Givens Matrices

Ορίζουμε (Givens Matrix) τους ΠΙΝΑΚΕΣ GIVENS

Ορσ: Ένας Πίνακας της μορφής

$$J = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccc} \quad & \quad & \quad & i\text{-th} & j\text{-th} & \quad \\ & & & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-th}\rightarrow \\ \\ j\text{-th}\rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \overset{c}{\text{συν}\theta} & \overset{s}{\text{ημ}\theta} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underset{=-s}{-\text{ημ}\theta} & \underset{c}{\text{συν}\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ονομάζεται πίνακας Givens και συμβολίζεται

$J(i, j, \theta)$ or $J(i, j, c, s)$ παράμετροι Givens

Ισχύει $J^T \cdot J = I \Rightarrow J$ ορθογώνιος

Παρατήρηση Έστω $x \in \mathbb{R}^2$, Θέλουμε

$$J(1,2,\theta) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix},$$

εάν $J(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ -\text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$

οπού $\text{συν}\theta = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $\text{ημ}\theta = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

τότε

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, $x \neq e_1$

Έστω $c = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $s = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ οι παράμετροι Givens

Τοτέ $J(1,2,c,s) \cdot x = \text{span}\{e_1\} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>Αποδ</u>: Εάν

$$J(1,2,c,s) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{bmatrix}$$

Τοτέ

$$J(1,2,c\ s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{span}\{e_1\} \qquad \square$$

Παρατηρούμε ότι έτσι μπορούμε να μηδενίζουμε εισόδους σε διανύσματα

Κάθε φορά επιλέγουμε την <u>προς</u> μηδενισμό συντεταγμένη (έστω j) και δημιουργούμε τον <u>core Givens matrix</u> ↳ διαστ. <u>2×2</u>

$$\downarrow$$

$$J(i, j, c, s)$$

Επιλέγοντας <u>την $i<j$</u> θέση καθώς και τις c, s

Ο core Givens matrix με κατάλληλα c, s θα είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και μετά θα γίνεται **expanded** σε $J(i, j, c, s)$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & c & s & \end{bmatrix} \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να μηδενιστεί η 3η συντεταγμένη του διανύσματος $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

με διαδικασία ορθογώνιου μετασχηματισμού.

Για μηδενισμό της x_3 συντεταγμένης, επιλέγω $i<3$ και υπολογίζω τον πίνακα Givens $J(i,3,c,s)$ αφού πρώτα προσδιορίσω τα c, s.

→ Αν επιλέξω $i=1$.

Θέλω να μηδενίσω τη x_2 συντεταγμένη του διανύσματος $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Υπολογίζω τις παραμέτρους Givens:

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Core Givens

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, ο πίνακας Givens είναι ο

$$J(1,3,c,s) = \begin{array}{c} \\ i=1 \\ \\ j=3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i=1 & & j=3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \end{array}$$

και τότε

$$J(1,3,c,s) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{10}} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

→ Αν επιλέξω $i=2$

Θέλω να μηδενίσω τη x_2 συντεταγμένη του διανύσματος $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$c = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad s = \frac{3}{\sqrt{(-1)^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$J(2,3,c,s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad J(2,3,c,s) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Μηδενισμού εισόδου διανύσματος με πίνακα Givens

Read $x \in \mathbb{R}^2$ $\left[\begin{smallmatrix} A \\ x_1 \end{smallmatrix}\right]$

$nx = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow 2$ flops

$c = \dfrac{x_1}{nx}$

$s = \dfrac{x_2}{nx}$ $\Big\} \longrightarrow 2$ flops

Για δοσμένο $x \in \mathbb{R}^2$ υπολογίζει τις παραμέτρους Givens c, s και $\|x\|_2$

$x = J(1,2,c,s) \cdot x$

Πολυπλοκότητα

$O(4)$

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να επεκταθεί για διαδοχικό μηδενισμό εισόδων διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε να γίνει s ραν $\{e_1\}$ ως εξής:

```
for i = 2, .., n
    x = J(1, i, c, s) · x   → 4 flops
end
```

Πολυπλοκότητα

$O(4n)$ flops

Γνωρίζουμε ότι η εισαγωγή μηδενικών σε διάνυσμα ώστε να γίνει span $\{e_1\}$ με τη μέθοδο Householder απαιτεί $O(2n)$ flops

Επομένως η διαδικασία Givens απαιτεί διπλάσια πολυπλοκότητα από τη Householder.

Όμως μπορεί να πετύχει $\boxed{\text{επιλεκτικό}}$ μηδενισμό εισόδων του διανύσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Δίνεται $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Να γίνει $\text{span}\{e_1\}$.

Βήμα 1ο: Μηδενισμός της x_2 συντεταγμένης του διανύσματος x.

$$x^{(1)} = J(1,2,c,s)\cdot x$$

άμεσα $c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Υπολογίζω τα c, s: $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -s - c = 0 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ s = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$

άρα $$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2ο: Μηδενισμός της x_3 συντεταγμένης του διανύσματος $x^{(1)}$.

$i = 1$, $k = 3$.

άμεσα $c' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\begin{bmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\sqrt{2}\cdot s' + 2\cdot c' = 0 \\ s'^2 + c'^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c' = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ s' = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{matrix}$

άρα $$x^{(2)} = J(1,3,c',s')\cdot x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, $x^{(2)} = P\cdot x$, όπου $\underline{P = J(1,3,c',s')\cdot J(1,2,c,s)}$

Επαλήθευση: $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{6}/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} & \sqrt{6}/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P\cdot x = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Επίδραση πίνακα Givens σε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Έστω $A = \begin{bmatrix} r_1^t \\ \vdots \\ r_m^t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $r_i^t \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Ο εξ αριστερών πολ/μός του A με ένα πίνακα Givens $J(i,j,c,s) \rightsquigarrow J\cdot(i,j,c,s)\cdot A$

θα επηρεάσει μόνο τις i, j γραμμές του A.
δηλαδή

$$r_i^t = c\cdot r_i^t + s r_j^t \longrightarrow 2n \text{ flops}$$
$$r_j^t = -s r_i^t + c r_j^t \longrightarrow 2n \text{ flops}$$

$$\Big\downarrow \text{επειδή}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \ddots & & & \mathbb{O} \\ \vdots & & c & s & \vdots \\ \vdots & & -s & c & \vdots \\ \mathbb{O} & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} r_1^t \\ \vdots \\ r_i^t \\ r_j^t \\ \vdots \\ r_m^t \end{bmatrix}$$

Η πολυπλοκότητα είναι $O(4n)$ flops

Η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επιλεκτικό μηδενισμό εισόδων πίνακα αλλά και για άνω τριγωνοποίηση του πίνακα.

Παράδειγμα:

1) Να μηδενιστεί η a_{21} συντεταγμένη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Να προσδιοριστούν οι παράμετροι c, s:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad s = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$J(1,2,c,s)\cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{10}} & \frac{11}{\sqrt{10}} & \frac{15}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{-5}{\sqrt{10}} \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

---

2) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Να μηδενισθεί η είσοδος a_{12} με μετ/μούς Givens

Ορίζουμε τις παραμέτρους Givens για το $x = [1 \;\; 2]^T$
Πολλαπλασιάζοντας εκ δεξιών με μετ/μό Givens θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}}_{= J^T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα (Παραγοντοποίηση Givens – QR)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Πάντοτε υπάρχουν $s = \min(n, m-1)$ ορθογώνιοι πίνακες $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ με $Q_i = J(i,m,\theta)\cdot J(i,m-1,\theta)\cdots J(i,i+1,\theta)$ έτσι ώστε εάν $Q = Q_1^T Q_2^T \cdots Q_s^T$ έχουμε

$$A = Q\cdot R$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ορθογώνιος και $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ άνω τριγωνικός

Απόδειξη:

Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Θα αποδείξουμε ότι πάντοτε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή παραγοντοποίηση

Β1: Διαμορφώνουμε τον πίνακα

$$Q_1 = J(1,m,\theta)\cdot J(1,m-1,\theta)\cdots J(1,2,\theta)$$

έτσι ώστε

$$Q_1\cdot A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

Ο πίνακας $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και είναι ορθογώνιος ως γινόμενο ορθογωνίων πινάκων

B2. Διαμορφώνουμε τον πίνακα

$$Q_2 = J(2,m,\theta)\cdot J(2,m-1,\theta)\cdots J(2,3,\theta)$$

έτσι ώστε

$$Q_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(2)} \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

Στο κ-βήμα θα έχουμε την εξής μορφή

Διαμόρφωσε τον πίνακα

$$Q_k = J(k,m,\theta)\cdots J(k,k+1,\theta):$$

$$Q_k A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & & & \\ \vdots & \vdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{k+1k+1}^{(k)} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{m+1,n}^{(k)} \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} = A^{(k)}$$

Τελικά μετά από $s = \min\{m-1, n\}$ βήματα ο πίνακας $A^{(s)}$ θα είναι της μορφής

$$A^{(s)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \cdots & a_{1n}^{(s)} \\ 0 & a_{22}^{(s)} & \cdots & a_{2n}^{(s)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{(s)} \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$A^{(s)} = Q_s A^{(s-1)} = Q_s Q_{s-1} A^{(s-2)} \cdots = \underbrace{Q_s Q_{s-1} \cdots Q_2 Q_1}_{Q} A \Rightarrow$$

R

$$\Rightarrow Q^T R = A \Rightarrow \boxed{A = Q^T R}$$

Αλγόριθμος Givens-QR

for $k = 1, 2, \dots, \min\{n, m-1\}$

  for $\ell = k+1, \dots, m$

   Διαμόρφωσε "core" 2×2 πιν Givens έτσι ώστε

$$J(k,\ell,c,s)\begin{bmatrix} a_{kk} \\ a_{\ell k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 4$$

   ↓ expand σε $m\times m$ $J(k,\ell,c,s)$

$$A = J(k,\ell,c,s)\cdot A \longrightarrow 4(n-k)$$

σε κάθε επανάληψη ενημερώνονται $n-k$ στήλες των k, ℓ γραμμών

Συνολική Πολυπλοκότητα (Υποθέτουμε $m > n$)

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4(m-k) + 4(n-k)(m-k)\right\} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4m - 4k + 4nm - 4nk + 4k^2 - 4mk\right\} =$$

$$4mn - 4\sum_{k=1}^{n} k + 4n^2m - 4n\sum_{k=1}^{n} k + 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4m\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$4mn - 4\frac{n(n+1)}{2} + 4n^2m - 4n\frac{n(n+1)}{2} + 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4m\frac{n(n+1)}{2}$$

$$4n^2m - 2n^2m = 2n^2m \qquad -2n^3 + \frac{4n^3}{3} = -\frac{2n^3}{3}$$

$$O\left(2n^2m - 2\frac{n^3}{3}\right)$$

$$= O\left(2\left(n^2m - \frac{n^3}{3}\right)\right)$$

ΔΙΠΛΑΣΙΟ Householder

Παράδειγμα

Να προσδιορισθεί η QR παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ με μετ/μούς Givens

B1: Προσδιόρισε τις παραμέτρους Givens c, s:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 0, \qquad a_{21} = 1$$

$$c = 0, \qquad s = 1$$

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = J(1,2,\theta)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Find c and s such that

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = J(1,3,\theta)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

B2 : Προσδιόρισε τις παραμέτρους Givens c, s :

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = -1, \qquad a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A^{(2)} = J(2,3,\theta)\,A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4142 & 2.1213 & 2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & 0.5774 \end{pmatrix} = R$$

(με 4 ψηφία ακριβείας)

Παρατηρούμε ότι

$$R = A^{(2)} = J(2,3,\theta)\,A^{(1)} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{J(2,3,\theta)}_{Q_2} \cdot \underbrace{J(1,3,\theta) \cdot J(1,2,\theta)}_{Q_1}}_{Q} \cdot A \implies$$

$$R = Q \cdot A \implies \boxed{A = Q^T \cdot R}$$

and store these entries over the corresponding entries of A:

$$A(k:m,k:n) \equiv \left(I_{m-k+1} - 2\frac{u_k u_k^T}{u_k^T u_k}\right) A(k:m,k:n)$$
$$= A(k:m,k:n) - \beta u_k u_k^T A(k:m,k:n)$$

End

Λυμένη Άσκηση 1 (Κεφ 5.) βιβλ. ΑΓΑ

$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, μη ιδιάζων

$\Downarrow$

QR "σχεδόν" μοναδική (εάν οι διαγώνιοι είσοδοι του R θετικοί τότε ίδια)

Note: The algorithm does not produce the matrix Q explicitly. If needed, it has formed out of the saved Householder vectors $u_1, \ldots, u_n$.

Example 7.6. Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$k = 1$: Construct the Householder vector u_1 such that $\left(I_3 - \frac{2u_1u_1^T}{u_1^Tu_1}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}*\\0\\0\end{pmatrix}$

$$u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Update:

$$A \equiv A^{(1)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -1.414 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & -0.2071 & 0.2929 \\ 0 & -1.2071 & -1.7071 \end{pmatrix}.$$

$k = 2$: Construct the Householder vector u_2 such that $\left(I_2 - \frac{2u_2u_2^T}{u_2^Tu_2}\right)\begin{pmatrix}-0.207\\-1.207\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}*\\0\end{pmatrix}$:

$$u_2 = \begin{pmatrix}-0.2071\\-1.2071\end{pmatrix} - 1.2247\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.4318\\-1.2071\end{pmatrix}.$$

Update: Update the submatrix in the box, $A(2:3,2:3) \equiv (I_2 - 2\beta u_2 u_2^T$ $3, 2:3)$:

$$A(2:3,2:3) \equiv \begin{pmatrix} 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & -0.5774 \end{pmatrix}.$$

Form R: $A \equiv A^{(2)} = H_2 H_1 A = R = \begin{pmatrix} -1.4142 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & -0.5774 \end{pmatrix}$

Note: In practical computations using the above storage arrangements, the a_{21}, a_{31}, and a_{32} of the above matrix (which are zeros now) will be filled in with u_2 $u_{31} = 1$, and $u_{32} = -1.2071$, while the entries $u_{11} = \sqrt{2}$ and $u_{22} = -1.4318$ will be in a vector v defined by $v = (\sqrt{2}, -1.4318)^T$.

$$Q = H_1H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & 0.5774 \\ -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

THEOREM 5.5.2 QR Uniqueness Theorem Let A be $m \times n (m \geq n)$ and have linearly independent columns. Then there exists a *unique* $m \times n$ matrix Q with orthonormal columns and a *unique* $n \times n$ upper triangular matrix R with positive diagonal entries such that

$$A = QR$$

(Σημειώσεις Παραδ 2.1.2)

Example 5.5.6 We find R of QR factorization of

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

using Givens rotations and verify the uniqueness of this matrix.

Step 1: Find c and s such that

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 0, \qquad a_{21} = 1$$

$$c = 0, \qquad s = 1$$

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \equiv J(1,2,\theta)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Find c and s such that

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A \equiv J(1,3,\theta)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Step 2: Find c and s such that

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = -1, \qquad a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$J(2,3,\theta)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4142 & 2.1213 & 2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & 0.5774 \end{pmatrix} = R$$

(using four-digit computations).

Remark: Note that the upper triangular matrix obtained here is *essentially* the same as the one given by the Householder method earlier (Example 5.4.2), differing from it only in the signs of the first and third rows.

5.5.3 Givens Rotations and Reduction to Hessenberg Form

The Givens matrices can also be employed to transform an arbitrary $n \times n$ matrix A to an upper Hessenberg matrix H_u by orthogonal similarity: $PAP^T = H_u$. However, to do this, Givens rotations must be constructed in a certain special manner. For example, in the first step, Givens rotations $J(2,3,\theta), J(2,4,\theta), \ldots, J(2,n,\theta)$ are successively computed so that with $P_1 = J(2,n,\theta) \cdots J(2,4,\theta)J(2,3,\theta)$,

$$P_1AP_1^T = A^{(1)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

In the second step, Givens rotations $J(3,4,\theta), J(3,5,\theta), \ldots, J(3,n,\theta)$ are successively computed so that with $P_2 = J(3,n,\theta)J(3,n-1,\theta) \cdots J(3,4,\theta)$,

$$P_2A^{(1)}P_2^T = A^{(2)} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Με Householder-QR έχουμε

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & 0.5774 \\ -0.7071 & 0.4082 & -0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0.5774 \end{bmatrix}}_{Q_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1.4142 & -2.1213 & -2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & -0.5774 \end{bmatrix}}_{R_1}$$

Με Givens-QR έχουμε

$$Q = \left(J(2,3,\theta) \cdot J(1,3,\theta) \cdot J(1,2,\theta)\right)^T$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & -0.57735 \\ 0.7071 & 0.4082 & +0.57735 \\ 0.7071 & -0.4082 & -0.57735 \end{bmatrix}}_{Q_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4142 & 2.1213 & 2.8284 \\ 0 & 1.2247 & 1.6330 \\ 0 & 0 & 0.5774 \end{bmatrix}}_{R_2}$$

$$Q_1 = Q_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \end{bmatrix}$$

Skinny QR

$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q_1} \cdot \underset{n\times n}{R_1}$

Παράδειγμα:

Example 7.8.6 Find the QR factorization of

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

using modified Gram–Schmidt process (Algorithm 7.8.4).

$k = 1$:

$$r_{11} = \|q_1\|_2 = \|a_1\|_2 = 6.4031$$

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}} = (0.1562, 0.3123, 0.9370)$$

$$r_{12} = q_1^T q_2 = q_1^T a_2 = 7.8087$$

$$q_2 \equiv q_2 - r_{12}q_1 = a_2 - r_{12}q_1 = \begin{pmatrix} 0.7805 \\ 0.5610 \\ -0.3171 \end{pmatrix}$$

$k = 2$:

$$r_{22} = 1.0121$$

$$q_2 \equiv \frac{q_2}{r_{22}} = (0.7711, 0.5543, -0.3133)^T$$

Thus,

$$Q_1 = (q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 0.1562 & 0.7711 \\ 0.3123 & 0.5543 \\ 0.9370 & -0.3133 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 6.4031 & 7.8087 \\ 0 & 1.0121 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Άσκηση
Να προσδιορίσετε τη Skinny QR

Verify that $A = QR$. Note that if you had used Householder QR (Algorithm 5.4.3), the results were

$$Q = \begin{pmatrix} -0.1562 & -0.7711 & -0.6172 \\ -0.3123 & -0.5543 & 0.7715 \\ -0.9370 & 0.3133 & -0.5143 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$R = \begin{pmatrix} -6.4031 & -7.8087 \\ 0 & -1.0121 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$A = Q \cdot R = (-Q_1 \cdot)(-R) = Q_1 R_1$

Modified Gram–Schmidt versus Classical Gram–Schmidt Algorithms

Mathematically, the CGS and MGS algorithms are equivalent. However, as we remarked earlier, their numerical properties are different. For example, consider the computation of q_2 by the CGS method, given q_1 with $\|q_1\|_2 = 1$. We have

$$q_2 = a_2 - r_{12}q_1$$

where $r_{12} = q_1^T a_2$. Then it can be shown (Björck 1994b) that

$$\|\mathrm{fl}(q_2) - q_2\| < (1.06)(2m + 3)\mu\, \|a_2\|_2$$

n
n