

## Ασκήσεις ΣΤ

1. Έστω  $F_1 \xrightarrow{\pi_1} F_2 \xrightarrow{\pi_2} F_3 \cdots \xrightarrow{\pi_n} F_{n+1} \cdots$  μια άπειρη ακολουθία πεπερασμένα φεννώμενων ελευθέρων ομάδων και επιμορφισμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένας δείκτης  $s$  έτσι ώστε για κάθε  $i \geq s$  ο  $\pi_i$  να είναι ισομορφισμός.
2. Έστω  $F = \langle x, y \rangle$  η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Έστω  $N$  η κανονική υποομάδα της  $F$  η παραγόμενη από τα  $xyx^{-1}y$  και  $xyy^{-1}x$ . Να υπολογίσετε την ελεύθερη διάσταση της  $N$  και να βρήτε ένα σύνολο ελευθέρων γεννητόρων της.
3. Έστω  $G$  ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.
  - i)  $\bigcap \{H \mid H \leq_f G\} = 1$ .
  - ii)  $\bigcap \{N \mid N \triangleleft_f G\} = 1$ .
  - iii) Για κάθε  $g \in G$  υπάρχει  $M_g$  πεπερασμένη ομάδα και  $\varphi : G \rightarrow M_g$  ομομορφισμός έτσι ώστε  $\varphi(g) \neq 1$ .
  - iv) Για κάθε  $g \in G$  υπάρχει  $H_g \leq_f G$  έτσι ώστε  $g \notin H_g$ .
4. Έστω  $F = \langle a, b \rangle$  η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες και  $N_k$  η κανονική υποομάδα της  $F$  η παραγόμενη από τα  $a^{2^k}$  και  $b$ ,  $k \geq 0$ . Δείξτε ότι κάθε  $F/N_k$  είναι πεπερασμένη κυκλική.  
Έστω  $N = \bigcap_k N_k$ . Δείξτε ότι η  $F/N$  είναι άπειρη κυκλική.
5. Έστω  $F = \langle a, b \rangle$  η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Δείξτε ότι η απεικόνιση  $\varphi : F \rightarrow F$  με  $\varphi(a) = ab$  και  $\varphi(b) = a^{-1}$  ορίζει ένα αυτομορφισμό της  $F$ . Να υπολογίσετε τον αντίστροφό του.  
Να ορίσετε έναν μονομορφισμό της  $F$ , ο οποίος δεν είναι αυτομορφισμός.  
Μπορείτε να ορίσετε έναν επιμορφισμό της  $F$ , ο οποίος δεν είναι αυτομορφισμός?
6. Έστω  $F = \langle x, y \rangle$  η ελεύθερη ομάδα διάστασης 2. Ορίζουμε  $H$  να είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της  $F$  με άρτιο (ανηγμένο) μήκος.  
Δείξτε ότι το  $H$  είναι κανονική υποομάδα της  $H$  δείκτη 2. Μάλιστα δε η  $H$  είναι ελεύθερη διάστασης 3. Συγκεκριμένα δείξτε ότι το σύνολο  $\{x^2, xy, xy^{-1}\}$  αποτελεί ένα σύνολο ελευθέρων γεννητόρων της  $H$ .
7. i) Έστω  $Aut(\mathbb{Q})$  η ομάδα αυτομορφισμών της προσθετικής ομάδας των ρητών. Δείξτε ότι η  $Aut(\mathbb{Q})$  είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  των ρητών αριθμών.  
ii) Δείξτε ότι η  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.  
Συγκρίνετε με το γνωστό θεώρημα ότι η ομάδα αυτομορφισμών μιας πεπερασμένα γεννώμενης προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.
8. Μια ομάδα  $G$  θα ονομάζεται **διαιρετή**, αν για κάθε  $g \in G$  και κάθε  $n \in \mathbb{N}$  η εξίσωση  $x^n = g$  έχει λύση στην  $G$ , δηλαδή υπάρχει  $r \in G$  έτσι ώστε  $r^n = g$ .  
Δείξτε ότι:  
Κάθε πηλίκιο μιας διαιρετής ομάδας είναι διαιρετή ομάδα.  
Μια διαιρετή ομάδα δεν έχει (γνήσιες) υποομάδες πεπερασμένου δείκτη.  
Κάθε ομομορφισμός  $\varphi : G \rightarrow \Phi$  από μια διαιρετή ομάδα  $G$  σε μια πεπερασμένη ομάδα  $\Phi$  είναι τετριμμένος.  
Μια διαιρετή ομάδα  $G$  δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

9. Έστω  $p$  ένας πρώτος αριθμός και η ομάδα με παράσταση  $G = \langle a_1, a_2, \dots \mid a_{i+1}^p = a_i, a_i a_j = a_j a_i \rangle$ .

Δείξτε ότι:

Η  $G$  είναι διαιρετή.

Η  $G$  δεν είναι πεπερασμένα γεννώμενη.

Η  $G$  είναι τοπικά κυκλική, δηλαδή κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της είναι κυκλική.

Η  $G$  δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

10. Έστω  $G$  μια ομάδα.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) Η  $G$  είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

ii) Υπάρχει μια οικογένεια  $(K_i)_{i \in I}$  πεπερασμένων ομάδων όπου η  $G$  εμφυτεύεται στο καρτεσιανό γινόμενο  $\prod_{i \in I} K_i$ .

11. Έστω  $G$  μια ομάδα και  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω  $\mathcal{G}(G, S)$  το αντίστοιχο γράφημα Cayley. Έστω  $H$  η υποομάδα της  $G$  η παραγόμενη από τα στοιχεία  $a_2, a_3, \dots, a_n$ . Από το γράφημα  $\mathcal{G}(G, S)$  διαγράφουμε όλες τις ακμές που αντιστοιχούν στον γεννήτορα  $a_1$ .

Δείξτε ότι προκύπτει ένα μη συνεκτικό γράφημα, το οποίο αποτελείται από συνεκτικά υπογραφήματα, όλα ισόμορφα μεταξύ τους. Κάθε ένα από τα οποία έχει ως κορυφές τα στοιχεία ενός συμπλόκου  $gH$ .

Εφαρμογή: Έστω  $G$  η διεδρική ομάδα  $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^n = 1, aba = b^{n-1} \rangle$  και ως  $H$  μια περίπτωση έχουμε  $H_1 = \langle a \rangle$  και μια άλλη  $H_2 = \langle b \rangle$ .

12. Έστω  $\Gamma$  ένα γράφημα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α') Το  $\Gamma$  είναι δένδρο.

(β') Για κάθε δύο κορυφές  $v, u \in V(\Gamma)$  υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι με άκρα τις  $v$  και  $u$ .

(γ') Διαγράφοντας οποιαδήποτε ακμή  $e$ , το γράφημα καθίσταται μη συνεκτικό.

(δ') Στην περίπτωση που το  $\Gamma$  είναι πεπερασμένο ισχύει:  $|V(\Gamma)| = |E(\Gamma)| + 1$ .

13. Έστω  $G$  μια ομάδα, η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί του δένδρου  $T$ . Για κάθε  $g \in G$  και για κάθε κορυφή  $v \in V(T)$  ορίζουμε  $d(gv, v) =$  το μήκος του (μοναδικού) ανηγμένου μονοπατιού που έχει άκρα τις κορυφές  $gv$  και  $v$ . Έστω  $r(g) = \min\{d(gv, v), v \in V(T)\}$  και  $T_g = \{v \in V(T) \mid d(gv, v) = r(g)\}$ .

i) Δείξτε ότι το  $T_g$  αποτελεί τις κορυφές ενός υποδένδρου του  $T$ . Επιπλέον δείξτε ότι στην περίπτωση, όπου  $r(g) \neq 0$ , το  $T_g$  είναι ένα διπλά άπειρο μονοπάτι.

ii) Έστω  $g, t \in G$  και  $n \in \mathbb{Z}$ . Δείξτε ότι  $r(g^n) = |n| \cdot r(g)$  και  $r(t^{-1}gt) = r(g)$ .

Επί πλέον δείξτε ότι το αποτέλεσμα της δράσης της κυκλικής ομάδας  $\langle t \rangle$  επί του δένδρου  $T_g$  είναι το δένδρο  $T_{tgt^{-1}}$ .

14. Έστω  $(T, \leq)$  ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Για κάθε  $u \in T$  έστω  $A_u = \{v \in V(T) : v \leq u\}$ .

Υποθέτουμε ότι το  $T$  έχει τις εξής ιδιότητες:

i) Υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στο  $T$ . Δηλαδή υπάρχει  $u_0 \in T$  με  $u_0 \leq v$  για κάθε  $v \in T$ .

---

ii) Για κάθε  $u \in T$  το σύνολο  $A_u$  είναι γραμμικά διατεταγμένο.

iii) Για κάθε  $u \in T$  το σύνολο  $S_u = \{w \in T \mid u < w \text{ και δεν υπάρχει } x \in T \text{ έτσι ώστε } u < x < w\}$  είναι πεπερασμένο.

Κατασκευάζουμε το εξής γράφημα  $X$ : Ορίζουμε  $V(X) = T$  και σύνολο προσανατολισμένων ακμών  $E_+(X) = \{(u, v) \in T \times T \text{ με } v \in S_u\}$ . Δείξτε ότι το  $X$  είναι δένδρο.

Έστω  $G$  μια ομάδα, η οποία δρα επί του  $X$  με την ιδιότητα να διατηρεί την διάταξη (αν  $u, v \in T$  με  $u \leq v$  τότε  $gu \leq gv, g \in G$ ).

1) Να περιγράψετε την σταθεροποιούσα και την τροχιά μιας κορυφής  $u \in T$ .

2) Έστω  $u, v \in T$  με  $u \leq v$ . Δείξτε ότι  $Stab_G(u) \geq Stab_G(v)$ .

3) Έστω  $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$  μια άπειρη γνησίως αύξουσα κορυφών του  $X$ . Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων της  $G$  με  $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_i \geq G_{i+1} \geq \dots$  με  $[G_i : G_{i+1}] \leq |S_{u_{i+1}}|$ .

4) Υποθέτουμε ότι υπάρχει κορυφή  $u$  με  $Stab_G(u) = 1$ . Τι συμπεραίνετε για την ομάδα  $G$ ?