1.4 Κανονικοποιημένα Ελάχιστα Τετράγωνα

Η επίλυση προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων με πίνακα συντελεστών κακής κατάστασης εξαρτάται από το είδος της κακής κατάστασης του πίνακα και τα διακρίνουμε σε δύο σημαντικές κατηγορίες.

1.**(Numerically) Rank-deficient** προβλήματα με well-determined rank
Χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι υπάρχει ένα ευδιάκριτο κενό μεταξύ μεγάλων και μικρών ιδιαζουσών τιμών του A. Συχνά η τάξη του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι ίση με n, αλλά υπάρχει μία ομάδα πολύ μικρών ιδιαζουσών τιμών που είναι σχεδόν μηδενικές. Το πλήθος των ιδιαζουσών τιμών που δεν ανήκουν στην ομάδα των σχεδόν μηδενικών, αποτελεί την αριθμητική τάξη του A.
Η ύπαρξη αυτής της ομάδας πολύ μικρών ιδιαζουσών τιμών υποδηλώνει ότι μία ή περισσότερες γραμμές και στήλες του A είναι σχεδόν γραμμικός συνδυασμός κάποιων ή όλων των υπολοίπων γραμμών και στηλών. Συνεπώς, ο πίνακας A περιέχει σχεδόν περιττή πληροφορία, και το κλειδί στην αριθμητική αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι να αποσπάσουμε την γραμμικά ανεξάρτητη πληροφορία από τον A για να καταλήξουμε σε ένα άλλο πρόβλημα με πίνακα καλής κατάστασης. Έτσι διάφορες μέθοδοι επίλυσης των rank-deficient προβλημάτων προσπαθούν να προσδιορίσουν την αριθμητική τάξη του A. Αν η αριθμητική τάξη είναι γνωστή, συχνά μπορούμε να εξαλείψουμε την κακή κατάσταση, μετατρέποντας το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα καλής κατάστασης μικρότερων διαστάσεων.

2.**Διακριτά κακώς-στημένα** (ill-posed) προβλήματα με ill-determined rank.
Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι όλες οι ιδιάζουσες τιμές του A φθίνουν σταδιακά στο 0, και η διακριτή συνθήκη του Picard ικανοποιείται. Επειδή δεν υπάρχει κενό στο φάσμα των ιδιαζουσών τιμών που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν ένα φυσικό φράγμα διαχωρισμού των μεγάλων από τις πολύ μικρές ιδιάζουσες τιμές, δεν έχει νόημα η έννοια της αριθμητικής τάξης (γι΄ αυτό λέμε ότι έχουν ill-determined rank). Αυτή είναι και η κύρια διαφορά τους με τα rank-deficient προβλήματα.
Συνήθως ο αριθμός των εναλλαγών προσήμων στα στοιχεία των ιδιαζόντων διανυσμάτων u_i και v_i αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο δείκτης i, και αυτό συνεπάγεται ότι τα στοιχεία χαμηλής συχνότητας αντιστοιχούν στις μεγάλες ιδιάζουσες τιμές και οι μικρές ιδιάζουσες τιμές αντιστοιχούν σε ιδιάζοντα διανύσματα με πολλές ταλαντώσεις, με αποτέλεσμα οι τελευταίες να κυριαρχούν στη λύση των προβλημάτων αυτών.
Η πρωταρχική δυσκολία με τα ill-posed προβλήματα είναι ότι δεν έχουν πρακτικά καθοριστεί επαρκώς, εξ αιτίας των μικρών ιδιαζουσών τιμών του A. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να ενσωματωθεί επιπλέον πληροφορία που αφορά την επιθυμητή λύση ώστε να σταθεροποιηθεί το πρόβλημα και να αποσπάσουμε μια χρήσιμη, ευσταθή και ομαλή λύση. Αυτός είναι και ο σκοπός της κανονικοποίησής τους.

Η επίλυση κακώς στημένων γραμμικών συστημάτων ανακύπτει σε πολλές περιοχές επιστημονικών υπολογισμών. Πολλά προβλήματα στη Σεισμολογία,στην Ανάλυση Σήματος, στην Ιατρική Απεικόνιση και την Αποκατάσταση Εικόνας, καθώς και σε άλλες ακόμα επιστημονικές περιοχές, οδηγούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις 1ου βαθμού, όπως η: $\int_0^1 k(s,t)f(t)dt = g(s) + e(s)$, όπου $k(s,t)$ είναι ο πυρήνας, το δεξί μέλος αντιστοιχεί σε μετρήσεις, e είναι ένα άγνωστο σφάλμα (θόρυβος), και η f είναι η λύση που ψάχνουμε. Μια τέτοια ολοκληρωτική εξίσωση, όταν διακριτοποιηθεί με κανόνες ολοκλήρωσης και μεθόδους παρεμβολής, συχνά οδηγεί σε διακριτά κακώς στημένα προβλήματα. Συνήθως τα προβλήματα που οδηγούν στην επίλυση κακώς στημένων γραμμικών συστημάτων είναι τα **αντίστροφα προβλήματα**, που ονομάζονται έτσι επειδή στην ουσία υπολογίζουν την αιτία μέσω των αποτελεσμάτων από μερικές μετρήσεις. Προκύπτουν όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την εσωτερική δομή ενός φυσικού συστήματος από την συμπεριφορά του συστήματος που βλέπουμε μέσω των μετρήσεων ή όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη εισακτέα τιμή που προκαλεί τις (διαταραγμένες) μετρήσεις του αποτελέσματος -σε αντίθεση με τα ευθεία προβλήματα όπου το ενδιαφέρον μας είναι στραμμένο στη συμπεριφορά του συστήματος δοθείσης της εισακτέας τιμής ή της εσωτερικής δομής αυτού.

Έστω το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων της μορφής:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m \tag{1.6}$$

στο οποίο ο **A** είναι πολύ **κακής κατάστασης**. Ανάλογα με τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούμε να το κατατάξουμε σε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες ως εξής.

Εάν η κακή κατάσταση του πίνακα συντελεστών A αντικατοπτρίζεται στην ύπαρξη μιας ομάδας πολύ μικρών ιδιαζουσών τιμών που απέχουν αρκετά από τις μεγαλύτερες, και αν ο πίνακας A και/ή το διάνυσμα b περιέχουν σφάλμα (που προκύπτει λόγω της στρογγύλευσης και ίσως από ανακρίβειες στις μετρήσεις), έχουμε να κάνουμε με **"numerically rank-deficient προβλήματα¨.**
Ενδέχεται όμως οι ιδιάζουσες τιμές του A να συγκλίνουν ομαλά και γρήγορα στο 0 και το διάνυσμα b(το οποίο αναπαριστά δεδομένα από διάφορες μετρήσεις) να περιέχει εγγενές σφάλμα $e \in \mathbb{R}^m$ (δηλ. σφάλμα που προκύπτει από ανακρίβειες στις μετρήσεις και ίσως και από τη διαδικασία διακριτοποίησης του προβλήματος), οπότε $b = b_{ex} + e$, όπου b_{ex} το άγνωστο ακριβές (χωρίς σφάλμα) διάνυσμα b του δευτέρου μέλους του συστήματος. Προβλήματα ελαχιστοποίησης αυτού του τύπου είναι τα **"discrete ill-posed problems"** (διακριτά κακώς στημένα προβλήματα).

Εστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$Ax = b_{ex}. \tag{1.7}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε μια προσέγγιση της ακριβούς λύσης x_{ex} του (1.7) υπολογίζοντας μια κατάλληλη προσεγγιστική λύση του ΓΠΕΤ. (1.6). Εξαιτίας της κακής κατάστασης του πίνακα Α, οποιαδήποτε διαταραχή e των δεδομένων b_{ex} , όσο μικρή και εάν είναι, μπορεί να προξενήσει μεγάλη αλλαγή στην ακριβή λύση x_{ex}, με αποτέλεσμα η κανονική επίλυση του (1.6) με αριθμητικές μεθόδους να μην υπολογίζει μια καλή προσέγγιση της x_{ex} (δηλ. η λύση να μην αποτελεί συνεχή συνάρτηση των δεδομένων). Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, αντικαθιστούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|$ με ένα παραπλήσιο πρόβλημα, το οποίο να είναι λιγότερο ευαίσθητο στη διαταραχή e. Αυτή η αντικατάσταση είναι γνωστή ως **κανονικοποίηση**.

Μια οποιαδήποτε αντικατάσταση του προβλήματός μας με ένα πιο ευσταθές, δε θα μας δώσει απαραίτητα την ακριβή λύση του αρχικού μη-διαταραγμένου προβλήματος. Έτσι, καλούμαστε να βρούμε μια ισορροπία μεταξύ του να αποκτήσουμε ένα πρόβλημα το οποίο μπορούμε να το λύσουμε αξιόπιστα και του να αποκτήσουμε μια λύση η οποία δε θα απέχει πολύ από την ακριβή. Γι' αυτό το λόγο, οι μέθοδοι κανονικοποίησης καθορίζονται από την επιλογή μιας ή περισσοτέρων μη-αρνητικών παραμέτρων κανονικοποίησης, οι οποίες προσδιορίζουν την ποσότητα της κανονικοποίησης που χρειάζεται το πρόβλημα, καθώς και ορισμένες φορές από τους σχετικούς πίνακες κανονικοποίησης. Οι τελευταίοι θέτουν κάποιες συνθήκες κανονικότητας/ομαλότητας στην υπολογιζόμενη προσέγγιση του x_{ex}.
Ανάλογα με το μέγεθος και τις ιδιότητες του πίνακα A, έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα στις ευθείες και τις επαναληπτικές μεθόδους κανονικοποίησης. Οι πρώτες μέθοδοι υπολογίζουν παραγοντοποιήσεις του A και του πίνακα ή των πινάκων κανονικοποίησης (συνήθως την SVD), ενώ οι τελευταίες μέθοδοι συνήθως πρώτα ανάγουν τον A και τον πίνακα(ή τους πίνακες) κανονικοποίησης σε πίνακες μικρότερου μεγέθους και ύστερα λύνουν το πρόβλημα με μια ευθεία μέθοδο.
Καμία μέθοδος κανονικοποίησης δεν υπερέχει από τις άλλες. Κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματά της, ανάλογα με την εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιείται.
(Για ευκολία υποθέτουμε ότι $m \geq n$, αν και οι μέθοδοι κανονικοποίησης μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν και για την περίπτωση $m < n$.)

1.4.1 Η Truncated SVD (TSVD) κανονικοποίηση

Μια από τις πιο απλές μεθόδους κανονικοποίησης είναι η Truncated SVD (TSVD). Έχοντας αναπτύξει την έννοια της αριθμητικής τάξης r_ϵ μέσω της SVD, στη μέθοδο TSVD χρησιμοποιούμε την SVD παραγοντοποίηση για την κανονικοποίηση κυρίως των rank-deficient προβλημάτων.

Στην ιδανική περίπτωση όπου δεν υπάρχουν διαταραχές και σφάλματα στρογγύλευσης, η αντιμετώπιση των rank-deficient προβλημάτων $Ax = b$ είναι εύκολη: απλά αγνοούμε τους όρους της SVD που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιάζουσες τιμές και υπολογίζουμε τη λύση με τον τύπο:

$$x = \sum_{i=1}^{rank(A)} \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

ο οποίος προκύπτει από τη μέθοδο που περιγράψαμε στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης ΓΠΕΤ.
Στην πράξη όμως σχεδόν ποτέ δεν είναι ο A rank-deficient, αλλά "numerically rank-deficient", δηλαδή έχει μία ή περισσότερες μη-μηδενικές ιδιάζουσες τιμές τέτοιες

ώστε να ισχύει $r_\epsilon < rank(A)$. Οι πολύ μικρές αυτές ιδιάζουσες τιμές αναπόφευκτα προκαλούν δυσκολίες. Πράγματι, επειδή η νόρμα της λύσης x δίνεται από τον τύπο: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{rank(A)} \left(\frac{u_i^t b}{\sigma_i}\right)^2$, έχουμε ότι γίνεται πολύ μεγάλη λόγω των πολύ μικρών σ_i, εκτός αν οι τελευταίοι $n - r_\epsilon$ όροι $u_i^t b$ ικανοποιούν τον περιορισμό: $|u_i^t b| < \sigma_i, \quad i = r_\epsilon + 1, \ldots, n$ (δηλ. αν ικανοποιείται η διακριτή συνθήκη του Picard). Στις περιπτώσεις όπου υπάρχουν σφάλματα στο b, είναι πολύ απίθανο να ικανοποιείται αυτός ο περιορισμός, και άρα η λύση κυριαρχείται από τους τελευταίους $n - r_\epsilon$ όρους της SVD.

Στην μέθοδο TSVD, ο πίνακας A αντικαθίσταται από την βέλτιστη προσέγγισή του τάξης $k < rank(A)$, που είναι ο πίνακας A_k :

$$A_k = U\Sigma_k V^t = \sum_{i=1}^{k} u_i \sigma_i {v_i}^t$$

όπου $\Sigma_k = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$.

Στην ουσία, αντικαθιστούμε τις πολύ μικρές μη-μηδενικές ιδιάζουσες τιμές $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n$ με 0. Τότε έχουμε να επιλύσουμε ένα καινούριο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, το

$$\min \|A_k x - b\|.$$

Η λύση ελαχίστης νόρμας x_k για αυτό το πρόβλημα δίνεται από τον τύπο:

$$x_k = {A_k}^+ b = V{\Sigma_k}^+ U^t b = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i. \tag{1.8}$$

Αυτή λοιπόν είναι η TSVD λύση x_k για το ακριβές πρόβλημα (1.7). Έτσι, η προσεγγιστική λύση x_k δεν περιέχει καθόλου τις συνιστώσες της λύσης ελαχίστων τετραγώνων με υψηλή συχνότητα, διότι όλες τις ιδιάζουσες τιμές από το δείκτη $i = k + 1$ και μετά τις θέτουμε μηδέν και άρα τα αντίστοιχα ιδιάζοντα διανύσματα δε λαμβάνονται υπόψιν στη λύση. Επίσης, όταν επιλέγουμε τον k κατάλληλα, τότε ο δείκτης κατάστασης $k(A_k) = \sigma_1/\sigma_k$ του A_k θα είναι μικρός και άρα η λύση x_k δε θα είναι ευαίσθητη στις διαταραχές του b.

Ο ακέραιος k αποτελεί στην ουσία μία παράμετρο κανονικοποίησης. Όταν ο k ταυτίζεται με την αριθμητική τάξη r_ϵ του A, τότε έχουμε βρει την ιδανική προσέγγιση x_{r_ϵ} της λύσης x_{ex}. Αυτός ο λόγος καθιστά τη μέθοδο TSVD ιδιαίτερα κατάλληλη για τα rank-deficient προβλήματα.

Στα διακριτά ill-posed προβλήματα μπορεί επίσης να εφαρμοστεί η μέθοδος TSVD, παρόλο που η στρατηγική της αποκοπής δεν είναι η καλύτερη όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε τις σταδιακά φθίνουσες ιδιάζουσες τιμές του A. Αυτό συμβαίνει γιατι δεν υπάρχει μεγάλο χάσμα μεταξύ των μεγάλων και των πολύ μικρών ιδιαζουσών τιμών και έτσι δεν υπάρχει ένας εύκολος τρόπος προσδιορισμού της κατάλληλης παραμέτρου k που θα δίνει καλό αποτέλεσμα.

1.4.2 Η Tikhonov κανονικοποίηση

Η μονοπαραμετρική **κανονικοποίηση Tikhonov** είναι η πιο γνωστή και κατανοητή ευθεία μέθοδος κανονικοποίησης. Ασχολείται με τη λύση του τρποποποιημένου προβλήματος ελαχιστοποίησης, της μορφής:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Lx\|^2 \right\} \tag{1.9}$$

όπου $\lambda \geq 0$ είναι η παράμετρος κανονικοποίησης και ο $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $p \leq n$, είναι ο πίνακας κανονικοποίησης. Όταν $L = I_n$(ο ταυτοτικός πίνακας), το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1.9) λέμε ότι είναι σε "standard form", διαφορετικά λέμε ότι είναι σε "general form". Όλα τα προβλήματα που είναι σε general form, μπορούν να αναχθούν σε standard form προβλήματα.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε "standard form" προβλήματα.

Πρόταση 1.4.1. *Έστω το πρόβλημα κανονικοποίησης Tikhonov*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2 \right\} \tag{1.10}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

α) Αν ο A είναι full rank, τότε η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι μοναδική και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$x_\lambda = (A^t A + \lambda I)^{-1} A^t b \tag{1.11}$$

για κάθε $\lambda > 0$.

β) Για το υπόλοιπο $r_\lambda = b - Ax_\lambda$ ισχύει η σχέση:

$$A^t r_\lambda = \lambda x_\lambda. \tag{1.12}$$

Απόδειξη:

α) Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης λύνεται αριθμητικά σαν πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων της μορφής

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \tag{1.13}$$

με ορθογώνιους μετασχηματισμούς ή με επαναληπτικές μεθόδους. Οι κανονικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων (1.13), άρα και στο (1.10) είναι:

$$(A^t A + \lambda I^t I)x = A^t b. \tag{1.14}$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι full-rank, ο πίνακας $(A^t A + \lambda I)$ είναι τετραγωνικός $(n \times n)$ και αντιστρέψιμος, οπότε η λύση του (1.13) άρα και του (1.10) είναι μοναδική για κάθε $\lambda > 0$, και δίνεται από τον τύπο: $x_\lambda = (A^t A + \lambda I)^{-1} A^t b$.

β) Από την (1.14) έχουμε: $\lambda I^t I x = A^t(b - Ax) = A^t r$.

Η τιμή του λ καθορίζει την ευαισθησία της x_λ στη διαταραχή e και στα σφάλματα στρογγύλευσης των υπολογισμών,καθώς και πόσο κοντά είναι στην x_{ex}. Έτσι, η επιλογή του κατάλληλου λ είναι καθοριστικής σημασίας, αφού αν το λ είναι υπερβολικά μικρό η λύση είναι διαταραγμένη λόγω του σφάλματος στο δεξί μέλος, ενώ αν το λ είναι υπερβολικά μεγάλο, η λύση είναι κακή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος.

Αριθμητική Επίλυση της Tikhonov κανονικοποίησης

Για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (1.9) με αριθμητικές μεθόδους θα μπορούσαμε αρχικά να σχηματίσουμε τον πίνακα $A^tA+\lambda I$ του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων (1.10) και να υπολογίσουμε την ανάλυση Cholesky αυτού, ώστε να το λύσουμε μέσω αυτής της παραγοντοποίησης. Στην πράξη όμως, πρέπει να αποφύγουμε έναν τέτοιο υπολογισμό, δεδομένου ότι και μόνο ο υπολογισμός του A^tA μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα στρογγύλευσης εξ αιτίας της πεπερασμένης ακρίβειας αριθμητικής του υπολογιστή. Επίσης για την κάθε παράμετρο κανονικοποίησης λ απαιτείται καινούριος υπολογισμός της ανάλυσης Cholesky για τον νέο υπολογισθέντα πίνακα, διαδικασία που απαιτεί πολλές πράξεις και οδηγεί σε πολλά σφάλματα.

Ένας πιο αποτελεσματικός και ευσταθής τρόπος για τον υπολογισμό της λύσης του (1.10) είναι να επιλύσουμε με μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων το ισοδύναμο πρόβλημα

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Η πιο ευσταθής από τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των ελαχίστων τετραγώνων είναι η SVD, γι΄ αυτό και μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα θεωρώντας ως πίνακα συντελεστών του x τον $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix}$ και ως δεξί μέλος το $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα:
Έστω το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad b_{ex} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10^{-4} \\ 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A είναι full rank και έχει δείκτη κατάστασης cond(A)=$1.4142 \cdot 10^4$. Οι ιδιάζουσες τιμές του είναι 1.4142 και 0.0001. Παρατηρούμε ότι είναι καλά διαχωρισμένες αλλά με αρκετή διαφορά μεταξύ τους. Το πρόβλημα αυτό λοιπόν υπάγεται στην κατηγορία των προβλημάτων με well determined rank.

Η ακριβής λύση του μη-διαταραγμένου συστήματος είναι η $x_{ex} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Εισάγουμε τώρα διαταραχή $e = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.032 \\ 0.01 \end{pmatrix}$ στο διάνυσμα b του δεξιού μέλους, το οποίο τώρα ισούται με $b = b_{ex} + e$,
Λύνοντας στη Julia το διαταραγμένο σύστημα $Ax = b$ προκύπτει η λύση ελαχίστων τετραγώνων

$$x = \begin{pmatrix} -208.995 \\ 211.005 \end{pmatrix}$$

, η οποία απέχει πάρα πολύ από την x_{ex}. x_{ex} (συγκεκριμένα $\|x_{ex} - x\| = 296.985$).

Στη συνέχεια επιλύουμε το κανονικοποιημένο πρόβλημα

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Εάν επιλέξουμε τιμή της παραμέτρου $\lambda = 0.1$, προκύπτει η λύση $x = \begin{pmatrix} 0.9571 \\ 0.9571 \end{pmatrix}$, που μας δίνει το πολύ μικρότερο σφάλμα $\|x_{ex} - x\| = 0.0606$. $\square$