Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα
ΕΡΓΑΣΙΑ

Μέρος Ι (Θεωρητική επεξεργασία)

Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Εφαρμόζουμε σε αυτόν μετασχηματισμούς Gauss μέχρι να γίνει άνω τριγωνικός.

(i) Αποδείξτε ότι:

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}}, 1 \le r \le n-1$$

όπου:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

(ii) Ένας πίνακας λέγεται Completely Pivoted (CP) εάν κατά τη διάρκεια των μετασχηματισμών Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές των γραμμών ή των στηλών του. Αποδείξτε ότι εάν ο A είναι CP και εφαρμοσθούν σε αυτόν μετασχηματισμοί Gauss τότε:

A)

$$g(n, A) = \max\left\{1, \max_{1\le r\le n-1}\left|\frac{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r+1 \end{pmatrix}}{a_{11}\cdot A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \end{pmatrix}}\right|\right\}$$

όπου $g(n, A)$ το growth του πίνακα A.

B) Κάθε οδηγό στοιχείο $p_i = \frac{A(i)}{A(i-1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ όπου $A(i)$ είναι η $i \times i$ κύρια υποορίζουσα του A.

Μέρος ΙΙ (Υπολογιστική επεξεργασία)

Ορισμός: Ένας πίνακας Hadamard τάξης n είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία ± 1 έτσι ώστε:

$$H \cdot H^T = n \cdot I$$

Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με το γεγονός ότι οποιεσδήποτε δύο γραμμές (ή στήλες) του H είναι ορθογώνιες. Η ιδιότητα αυτή παραμενει εάν εναλλάξουμε τις γραμμές ή τις στήλες του καθώς και εάν τις πολλαπλασιάσουμε με -1. Οι πίνακες που προκύπτουν ονομάζονται ισοδύναμοι. Συγκεκριμένα δύο πίνακες Hadamard H_1 και H_2 λέγονται ισοδύναμοι εάν:

$$H_2 = P \cdot H_1 \cdot Q$$

όπου P, Q μεταθετικοί πίνακες με στοιχεία $0, \pm 1$.

Η εικασία του growth για πίνακες Hadamard:

Έστω A ένας CP $n \times n$ Hadamard πίνακας. Εάν εφαρμόσουμε σε αυτόν απαλοιφή Gauss τότε:

1. $g(n, A) = n$.
2. Τα τέσσερα τελευταία pivots είναι: $\frac{n}{2}$ ή $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}$, n.
3. Το πέμπτο από το τέλος pivot είναι $\frac{n}{3}$ ή $\frac{n}{2}$.
4. Το έκτο από το τέλος pivot είναι $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{10/3}$ ή $\frac{n}{8/3}$.
5. Κάθε pivot πριν από το τελευταίο έχει μέγεθος το πολύ $\frac{n}{2}$.
6. Τα πρώτα έξι pivots είναι ίσα με $1, 2, 2, 4, 2$ ή 3, $\frac{10}{3}$ ή $\frac{8}{3}$ ή 4.
7. Το πέμπτο pivot μπορεί να είναι 2 σε τάξεις 2^t και είναι 3 για όλες τις άλλες.
8. Το έκτο pivot μπορεί να είναι 4 σε τάξεις 2^t και είναι $\frac{10}{3}$ ή $\frac{8}{3}$ για όλες τις άλλες.

Να γραφούν συναρτήσεις JULIA που να υλοποιούν την απαλοιφή Gauss με μερική και ολική οδήγηση. Με την βοήθειά τους:

- Μελετήστε τη δομή των οδηγών στοιχείων που προκύπτουν από την εφαρμογή Gauss με ολική οδήγηση και Gauss με μερική οδήγηση σε πίνακες Hadamard τάξης $n = 20$.
- Καταγράψτε τις διαφορετικές δομές που εντοπίζονται. Για κάθε διαφορετική δομή καταγράψτε την μορφή από την οποία προέκυψε.

Τι συμπεράσματα προκύπτουν;

Τους πίνακες Hadamard ταξης 20 μπορείτε να τους βρείτε στον επισύναπτόμενο αρχείο 2).

Μέρος III (Ερευνητική επεξεργασία)

Επιπλέον μελέτη για τους πίνακες Hadamard

Στην αναφορά 4) αποδεικνύονται θεωρητικά οι τιμές των $(n-3) \times (n-3)$, $(n-4) \times (n-4)$ κύριων υποοριζουσών ενός πίνακα Hadamard. Πρόσφατα στην Αναφορά 5) προτείνεται μία απόδειξη που αφορά τις τιμες των $(n-j) \times (n-j)$ κύριων υποοριζουσών. Μελετείστε αναλυτικά την προτεινόμενη απόδειξη και προσαρμόστε τη για τις περιπτώσεις των $(n-4) \times (n-4)$, $(n-5) \times (n-5)$. Συγκρίνετε την προτεινόμενη τεχνική με αυτή της Αναφοράς 4). Η μέθοδος της Αναφοράς 5) μπορεί να οδηγήσει σε πιθανό αλγόριθμο υπολογισμού υποοριζουσών;

<u>ΑΝΑΦΟΡΕΣ</u> (αντιστοιχούν στα επισυναπτόμενα αρχεία)

1) Gantmacher's Book
2) Πίνακες Hadamard τάξης 20
3) C. Kravvaritis, M. Mitrouli , The growth factor of a Hadamard matrix of order 16 is 16, Numer. Linear Algebra Appl., 426, 774-809 (2007).
4) C. Koukouvinos, M. Mitrouli and J. Seberry, An algorithm to find formulae and values of minors for Hadamard matrices, Linear Algebra Appl., 330, 129-147, (2001).
5) Y. Li, J. Ji, Y. Liu, and X. Zhang, A note of values of minors for Hadamard matrices, arXiv:1905.04662v1, (2019).