Μεταπτυχιακή Άλγεβρα I

Εξετάσεις 5 Φεβρουαρίου 2021

Θέμα 1^o $i)$ Έστω G η άπειρη κυκλική ομάδα. Δείξτε ότι η G δρα επί οποιασδήποτε άλλης ομάδας H. Υποθέτουμε ότι $H = S_3$ να περιγράψετε όλες τις δράσεις της G επί της H οι οποίες διατηρούν τη δομή της H, δηλαδή $g \cdot (\pi \circ \tau) = (g \cdot \pi) \circ (g \cdot \tau)$ για κάθε $g \in G$ και $\pi, \tau \in S_3$. **[3]**

$ii)$ Έστω G ομάδα, N κανονική υπομάδα της με $G/N \simeq (\mathbb{Z}, +)$. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει H_n κανονική υποομάδα της G δείκτου n, η οποία περιέχει την υποομάδα N.

Επίσης δείξτε ότι: $\alpha)$ $H_n/N \simeq G/N$ για κάθε n.

$\beta)$ $\bigcap\{ H_n, n \in \mathbb{N} \} = N$. **[3]**

Θέμα 2^o $i)$ Έστω G ομαδα με $| G | = pq$, όπου p, q διαφορετικοί πρώτοι με $q \not\equiv 1 mod p$. δείξτε ότι η G έχει κανονική Sylow p-υποομάδα. **[2]**

$ii)$ Έστω p, q πρώτοι με $p > q$. Αν $p \not\equiv 1 \, mod \, q$. Δείξτε ότι όλες οι ομάδες τάξης pq είναι ισόμορφες. Αν $p \equiv 1 \, mod \, q$, τότε υπάρχουν μόνο δύο μη ισόμορφες ομάδες τάξης pq. **[3]**

$iii)$ Υποθέτουμε ότι η ομάδα G έχει τις κανονικές υποομάδες L, J, H με $L < J < H$ και $| H/J | = p$, $| J/L | = q$, όπου p, q πρώτοι με $p > q$. Δείξτε ότι υπάρχει K κανονική υποομάδα της G με $L < K < H$ και $| H/K | = q$, $| K/L | = p$. **[3]**

Θέμα 3^o $i)$ Έστω F ελεύθερη ομάδα και H κανονική υποομάδα της έτσι ώστε το πηλίκο F/H να είναι πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα με τάξη που διαιρείται από τουλάχιστον δύο διαφορετικούς πρώτους αριθμούς. Δείξτε ότι υπάρχουν M και N κανονικές υποομάδες της F έτσι ώστε $M \cap N = H$ και $gH \cdot rH = rH \cdot gH$ για κάθε $g \in M$ και $r \in N$. **[4]**

$ii)$ Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα. Δείξτε ότι ο πρώτος αριθμός p διαιρεί την τάξη της G αν και μόνο διαιρεί την τάξη του κέντρου της G. Επιπλέον δείξτε ότι αν η G δεν είναι αβελιανή τότε υπάρχει p πρώτος έτσι ώστε p^3 να διαιρεί την τάξη της G. **[3]**

Θέμα 4^o $i)$ Έστω G επιλύσιμη ομάδα και $f : G \longrightarrow H$ ομομορφισμός ομάδων. Υποθέτουμε ότι $im \, f \lhd H$ και ότι η $H/im \, f$ είναι αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η H είναι επιλύσιμη και ότι για κάθε $r \in \gamma_2(H)$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $f(g) = r$. **[3]**

$ii)$ Έστω G ομάδα με τάξη 143. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική. Επιπλέον δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(G)$ είναι αβελιανή ομάδα, η οποία περιέχει μια κυκλική ομάδα τάξης 30. **[3]**

Θέμα 5^o $i)$ Μια ομάδα K θα ονομάζεται **πλήρης** αν $Z(K) = 1$ και $Aut(K) = Inn(K)$.

Έστω $K \lhd G$ και K πλήρης, Δείξτε ότι $G = C_G(K) \times K$. **[3]**

$ii)$ Δείξτε ότι η S_3 είναι πλήρης. **[2]**

Θέμα 6^o $i)$ Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v \cdot w = w \cdot v$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$. **[3]**

$ii)$ Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η μεταθετικότητα είναι μεταβατική. Δηλαδή αν $vw = wv$ και $wu = uw$, τότε $vu = uv$.

Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα ομάδας, όπου η μεταθετικότητα δεν είναι μεταβατική; **[3]**

$iii)$ Έστω G και $N \lhd G$. Υποθέτουμε ότι το πηλίκο G/N είναι ελεύθερη ομάδα. Δείξτε ότι υπάρχει F ελεύθερη υποομάδα της G ώστε η G να διασπάται επί της N δια της F. **[3]**

iv) Έστω $F = \langle a, b \rangle$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi : F \longrightarrow F$ με $\varphi(a) = ab$ και $\varphi(b) = a^{-1}$ ορίζει έναν αυτομορφισμό της F. Υπολογίστε τον αντίστροφό του. Υπάρχει $w \in F$ έτσι ώστε $\varphi(w) = w$; **[3]**

Θέμα 7^o Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.
i) $\bigcap \{ H \mid H \leq_f G \} = 1$.
ii) $\bigcap \{ N \mid N \lhd_f G \} = 1$.
iii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει M_g πεπερασμένη ομάδα και $\varphi : G \longrightarrow M_g$ ομομορφισμός έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.
iv) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει $H_g \leq_f G$ έτσι ώστε $g \notin H_g$.
v) Υπάρχει μια οικογένεια $(K_i)_{i \in I}$ πεπερασμένων ομάδων όπου η G εμφυτεύεται στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} K_i$.
[10] (Κάθε μεμονωμένη συνεπαγωγή θα εκτιμηθεί αναλόγως.)

Για προβιβάσιμο βαθμό αρκούν 25 μονάδες. Για το άριστα αρκούν 40 μονάδες με την προϋπόθεση, σε κάθε θέμα ξεχωριστά να έχετε συγκεντρώσει 2 μονάδες.