z = τιμή ακινήτου " " P_Z $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχω

$P_X(A) = P$[να έχω κέρδος στο A αν επενδύσω στην αξία X]

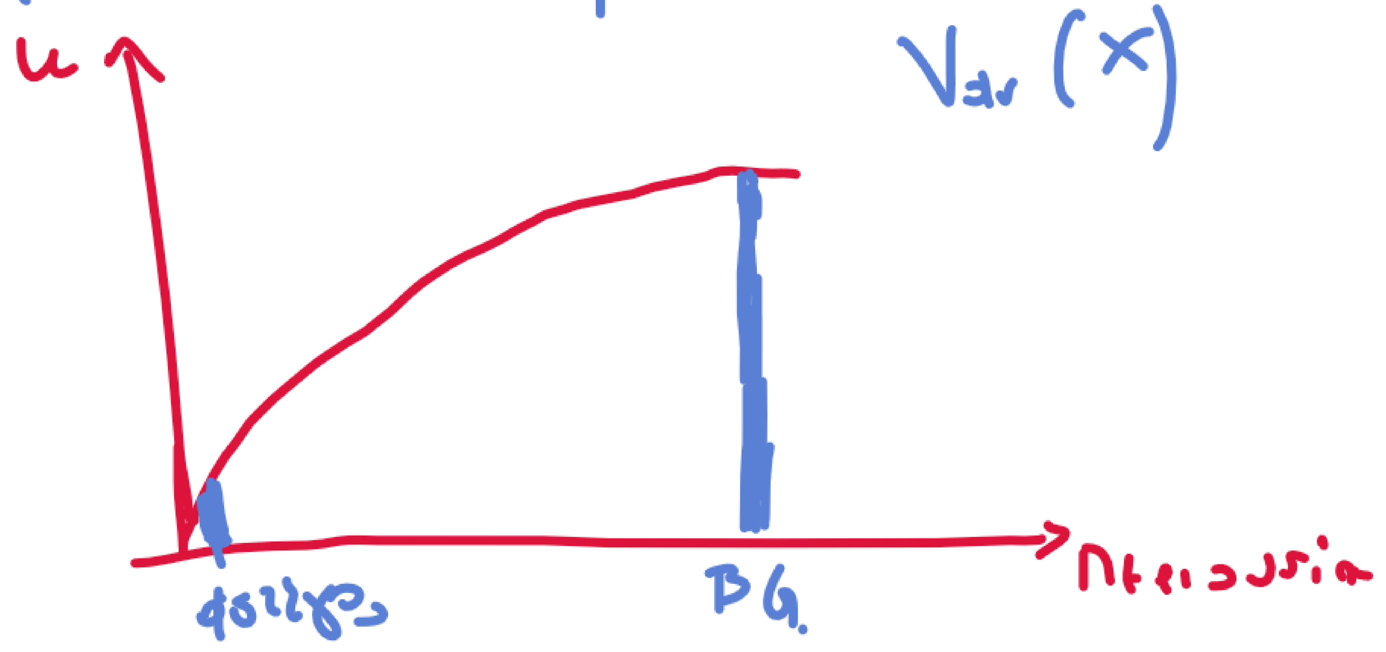
1. Κριτήριο Μεγιστοποίησης Αναμενόμενης Απόδοσης

Η επένδυση στην αξία X προτιμάται έναντι της Y αν $E[X] \geq E[Y]$

$$E[X] = \int X \, dP_X \qquad E[Y] = \int Y \, dP_Y$$

2. Κριτήριο Διακύμανσης Απόδοσης

Η επένδυση στην αξία X προτιμάται έναντι της Y όταν $\dfrac{E[X]}{Var(X)} \geq \dfrac{E[Y]}{Var(Y)}$



3. Κριτήριο Στοχαστικής Κυριαρχίας

Έστω ότι ένας επενδυτής είναι εφοδιασμένος (χαρακτηρίζεται) μία συνάρτηση ωφέλειας $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε η επένδυση στην αξία X προτιμάται έναντι της Y

άρα $E[u(X)] \geq E[u(Y)] \iff F_X(t) \leq F_Y(t)$

Η τμ. X ορίζεται στον $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ με $P_X \ll \lambda$ και ορίζεται η συν. πυκνότητας

$$\varphi_X = \frac{dP_X}{d\lambda} \quad \text{και η συν. κατανομής} \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_X(t)\,dt$$

Ομοίως για την τμ Y θα έχω την συν. πυκνότητας $\varphi_Y = \frac{dP_Y}{d\lambda}$

και την συνάρτηση κατανομής $F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_Y(t)\,dt$

> Αποδεικνύεται ότι η επένδυση στον X προτιμάται έναντι του Y αν $F_X(t) \leq F_Y(t)\ \forall t$.
> $\iff P(X > t) \geq P(Y > t)$

$F_X' = \varphi_X$

$F_Y' = \varphi_Y$

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi_X(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi_Y(t)\,dt = E[u(Y)]$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)F_X'(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)F_Y'(t)\,dt$$

$$\iff \cancel{\left[u(t)F_X(t)\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)F_X(t)\,dt \geq \cancel{\left[u(t)F_Y(t)\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)F_Y(t)\,dt$$

$F(+\infty) = 1$

$F(-\infty) = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)F_Y(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)F_X(t)\,dt \geq 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)\left(F_Y(t) - F_X(t)\right)dt \geq 0 \iff u'(t)\left(F_Y(t) - F_X(t)\right) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ξέρω ότι u αύξουσα $\Rightarrow$ δηλ. θα είναι συνάρτηση ωφέλειας

$$\overset{u'(t) \geq 0}{\iff} F_Y(t) - F_X(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff F_X(t) \leq F_Y(t)$$

Η εικόνα ενός χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον χ.π. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_f)$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Ορίζω ένα μέτρο πιθανότητας P_f στον χ.π. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ όπου

για A Borel: $P_f(A) = P[f \in A]$

Πρόταση $\boxed{\text{Έστω } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Borel μετρήσιμη. Τότε } \int (g \circ f)\, dP = \int g\, dP_f}$

και αν $P_f \ll \lambda$ τότε η $\varphi = \frac{dP_f}{d\lambda}$ παράγωγος Radon-Nikodym είναι η πυκνότητα της τ.μ. f

και $\int (g \circ f)\, dP = \int g\, dP_f = \int g \varphi\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\, dt := E[g(f)]$

Απόδειξη Standard Machine για $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel $\Rightarrow \int (g \circ f)\, dP = \int g\, dP_f$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ΔΕΙΚΤΡΙΑ Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $g = \chi_A$. Τότε $(g \circ f)(\omega) = g(f(\omega)) = \chi_A(f(\omega))$

$$= \begin{cases} 1 & \text{αν } f(\omega) \in A \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$= \chi_{[f \in A]}$$

άρα $\int (g \circ f)\, dP = \int \chi_{[f \in A]}\, dP = P[f \in A] = P_f(A) = \int \chi_A\, dP_f = \int g\, dP_f$.

ok για δείκτριες

ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΠΛΗ Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ διαμέριση του $\mathbb{R}$ και $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ μια μη αρνητική απλή τ.μ.

$$\int (g\circ f)\,dP = \int \left(\lambda_1 \chi_{A_1}+\dots+\lambda_n \chi_{A_n} \circ f\right) dP.$$

$$\left(\lambda_1 \chi_{A_1}+\dots+\lambda_n \chi_{A_n} \circ f\right)(\omega) = \lambda_1 \chi_{A_1}+\dots+\lambda_n \chi_{A_n}\left(f(\omega)\right) = \begin{cases} \lambda_1, & f(\omega)\in A_1 \\ \lambda_2, & f(\omega)\in A_2 \\ \vdots & \\ \lambda_n, & f(\omega)\in A_n \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[f\in A_i]}$$

$$\int (g\circ f)\,dP = \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{[f\in A_i]}\,dP \overset{\text{γραμμ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \chi_{[f\in A_i]}\,dP \overset{(1)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \chi_{A_i}\,dP_f \overset{\text{γραμμ}}{=} \int \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}\,dP_f = \int g\,dP_f.$$

Για μη αρνητική τ.μ. + τ.μ. στο $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ μόνο ΣΑΣ.

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

τμ f = τιμή μετοχής στις 31/12/2021

Σήμερα είμαστε 20/1/2021. Τι θέλουμε να κάνουμε; Θέλουμε εκτίμηση για την f με βάση τη σημερινή πληροφόρηση (όλη τη προϊστορία)

Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χ.π. και τμ $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ($\mathcal{F}$ αντιστοιχεί στην πληροφόρηση που θα διαθέτω 31/12.)

Θεωρώ μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ η οποία αντιστοιχεί στην πληροφόρηση ως 20/1/2021

Θέλω μία άλλη τμ g που να είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και να εκτιμά βέλτιστα την f. Αυτή είναι η $E[f|\mathcal{G}]:\Omega\to\mathbb{R}$ δεσμευμένη μέση τιμή.

Θέλω να ορίσω την $E[f|g]: \Omega \to \mathbb{R}$.

1η Περίπτωση: Δεσμεύουμε ως προς ενδεχόμενο $B \in \mathcal{F}$ με $P(B) > 0$

1) $$\boxed{E[f|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B f \, dP}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{F}$ τότε $E[\chi_A|B] = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} := P(A|B)$

Απόδ. $E[\chi_A|B] = \dfrac{1}{P(B)} \int_B \chi_A \, dP = \dfrac{1}{P(B)} \int \chi_A \cdot \chi_B \, dP = \dfrac{1}{P(B)} \int \chi_{A\cap B} \, dP = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A\cap B}$

2. $E[f|\Omega] = E[f]$

Απόδ. $E[f|\Omega] = \dfrac{1}{P(\Omega)} \int_\Omega f \, dP = \int f \chi_\Omega \, dP = \int f \, dP = E[f]$.

2η Περίπτωση: Δεσμεύουμε ως προς απλή τ.μ. (δηλ. να ορίσω την $E[f|g]$)

Έστω $B_1, \dots, B_n$ διαμέριση του Ω και $g = b_1\chi_{B_1} + \dots + b_n \chi_{B_n}$ απλή τ.μ.

Πώς ορίζω την $E[f|g]$;

1) Δεσμευμένη μέση τιμή της $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ως προς την $\mathcal{F}$-μετρήσιμη απλή g είναι $\sigma(g)$-μετρήσιμη (παραμετρίζεται σ.α.) μέσα από την g)

και $$E[f|g](\omega) = \begin{cases} E[f|B_1], & \omega \in B_1 \\ E[f|B_2], & \omega \in B_2 \\ \vdots \\ E[f|B_n], & \omega \in B_n. \end{cases} = \sum_{i=1}^{n} E[f|B_i]\chi_{B_i}.$$

άρα η $E[f|\mathcal{G}]$ είναι επίσης απλή τ.μ.

Παρατηρήσεις

1) Η $E[f|\mathcal{G}]$ δεν εξαρτάται από τις τιμές της g.
Ό,τι συνεισφέρει η $\mathcal{G}$ είναι η διαμέριση του Ω δηλ. τα $B_1, B_2 \dots B_n$
ώστε να υπολογίσω τα $E[f|B_i] = \dfrac{1}{P(B_i)} \displaystyle\int_{B_i} f\,dP$

2) Η $E[f|\mathcal{G}]$ είναι $\sigma(\mathcal{G})$-μετρήσιμη όπου

$\sigma(\mathcal{G}) = \{\emptyset, \Omega, B_1, \dots B_n,$ οι ενώσεις των B_i, B_j, οι ενώσεις των $B_i, B_j, B_k, \dots$
$\dots$ οι ενώσεις των $n-1$ το πολύ $B_i\}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $$\int_{B_i} \overset{\text{τ.μ.}}{E[f|\mathcal{G}]}\,dP = \int_{B_i} f\,dP$$

Απόδειξη

$$\int_{B_i} E[f|\mathcal{G}]\,dP = \int \left(\sum_{i=1}^{n} E[f|B_i]\chi_{B_i}\right)\cdot \chi_{B_i}\,dP \;\overset{\substack{B_1,\dots B_n \text{ διαμέριση} \\ \chi_{B_i}\chi_{B_j} = \chi_{B_i\cap B_j} = 0}}{=\!=}$$

$$= \int E[f|B_i]\,\chi_{B_i}\cdot\chi_{B_i}\,dP = \int E[f|B_i]\,\chi_{B_i}\,dP$$

$$= \int E[f|B_i](\omega)\,\chi_{B_i}\,dP = E[f|B_i](\omega)\cdot\int \chi_{B_i}\,dP$$

$$= E[f|B_i]\cdot P(B_i) = \frac{1}{\cancel{P(B_i)}}\int_{B_i} f\,dP\cdot \cancel{P(B_i)} = \int_{B_i} f\,dP$$

2) Αν g σταθερή συνάρτηση δηλ. $g(\omega)=c$ $\forall \omega \in \Omega$ τότε $E[f|g]=E[f]$

Απόδ. $E[f|g] = E[f|\underbrace{c \cdot \chi_\Omega}_{\text{απλή}}] = E[f|\Omega] \cdot \chi_\Omega = E[f] \cdot 1 = E[f]$.

με ένα διαμ.

Ω.

3) Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής : $E[f] = E[E[f|g]]$ για g απλή.

3: Υπενθύμιση Δεσμεύσεις ως προς αυθαίρετη τ.μ. $g:\Omega\to\mathbb{R}$

Ορίζω την $E[f|g]:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι $\sigma(g)$-μετρήσιμη τέτοια ώστε

για κάθε $B\in\sigma(g)$

$$\int_B E[f|g]\,dP = \int_B f\,dP.$$

Στο γενικό πλαίσιο ορίζεται η $E[f|\mathcal{G}]$ $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ σ-υποάλγεβρα.

Η $E[f|\mathcal{G}]$ είναι η $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τέτοια ώστε $\forall B\in\mathcal{G}$ να ισχύει

$$\int_B E[f|\mathcal{G}]\,dP = \int_B f\,dP$$