# Μέθοδοι Krylov

Δοθέντος ενός πίνακα $A$ $n \times n$ και ενός διανύσματος $x$ $n \times 1$ μπορούν να ορισθούν οι ακόλουθες έννοιες:

- *Ακολουθία Krylov* (Krylov sequence):
  η ακολουθία των διανυσμάτων $\{x, Ax, \ldots, A^{n-1}x\}$
- *Πίνακας Krylov* (Krylov matrix):
  $K_n(A, x) = (x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$
- *Υπόχωρος Krylov* (Krylov subspace) διάστασης $m$:
  $K_m(A, x) = span(x, Ax, \ldots, A^{m-1}x)$
  υποθέτοντας ότι τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα.

Οι βασικές μέθοδοι Krylov είναι δύο:

1. **η μέθοδος Arnoldi**
2. **η μέθοδος Lanczos** ($A$ συμμετρικός).

Οι δύο παραπάνω μέθοδοι ταυτίζονται όταν ο πίνακας $A$ είναι συμμετρικός με την προϋπόθεση ότι τα αρχικά διανύσματα είναι τα ίδια.

Οι μέθοδοι Arnoldi και Lanczos χρησιμοποιούνται σαν μέθοδοι προβολής στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα για την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων στα οποία ο πίνακας $A$ είναι μεγάλης διάστασης και αραιός.

**Πλεονέκτημα των μεθόδων Krylov**
Ένα μεγάλο πρόβλημα προβάλλεται σε έναν υπόχωρο Krylov διάστασης $m$ ($m << n$). Τότε το προβάλλων πρόβλημα επιλύεται χρησιμοποιώντας μία συνηθισμένη τεχνική και η λύση αυτή είναι και η λύση του αρχικού προβλήματος.

# Η μέθοδος Arnoldi

## Βασική ιδέα

Η βασική ιδέα της μεθόδου Arnoldi [1], είναι η ακόλουθη:
Δοθέντος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ενός μη μηδενικού διανύσματος $\upsilon$ διάστασης $n$ και ενός ακεραίου $m \leq n$, δημιουργούνται ένα σύνολο από $(m+1)$ ορθοκανονικά διανύσματα $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ και ένας $(m+1) \times m$ άνω Hessenberg πίνακας $\tilde{H}_m$ ώστε να ισχύει η σχέση:

$$AV_m = V_{m+1}\tilde{H}_m \tag{1}$$

όπου:
$V_m = (v_1, \ldots, v_m)$
$V_{m+1} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1})$

## Ο αλγόριθμος Arnoldi

Η σχέση $AV_m = V_{m+1}\tilde{H}_m$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}) \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \cdots & h_{2m} \\ & h_{32} & \ddots & \vdots & h_{3m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Το $v_1$ επιλέγεται ώστε $v_1 = \dfrac{v}{\|v\|_2}$ όπου $v$ είναι το δοσμένο διάνυσμα.

**Βήμα 1:** (Υπολογισμός $v_2$ και πρώτης στήλης του $\tilde{H}_m$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της πρώτης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2) προκύπτει:

$$Av_1 = h_{11}v_1 + h_{21}v_2$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με $v_1^T$, παίρνουμε:

$$v_1^T Av_1 = h_{11}$$

(αφού $v_1^T v_1 = 1$ και $v_1^T v_2 = 0$, λόγω κατασκευής των $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$)
Θέτοντας $\hat{v} = Av_1 - h_{11}v_1$
παίρνουμε $h_{21} = \|\hat{v}\|_2$
και μετά θέτουμε: $v_2 = \dfrac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|_2} = \dfrac{\hat{v}}{h_{21}}$

**Βήμα 2:** (Υπολογισμός $v_3$ και δεύτερης στήλης του $\tilde{H}_m$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της δεύτερης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (2) προκύπτει:

$$Av_2 = h_{12}v_1 + h_{22}v_2 + h_{32}v_3 \qquad (*)$$

Πολλαπλασιάζοντας την $(*)$ με $v_1^T$ προκύπτει:

$$v_1^T Av_2 = h_{12}$$

Θέτουμε $\hat{v_1} = Av_2 - h_{12}v_1$
Πολλαπλασιάζοντας την $(*)$ με $v_2^T$ παίρνουμε:

$$v_2^T Av_2 = v_2^T h_{12} v_1 + h_{22}$$

$$\Rightarrow h_{22} = v_2^T(Av_2 - h_{12}v_1) = v_2^T\hat{v}_1$$

Θέτουμε: $\hat{v}_2 = \hat{v}_1 - h_{22}v_2$
και παίρνουμε:

$$h_{32} = \|\hat{v}_2\|_2$$

$$v_3 = \frac{\hat{v}_2}{h_{32}}$$

Τα άλλα βήματα είναι ανάλογα.

**Βήμα κ:** (Υπολογισμός $v_{k+1}$ και κ-στήλης του $\tilde{H}_m$ )
Ο υπολογισμός του $v_{k+1}$ και της κ-στήλης του $\tilde{H}_m$ γίνεται από την αναδρομική σχέση:

$$Av_k = h_{1k}v_1 + \cdots + h_{kk}v_k + h_{k+1,k}v_{k+1} \tag{3}$$

λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι ορθοκανονικά.

**Αλγόριθμος 1.1: Μέθοδος Arnoldi**

**Είσοδοι:**
**1.** $A$, $n \times n$ πίνακας
**2.** $v$, $n \times 1$ διάνυσμα
**3.** $m$, θετικός ακέραιος $\leq n$
**Έξοδοι:**
**1.** ένα σύνολο από $m+1$ ορθοκανονικά διανύσματα $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$
**2.** ένας $(m+1) \times m$ άνω Hessenberg πίνακας $\tilde{H}_m = (h_{ij})$
Βήμα 0: Κανονικοποίηση του διανύσματος $v$
Θέσε $v_1 = \dfrac{v}{\| v \|_2}$
Βήμα 1: $for\ k = 1, 2, \ldots, m$
$\hat{v} = Av_k$
$for\ j = 1, 2, \ldots, k$
$h_{j,k} = v_j^T\hat{v}$
$\hat{v} = \hat{v} - h_{j,k}v_j$
$end$
$h_{k+1,k} = \| \hat{v} \|_2.\ if\ h_{k+1,k} = 0\ stop$
$v_{k+1} = \dfrac{\hat{v}}{h_{k+1,k}}$
$end$

### Υπολογισμός πολυπλοκότητας του αλγόριθμου 1.1

Παρακάτω σημειώνουμε τις πράξεις που απαιτούνται σε κάθε βήμα του αλγόριθμου Arnoldi ώστε να βρεθεί η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου:

$for\ k = 1, 2, \ldots, m$
$\quad \hat{v} = Av_k \qquad\qquad \longrightarrow n^2\ flops$
$\quad for\ j = 1, 2, \ldots, k$
$\qquad h_{j,k} = v_j^T \hat{v} \qquad\qquad \longrightarrow n\ flops$
$\qquad \hat{v} = \hat{v} - h_{j,k} v_j \qquad \longrightarrow n\ flops$
$\quad end$
$\quad h_{k+1,k} = \| \hat{v} \|_2.\ if\ h_{k+1,k} = 0\ stop \qquad \longrightarrow n\ flops$
$\quad v_{k+1} = \dfrac{\hat{v}}{h_{k+1,k}} \qquad\qquad \longrightarrow n\ flops$
$end$

Η συνολική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου Arnoldi είναι:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m} n^2 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} 2n + \sum_{k=1}^{m} 2n = \\
= \;& n^2 m + \sum_{k=1}^{m} 2nk + 2nm \\
= \;& n^2 m + 2n \frac{(1+m)m}{2} + 2nm \\
= \;& n^2 m + nm + nm^2 + 2nm \\
= \;& n^2 m + nm^2 + 3nm
\end{aligned}
$$

Άρα, η πολυπλοκότητα της μεθόδου Arnoldi είναι $O(n^2 m + nm^2)$.

**Breakdown**

Ο αλγόριθμος Arnoldi σταματάει στο βήμα $j$ αν το διάνυσμα $\hat{v}$ είναι μηδέν σε αυτό το βήμα. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο βαθμός του ελάχιστου πολυωνύμου του $v_1$ είναι ακριβώς $j$, δηλαδή είναι γραμμικός συνδυασμός $j$ ιδιοδιανυσμάτων [1].

### Βασικές σχέσεις

Από τον αλγόριθμο Arnoldi (Αλγόριθμος 1.1) προκύπτουν ορισμένες βασικές σχέσεις.

Έστω:
$V_m = (v_1, \ldots, v_m)$
$V_{m+1} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1})$

$H_m =$ ο $m \times m$ άνω Hessenberg πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας την $(m+1)$ γραμμή του πίνακα $\tilde{H}_m$

1. **Arnoldi παραγοντοποίηση**
   Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:
   $AV_m - V_m H_m = h_{m+1,m}(0, \ldots, 0, v_{m+1})$
   $\Rightarrow AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m}(0, \ldots, 0, v_{m+1})$
   $\Rightarrow AV_m = V_m H_m + f_m e_m^T$
   όπου: $f_m = h_{m+1,m} v_{m+1}$
   Η παραπάνω παραγοντοποίηση λέγεται Arnoldi παραγοντοποίηση.

2. **QR παραγοντοποίηση του πίνακα Arnoldi-Krylov**
   Έστω $K_m \equiv K_m(A, b) = (b, Ab, \ldots, A^{m-1}b)$ πίνακας Krylov.
   Η QR παραγοντοποίηση του πίνακα $K_m$ είναι:

$$K_m = V_m R_m$$

3. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1) με $V_m^T$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} V_m^T A V_m &= V_m^T V_{m+1} \tilde{H}_m \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m & v_{m+1} \end{bmatrix} \tilde{H}_m \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{H}_m = H_m \end{aligned}$$

4. Μπορεί να καθιερωθεί ότι κάθε $v_i = p_{i-1}(A) v_1$ $i = 2, 3, \ldots,$ όπου το $p_{i-1}$ είναι πολυώνυμο βαθμού $i - 1$.

**Σύνδεση μεθόδου Arnoldi με Modified Gram-Schmidt (M.G.S.)**

Έστω ότι ισχύει η σχέση:

$$A = QR$$

όπου:
$A$ πίνακας $n \times n$
$Q$ ορθογώνιος πίνακας $n \times n$
$R$ άνω τριγωνικός πίνακας $n \times n$

Η σχέση $A = QR$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Θέτουμε $a_i \equiv q_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

**Βήμα 1:** (Υπολογισμός $q_1$ και πρώτης στήλης του $R$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της πρώτης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4) προκύπτει:

$$a_1 = r_{11} q_1.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με $q_1^T$, παίρνουμε:

$$q_1^T a_1 = r_{11}.$$

Άρα, $r_{11} = \| q_1 \|_2$ (αφού θέσαμε $a_1 \equiv q_1$).
Θέτουμε $q_1 = \dfrac{q_1}{r_{11}}$.

**Βήμα 2:** (Υπολογισμός $q_2$ και δεύτερης στήλης του $R$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της δεύτερης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4) προκύπτει:

$$a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2. \qquad (\star)$$

Πολλαπλασιάζοντας την $(\star)$ με $q_1^T$ προκύπτει:

$$q_1^T a_2 = r_{12}.$$

Θέτουμε $q_2 = a_2 - r_{12} q_1$.
Πολλαπλασιάζοντας την $(\star)$ με $q_2^T$ παίρνουμε:

$$q_2^T a_2 = q_2^T r_{12} q_1 + r_{22}$$

$$\Rightarrow r_{22} = q_2^T(a_2 - r_{12}q_1) = q_2^T q_2 = \| q_2 \|_2 \ .$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος:

**Αλγόριθμος 1.2: Μέθοδος Modified Gram-Schmidt (M.G.S)**

Θέσε $q_k \equiv a_k$ , $k = 1, 2, \ldots, n$
  $for\ k = 1, 2, \ldots, n$
    $r_{kk} = \| q_k \|_2$
    $q_k = \dfrac{q_k}{r_{kk}}$
    $for\ j = k+1, \ldots, n$
      $r_{k,j} = q_k^T q_j$
      $q_j = q_j - r_{k,j} q_k$
    $end$
  $end$

Συγκρίνοντας τη μέθοδο Arnoldi με τη Modified Gram-Schmidt (M.G.S.) είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι:
οι δύο μέθοδοι έχουν την ίδια βασική ιδέα και δουλεύουν με τον ίδιο τρόπο. Ουσιαστικά, στη M.G.S. στο πρώτο μέλος έχουμε $a_i$ ενώ στην Arnoldi $Av_i$. Η μόνη διαφορά είναι ότι στη M.G.S. μηδενίζουμε στοιχεία για να προκύψει άνω τριγωνικός πίνακας ενώ στην Arnoldi να προκύψει άνω Hessenberg πίνακας.

## Ο συμμετρικός αλγόριθμος Lanczos

Στην περίπτωση που ο πίνακας $A$ είναι συμμετρικός, ο αλγόριθμος Arnoldi (Αλγόριθμος 1.1) λέγεται συμμετρικός αλγόριθμος Lanczos [1]. Σε αυτή την περίπτωση, ο άνω Hessenberg πίνακας $\tilde{H}_m$ γίνεται συμμετρικός, τριδιαγώνιος πίνακας $\tilde{T}_m$ ο οποίος γράφεται στη μορφή:

$$\tilde{T}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_m \\ 0 & \ldots & \beta_m & \alpha_{m+1} \end{pmatrix}$$

Η σχέση (1) που ισχύει στη μέθοδο Arnoldi ανάγεται στη:

$$AV_m = V_{m+1}\tilde{T}_m \tag{5}$$

$\Rightarrow$

$$A(v_1,\dots,v_m) = (v_1,\dots,v_m,v_{m+1}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_m \\ 0 & \dots & \beta_m & \alpha_{m+1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Το $v_1$ επιλέγεται ώστε $v_1 = \dfrac{v}{\|v\|_2}$ όπου $v$ είναι το δοσμένο διάνυσμα.

**Βήμα 1:** (Υπολογισμός $v_2$, $\alpha_1$ και $\beta_1$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της πρώτης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (6) προκύπτει:

$$Av_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2.$$

Θέτουμε $\hat{v_2} = Av_1$

$$\alpha_1 = v_1^T A v_1 = v_1^T \hat{v_2}.$$

Θέτοντας $\hat{v_2}' = \hat{v_2} - a_1 v_1$ παίρνουμε $\beta_1 = \|\hat{v_2}'\|_2$
και μετά θέτουμε: $v_2 = \dfrac{\hat{v_2}'}{\beta_1}$.

**Βήμα 2:** (Υπολογισμός $v_3$, $\alpha_2$ και $\beta_2$)
Συγκρίνοντας τις εισόδους της πρώτης στήλης και στα δύο μέλη της εξίσωσης (6) προκύπτει:

$$Av_2 = \beta_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 v_3.$$

Θέτουμε $\hat{v_3} = Av_2 - \beta_1 v_1$

$$\alpha_2 = v_2^T (Av_2 - \beta_1 v_1) = v_2^T \hat{v_3}.$$

Θέτοντας $\hat{v_3}' = \hat{v_3} - a_2 v_2$ παίρνουμε $\beta_2 = \|\hat{v_3}'\|_2$
και μετά θέτουμε: $v_3 = \dfrac{\hat{v_3}'}{\beta_2}$.

Τα άλλα βήματα είναι ανάλογα.

Η αναδρομική σχέση (3) που ισχύει στη μέθοδο Arnoldi τώρα παίρνει τη μορφή:

$$Av_k = \beta_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k + \beta_k v_{k+1}. \tag{7}$$

Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος:

**Αλγόριθμος 1.3: Συμμετρικός Αλγόριθμος Lanczos**

**Είσοδοι:**
**1.** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας
**2.** $v$, $n \times 1$ διάνυσμα
**3.** $m$, θετικός ακέραιος $< n$
**Έξοδοι:**
**1.** ένα σύνολο από $m+1$ ορθοκανονικά διανύσματα $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$
**2.** τις εισόδους $\alpha_j$ και $\beta_j$ του συμμετρικού και τριδιαγώνιου πίνακα $\tilde{T_m}$
Βήμα 0: Θέσε $v_0 = 0, \beta_0 = 0, v_1 = \dfrac{v}{\| v \|_2}$
Βήμα 1: $for\ j = 1, 2, \ldots, m+1$

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{j+1} = Av_j - \beta_{j-1} v_{j-1}\\
&\alpha_j = v_j^T \hat{v}_{j+1}\\
&\hat{v}_{j+1} = \hat{v}_{j+1} - a_j v_j\\
&\beta_j = \| \hat{v}_{j+1} \|_2.\ if\ \beta_j = 0\ stop\\
&v_{j+1} = \frac{\hat{v}_{j+1}}{\beta_j}
\end{aligned}$$

$end$

### Υπολογισμός πολυπλοκότητας του αλγόριθμου 1.3

Παρακάτω σημειώνουμε τις πράξεις που απαιτούνται σε κάθε βήμα του αλγόριθμου συμμετρικού Lanczos ώστε να βρεθεί η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου:

$for\ j = 1, 2, \ldots, m+1$

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_{j+1} = Av_j - \beta_{j-1} v_{j-1} && \longrightarrow n^2 + n\ flops\\
&\alpha_j = v_j^T \hat{v}_{j+1} && \longrightarrow n\ flops\\
&\hat{v}_{j+1} = \hat{v}_{j+1} - a_j v_j && \longrightarrow n\ flops\\
&\beta_j = \| \hat{v}_{j+1} \|_2.\ if\ \beta_j = 0\ stop && \longrightarrow n\ flops\\
&v_{j+1} = \frac{\hat{v}_{j+1}}{\beta_j} && \longrightarrow n\ flops
\end{aligned}$$

$end$

Η συνολική πολυπλοκότητα του συμμετρικού αλγόριθμου Lanczos είναι:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m+1}(n^2+5n) = \\
&= (m+1)n^2 + 5(m+1)n \\
&= mn^2 + n^2 + 5mn + 5n.
\end{aligned}$$

Άρα, η πολυπλοκότητα του συμμετρικού αλγόριθμου Lanczos είναι $O(mn^2)$.

Όπως και στη μέθοδο Arnoldi , έτσι και στο συμμετρικό αλγόριθμο Lanczos ισχύουν οι ακόλουθες, αντίστοιχες, σχέσεις.

Θέτουμε $V_j = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots, & v_j \end{pmatrix}$.

1. **Συμμετρικός Lanczos παραγοντοποίηση**
   $AV_m = V_{m+1}\tilde{T}_m$
2. **QR παραγοντοποίηση του συμμετρικού Lanczos-Krylov πίνακα**
   $K_m = V_m R_m$
3. $V_m^T A V_m = T_m$

**Παράδειγμα**

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & 1 & 10 \\ 5 & 9 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ συμμετρικός πίνακας,

$v = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$m = 3$.

Θα εφαρμόσουμε το συμμετρικό αλγόριθμο Lanczos με τις παραπάνω εισόδους για να βρούμε $m+1 = 4$ ορθοκανονικά διανύσματα $v_i$ και έναν τριδιαγώνιο και συμμετρικό πίνακα $\tilde{T}_3$ $4 \times 4$ (γενικά, $(m+1) \times (m+1)$).

**Βήμα 0:**

Θέτω $\beta_0 = 0$, $v_0 = 0$
Το δοσμένο διάνυσμα $v$ είναι ήδη μοναδιαίο οπότε δεν χρειάζεται κανονικοποίηση.
Έτσι, $v_1 = v$.

**Βήμα 1:** (Υπολογισμός $v_2$, $\alpha_1$ και $\beta_1$)

$$\hat{v_2} = Av_1 - \beta_0 v_0 = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 11 \\ 7.5 \\ 8 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = v_1^T \hat{v_2} = 11.25$

$$\hat{v_2}' = \hat{v_2} - \alpha_1 v_1 = \begin{bmatrix} -1.125 \\ 11 \\ 1.8750 \\ 2.3750 \\ -3.1250 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \| \hat{v_2}' \|_2 = 11.8822$

$$v_2 = \frac{\hat{v_2}'}{\beta_1} = \begin{bmatrix} -0.0947 \\ 0.9258 \\ 0.1578 \\ 0.1999 \\ -0.2630 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 2:** (Υπολογισμός $v_3$, $\alpha_2$ και $\beta_2$)

$$\hat{v_3} = Av_2 - \beta_1 v_1 = \begin{bmatrix} -2.7957 \\ 5.2810 \\ 2.9061 \\ -3.8792 \\ 3.7688 \end{bmatrix}$$

$\alpha_2 = v_2^T \hat{v_3} = 3.8456$

$$\hat{v_3}' = \hat{v_3} - \alpha_2 v_2 = \begin{bmatrix} -2.4316 \\ 1.7209 \\ 2.2993 \\ -4.6479 \\ 4.7801 \end{bmatrix}$$

$\beta_2 = \| \hat{v_3}' \|_2 = 7.6559$

$$v_3 = \frac{\hat{v_3}'}{\beta_2} = \begin{bmatrix} -0.3176 \\ 0.2248 \\ 0.3003 \\ -0.6071 \\ 0.6244 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 3:** (Υπολογισμός $v_4$, $\alpha_3$ και $\beta_3$)

$$\hat{v_4} = Av_3 - \beta_2 v_2 = \begin{bmatrix} 0.5372 \\ 2.1903 \\ -2.5663 \\ -2.2430 \\ 4.2721 \end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = v_3^T \hat{v_4} = 3.5802$

$$\hat{v_4}' = \hat{v_4} - \alpha_3 v_3 = \begin{bmatrix} 1.6742 \\ 1.3856 \\ -3.6415 \\ -0.0696 \\ 2.0368 \end{bmatrix}$$

$\beta_3 = \| \hat{v_4}' \|_2 = 4.7050$

$$v_4 = \frac{\hat{v_4}'}{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0.3558 \\ 0.2945 \\ -0.7740 \\ -0.0148 \\ 0.4329 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 4:** (Υπολογισμός $\alpha_4$)

$$\hat{v_5} = Av_4 - \beta_3 v_3 = \begin{bmatrix} -1.4750 \\ -0.9359 \\ 2.2458 \\ 0.3668 \\ -1.1373 \end{bmatrix}$$

$\alpha_4 = v_4^T \hat{v}_5 = -3.0364$

Άρα, ο τριδιαγώνιος και συμμετρικός πίνακας που προκύπτει από το συμμετρικό αλγόριθμο Lanczos είναι:

$$\tilde{T}_3 = \begin{bmatrix} 11.25 & 11.8822 & 0 & 0 \\ 11.8822 & 3.8456 & 7.6559 & 0 \\ 0 & 7.6559 & 3.5802 & 4.7050 \\ 0 & 0 & 4.7050 & -3.0364 \end{bmatrix}$$

και τα ορθοκανονικά διανύσματα που παράγονται σχηματίζουν τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{aligned} V_4 &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.0947 & -0.3176 & 0.3558 \\ 0 & 0.9258 & 0.2248 & 0.2945 \\ 0.5 & 0.1578 & 0.3003 & -0.7740 \\ 0.5 & 0.1999 & -0.6071 & -0.0148 \\ 0.5 & -0.2630 & 0.6244 & 0.4329 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Βιβλιογραφία

[1] B.N. Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, Second Edition, SIAM, 2010.