

Ψευδοαντίστροφος πίνακα

Ο ψευδοαντίστροφος, γνωστός και ως αντίστροφος Moore-Penrose είναι μία γενίκευση του αντιστρόφου. Σε αντίθεση με τον συνήθη αντίστροφο ενός πίνακα, ο οποίος υπάρχει μόνο για τετραγωνικούς και αντιστρέψιμους πίνακες, ο ψευδοαντίστροφος υπάρχει για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ο ψευδοαντίστροφος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ δίνεται από τον τύπο

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

Παρατήρηση

Σε περίπτωση που ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος ο ψευδοαντίστροφος του A ισούται με τον συνήθη αντίστροφο.

- A^+ μέσω SVD

Θεωρούμε την παραγοντοποίηση ιδιζουσών τιμών (SVD) του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, δηλαδή

$$A = U \Sigma V^T.$$

Έτσι, ο ψευδοαντίστροφος του A εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^T A)^{-1} A^T = (V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T)^{-1} V \Sigma^T U^T \\ &= (V^T)^{-1} (\Sigma^T \Sigma)^{-1} V^{-1} V \Sigma^T U^T \\ &= V (\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T U^T \\ &= V \Sigma^+ U^T. \end{aligned}$$

- A^+ μέσω QR

Θεωρώντας την QR παραγοντοποίηση του πίνακα A , ο ψευδοαντίστροφος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^T A)^{-1} A^T = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T \\ &= (R^T R)^{-1} R^T Q^T = R^+ Q^T. \end{aligned}$$