

0.1 Μια ιδέα της Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων.

Το μεγάλο άλμα στη μελέτη των ομάδων έγινε όταν οι ομάδες θεωρήθηκαν ως "γεωμετρικά αντικείμενα" και άρχισαν να μελετώνται γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες αυτών των αντικειμένων με σκοπό την μελέτη αλγεβρικών ιδιοτήτων των ομάδων.

Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο αλγεβρικές ιδιότητες των ομάδων προσδιορίζουν τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα.

Στα επόμενα θα πάρουμε μια απειροελάχιστη "γεύση" από αυτή την περιοχή μελέτης των ομάδων.

0.1.1 Προγεγιστικές ιδιότητες Ομάδων.

Έστω ότι έχουμε μια κλάση, έστω \mathcal{P} , ομάδων π.χ. η \mathcal{P} να είναι η κλάση των πεπερασμένων ομάδων, των πεπερασμένων p -ομάδων, των μηδενοδυνάμων ομάδων κ.λ.π. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα G , η οποία δεν ανήκει σε μια κλάση, αλλά θέλουμε να την μελετήσουμε με την "βοήθεια" ιδιοτήτων που έχουν ομάδες, οι οποίες ανήκουν σε κλάσεις, τις οποίες "γνωρίζουμε καλά".

Ορισμός 0.1.1. Έστω \mathcal{P} μια κλάση ομάδων και G μια τυχαία ομάδα. Θέτουμε $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G) = \{G/N \mid G/N \in \mathcal{P}\}$. Δηλαδή το $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το σύνολο όλων των πηλίκων της G , τα οποία έχουν την ιδιότητα \mathcal{P} .

Η ομάδα G θα ονομάζεται **προσεγγιστικά \mathcal{P} ομάδα** ($r\mathcal{P}$ ομάδα, αν για κάθε $1 \neq g \in G$ υπάρχει $G/N \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(G)$ με $g \notin N$). Δηλαδή η εικόνα του g μέσω του επιμορφισμού $G \rightarrow G/N$ δεν είναι τετριμμένη.

Οπότε, από την κλάση \mathcal{P} , δημιουργείται μια άλλη κλάση ομάδων η $r\mathcal{P}$.

Προφανώς κάθε $\mathcal{P} \subseteq r\mathcal{P}$ με τον εγκλεισμό (σχεδόν) πάντα γνήσιο. Επομένως, το πρόβλημα που τίθεται είναι μια ομάδα G , η οποία δεν ανήκει στην \mathcal{P} , μήπως ανήκει στην $r\mathcal{P}$; Οπότε να προσπαθήσουμε να την μελετήσουμε "καταφεύγοντας" σε ιδιότητες που έχουν οι ομάδες που ανήκουν στην κλάση \mathcal{P} ;

Πρόταση 0.1.2. Έστω \mathcal{P} μια κλάση ομάδων και G μια ομάδα. Η ομάδα G είναι $r\mathcal{P}$ αν και μόνο αν $\eta \bigcap \{N \mid N \triangleleft G \text{ με } G/N \in \mathcal{P}\} = 1$.

Απόδειξη. Προφανής. □

Παραδείγματα 0.1.3. 1. Κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη (rf).

Υπάρχουν πάρα πολλοί τρόποι για να το αποδείξουμε.

Θα ακολουθήσουμε έναν τρόπο, ο οποίος μας θα μας φανεί χρήσιμος στα επόμενα.

Πρώτον, κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι rf (γιατί;).

Δεύτερον, κάθε πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα είναι της μορφής $G = (\bigoplus_{i=1}^n \langle a_i \rangle) \oplus T$, όπου οι $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρες κυκλικές και T πεπερασμένη. Έστω ένα μη τετριμμένο $g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \cdot s$ με το $s \in T$. Αν όλα τα $k_i = 0$, τότε $g = s \in T$ και έχουμε τελειώσει (γιατί;). Μα αφού το T είναι πεπερασμένο πηλίκο της G . Αν κάποιο $k_i \neq 0$ τότε έχουμε τον επιμορφισμό $\varphi_i : G \rightarrow \langle a_i \rangle$ με $\varphi_i(g) = a_i^{k_i} \neq 1$. Η $\langle a_i \rangle$ είναι άπειρη κυκλική, άρα rf , οπότε, υπάρχει $\vartheta : \langle a_i \rangle \rightarrow \Phi$ με Φ πεπερασμένη και $\vartheta(a_i^{k_i}) \neq 1$. Οπότε η σύνθεση των δύο ομομορφισμών μας δίνει την απάντηση.

2. Η ελεύθερη ομάδα F είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη.

Έστω $F = F^{(0)} \triangleright F^{(1)} = F' \triangleright F^{(2)} \triangleright \dots$ η παράγωγος σειρά. Τότε πληρούνται οι όροι του επομένου Λήμματος και τέλος, από την προηγούμενη πρόταση.

Λήμμα 0.1.4. Έστω F ελεύθερη ομάδα και $F = F_0 \geq F_1 \geq F_2 \geq \dots$ μια ακολουθία υποομάδων, όπου κάθε μια είναι γνήσια και χαρακτηριστική υποομάδα της προηγούμενης. Τότε η $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$.

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Κάθε σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας μέσω ενός αυτομορφισμού απεικονίζεται σε ένα σύνολο γεννητόρων. Επειδή η F είναι ελεύθερη κάθε 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ δύο συνόλων γεννητόρων της επεκτείνεται σε αυτομορφισμό. Άρα αν έχουμε έναν γεννήτορα ενός όρου F_i να ανήκει στον F_{i+1} , τότε ο F_{i+1} θα περιείχε όλους τους γεννήτορες της F_i άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει μη τετριμμένο στοιχείο που να ανήκει στην τομή $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = 1$. □

Όπως είδαμε μια ελεύθερη ομάδα είναι προσεγγιστικά επιλύσιμη, πιο κάτω θα δούμε ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη και προσεγγιστικά μηδενοδύναμη. Οι διότητες αυτές δεν "κληρονομούνται" στα πηλίκα. Δηλαδή γενικά το πηλίκο μιας $r\mathcal{P}$ ομάδας δεν είναι κατ' ανάγκη $r\mathcal{P}$. Πράγματι, αν ίσχυε αυτό, τότε θα μέναμε "άνευ αντικειμένου μελέτης", δεδομένου ότι κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

Αν η κλάση \mathcal{P} είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες, δηλαδή κάθε υποομάδα μιας ομάδας που ανήκει στην \mathcal{P} ανήκει και αυτή στην \mathcal{P} , τότε μπορούμε να αποδείξουμε την εξής:

Πρόταση 0.1.5. Έστω μια κλάση ομάδων \mathcal{P} , η οποία είναι κλειστή ως προς τις υποομάδες. Τότε κάθε υποομάδα μια $r\mathcal{P}$ ομάδας είναι και αυτή $r\mathcal{P}$.

Απόδειξη. Έστω G μια $r\mathcal{P}$ ομάδα, από την Πρόταση 0.1.2 έχουμε ότι $\bigcap \{ N \mid N \triangleleft G \text{ με } G/N \in \mathcal{P} \} = 1$. Αν H είναι μια υποομάδα της G , τότε για κάθε N κανονική υποομάδα της G με την ιδιότητα $G/N \in \mathcal{P}$ έχουμε $H/H \cap N \approx HN/N \leq G/N \in \mathcal{P}$ και τέλος (γιατί;;). □

Επειδή τώρα οι υποομάδες πεπερασμένων, επιλυσίμων, μηδενοδυνάμων κ.λ.π. είναι πεπερασμένες, επιλύσιμες, μηδενοδύναμες... Έχουμε το σχετικό Πόρισμα.....

Πρόταση 0.1.6. Έστω δύο κλάσεις ομάδων \mathcal{P} και \mathcal{R} . Υποθέτουμε ότι κάθε ομάδα $G \in \mathcal{P}$ έχει την ιδιότητα να είναι $r\mathcal{R}$, τότε κάθε ομάδα, η οποία είναι $r\mathcal{P}$ είναι και $r\mathcal{R}$.

Φορμαλιστικά: $(G \in \mathcal{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R}) \Rightarrow (G \in r\mathcal{P} \Rightarrow G \in r\mathcal{R})$.

Απόδειξη. Έστω G ομάδα η οποία είναι $r\mathcal{P}$ και ένα $1 \neq g \in G$, τότε, από τον ορισμό, υπάρχει $N \triangleleft G$ με $g \notin N$ και $G/N \in \mathcal{P}$. Τώρα από την υπόθεση έχουμε ότι $G/N \in r\mathcal{R}$, αυτό σημαίνει, από τον ορισμό, ότι υπάρχει $M/N \triangleleft G/N$ με $gN \notin M/N$ και $(G/N)/(M/N) \in \mathcal{R}$, δηλαδή $G/M \in \mathcal{R}$ και $g \notin M$. Συνεπώς $G \in r\mathcal{R}$. □

Παράδειγμα: Είδαμε ότι οι πεπερασμένα γεννώμενες αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Άρα πεπερασμένα γεννώμενες προσεγγιστικά αβελιανές ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Πόρισμα 0.1.7. Έστω \mathcal{P} μια κλάση ομάδων. Τότε ισχύει $r\mathcal{P} = r(r\mathcal{P})$.

Προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Εδώ θα επικεντρωθούμε στις προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες.

Πρώτα απ' όλα ένας ισοδύναμος ορισμός

Πρόταση 0.1.8. /Άσκηση:

Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.

i) $\bigcap \{ H \mid H \leq_f G \} = 1$.

ii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει M_g πεπερασμένη ομάδα και $\varphi : G \rightarrow M_g$ ομομορφισμός έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.

iii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει $H_g \leq_f G$ έτσι ώστε $g \notin H_g$.

Πριν προχωρήσουμε ένα κλασσικό παράδειγμα μη προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών \mathbb{Q} για κάθε γνήσια μη τετριμμένη υποομάδα H , στο πηλίκο \mathbb{Q}/H κάθε στοιχείο είναι πεπερασμένης τάξης, αλλά η ομάδα \mathbb{Q}/H είναι άπειρη.

Ένα άλλο απλό ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών \mathbb{Q} υπάρχουν $H, K \leq \mathbb{Q}$ μη τετριμμένες, ώστε $H \cap K = 0$. Προφανώς όχι (γιατί;;).

Ας δούμε και ένα άλλο (δυϊκό) ερώτημα. Στην προσθετική ομάδα των ρητών \mathbb{Q} υπάρχει $H \leq \mathbb{Q}$ γνήσια ώστε να είναι πεπερασμένου δείκτη; Προφανώς όχι (γιατί;;).

Συμπέρασμα: Η προσθετική ομάδα των ρητών \mathbb{Q} δεν είναι rf .

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις ότι οι ελεύθερες ομάδες είναι rf . Θα δώσουμε μια έμμεση απόδειξη.

Πρόταση 0.1.9. Έστω G μια πεπερασμένα γεννώμενη ομάδα, η οποία είναι rf . Τότε η ομάδα αυτομορφισμών της είναι rf .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια σειρά και στηρίζεται σε δύο γνωστά λήμματα.

Έστω φ ένας μη τετριμμένος αυτομορφισμός της G , τότε υπάρχει ένα $g \in G$ με $\varphi(g) \neq g$, δηλαδή το $r = g^{-1}\varphi(g) \neq 1$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί rf , συνεπώς υπάρχει $N \triangleleft G$ πεπερασμένου δείκτη, με $r \notin N$.

Η ομάδα G έχει υποτεθεί πεπερασμένα γεννώμενη, επομένως υπάρχει (από το Λήμμα 1) M χαρακτηριστική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G με $r \notin M$.

Επειδή η M είναι χαρακτηριστική ο αυτομορφισμός φ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\varphi}$ στο πεπερασμένο πηλίκο G/M μάλιστα δέ $\bar{\varphi}(rM) \neq rM$ (από το Λήμμα 2). Επειδή η G/M είναι πεπερασμένη η $\text{Aut}(G/M)$ είναι πεπερασμένη και τέλος. □

Λήμμα 0.1.10. Λήμμα 1. Έστω G μια πεπερασμένα γεννώμενη ομάδα, τότε για κάθε n θετικό ακέραιο υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος υποομάδες της G με δείκτη τον δεδομένο n .

Κατά συνέπεια, αν G περιέχει υποομάδες πεπερασμένου δείκτη, τότε περιέχει χαρακτηριστικές υποομάδες πεπερασμένου δείκτη.

Λήμμα 0.1.11. Λήμμα 2. Έστω G μια ομάδα και M μια χαρακτηριστική υποομάδα της, τότε για κάθε ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G/M)$ με $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$, όπου ο $\bar{\varphi}$ ορίζεται ως εξής: $\bar{\varphi}(gM) = \varphi(g)M$.

Το πρώτο Λήμμα το είχαμε αποδείξει στην αρχή των μαθημάτων. Το δεύτερο, αν δεν το έχετε ξανασυναντήσει, να το αποδείξετε.

Θεώρημα 0.1.12. Οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Απόδειξη. Έστω F μια ελεύθερη ομάδα. Υποθέτουμε στην αρχή ότι είναι πεπερασμένα γεννώμενη.

Πέρνουμε το πηλίκο $G = F/\gamma_2(F)$, το οποίο είναι μια πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Επομένως από το πρώτο παράδειγμα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Συνεπώς (από την προηγούμενη πρόταση), η ομάδα αυτομορφισμών της $\text{Aut}(G) \approx \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Όταν πρωτομιλήσαμε για ελεύθερες ομάδες είχαμε δει ένα παράδειγμα ελεύθερης ομάδας με στοιχεία πίνακες. Εκεί η ελεύθερη ομάδα ήταν διάστασης 2, όμως, από τον τρόπο κατασκευής, μπορούμε να δούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ελεύθερες οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης n , οι οποίες να είναι υποομάδες της $Aut(G) \approx GL(n, \mathbb{Z})$, η οποία, μόλις αποδείξαμε ότι, είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Τέλος.

Έστω τώρα η F είναι απείρως παραγόμενη από ένα σύνολο X . Αν $1 \neq w \in F$, τότε αυτό γράφεται ως μια ανηγμένη λέξη στοιχείων του X . Στην ανηγμένη αυτή γραφή εμφανίζονται πεπερασμένο το πλήθος χαρακτήρες. Έστω S το πεπερασμένο υποσύνολο του X , το οποίο περιέχει τους χαρακτήρες που εμφανίζονται στη λέξη w . Τότε πέρνουμε την κανονική υποομάδα υποομάδα την παραγόμενη από το $X \setminus S$, $N = \langle X \setminus S \rangle$.

Το πηλίκο F/N είναι προφανώς(;;) η πεπερασμένα γεννώμενη ελεύθερη ομάδα η παραγόμενη από το S . Στο πηλίκο αυτό η εικόνα wN της w δεν είναι τεριμμένη ...και συνεχίζουμε.

□

Το κρίσιμο στοιχείο στην όλη υπόθεση είναι ότι στο Λήμμα 1 η υπόθεση η ομάδα μας να είναι πεπερασμένα γεννώμενη ήταν κρίσιμη.

Ως "αντίκτυπο" αυτής της αναγκαίας συνθήκης θα δούμε το εξής:

Αν και μια ελεύθερη ομάδας απείρου διαστάσεως είναι rf η αντίστοιχη ομάδα αυτομορφισμών της δεν είναι rf .

Πράγματι, έστω F ελεύθερη ομάδα επί ενός απείρου αριθμησίμου συνόλου $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Κάθε μετάθεση των στοιχείων του X ορίζει αυτομορφισμό της F (δεν ξεχνάμε την καθολική ιδιότητα της F). Συνεπώς $S_X \leq Aut(F)$. Η S_X περιέχει άπειρες απλές ομάδες, οι οποίες δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες, άρα η $Aut(F)$ δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Παρατήρηση 0.1.13. Στο προηγούμενο θεώρημα για να δούμε ότι η $GL(n, \mathbb{Z})$ rf επικαλεστήκαμε ότι είναι η ομάδα αυτομορφισμών της ελεύθερης αβελιανής ομάδας διάστασης n .

Θα μπορούσαμε να επιχειρηματολογήσουμε απ' ευθείας ως εξής:

Έστω $I_n \neq A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{Z})$. Λαμβάνουμε έναν πρώτο αριθμό $p > |a_{ij}|$. Ο γνωστός επιμορφισμός $a \rightarrow a \pmod{p}$ επεκτείνεται(;;) σε επιμορφισμό $GL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Η εικόνα του A μέσω αυτού του επιμορφισμού δεν είναι ο ταυτοτικός πίνακας (λόγω επιλογής του πρώτου p) και τέλος.

Όπως έχουμε ήδη δει (Πρόταση 0.1.5) οι υποομάδες προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι και αυτές προσεγγιστικά πεπερασμένες. Προφανώς, πηλίκα προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων δεν είναι εν γένει προσεγγιστικά πεπερασμένα.

Παρ' όλα ταύτα, ορισμένες φορές, πηλίκα ομάδων, τα οποία είναι προσεγγιστικά πεπερασμένα μας εξασφαλίζουν ότι και η ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Πρόταση 0.1.14. Υποθέτουμε ότι η ομάδα G περιέχει μια κανονική υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη, η οποία είναι rf . Τότε η ομάδα G είναι rf .

Απόδειξη. Έστω $1 \neq g \in G$. Αν το $g \notin H$, τότε έχουμε τελειώσει, διότι $1 \neq gH \in G/H$, η οποία είναι πεπερασμένη. Υποθέτουμε ότι $g \in H$. Τότε υπάρχει M κανονική υποομάδα της H με $g \notin M$ και το πηλίκο H/M να είναι πεπερασμένο. Η M είναι πεπερασμένου δείκτη στην G και τέλος.

□

Παρατήρηση 0.1.15. Ένα ερώτημα, που εγείρεται, είναι κατά πόσο μπορούμε να γενικεύσουμε την προηγούμενη πρόταση. Προσπαθήστε να αποδείξετε την εξής γενίκευση.

Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι το ημιευθύ γινόμενο $G = A \rtimes B$ ($H \triangleleft A$ είναι η κανονική). Υποθέτουμε ότι και οι δύο υποομάδες A είναι B είναι rf , με την A πεπερασμένα γεννώμενη. Δείξτε ότι η G είναι rf .

Πρόταση 0.1.16. Κάθε πολυκυκλική ομάδα G είναι rf .

Απόδειξη. Προφανώς, αν η G είναι πεπερασμένη είναι rf . Υποθέτουμε ότι η G είναι άπειρη.

Σύμφωνα με την Πρόταση 0.1.44, στο προηγούμενο αρχείο, υπάρχει κανονική υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη στην G , η οποία είναι p.i.c., δηλαδή όλα τα πηλίκα της σε μια πολυκυκλική σειρά της είναι άπειρες κυκλικές ομάδες. Αν αποδείξουμε ότι αυτές οι ομάδες είναι rf , τότε το αποτέλεσμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση.

Επομένως μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι έχουμε μια πολυκυκλική ομάδα G με όλα τα πηλίκα της σε μια πολυκυκλική σειρά άπειρες κυκλικές ομάδες.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο Hirsch number αυτής της ομάδας. Αν το Hirsch number είναι ίσον με ένα, τότε αυτή είναι άπειρη κυκλική και προφανώς είναι rf . Υποθέτουμε ότι οι ομάδες με Hirsch number μικρότερον ή ίσον με k είναι rf .

Έστω $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$ μια πολυκυκλική σειρά της G και $1 \neq g \in G$, αν $g \notin G_1$, τότε για το άπειρο κυκλικό πηλίκο G/G_1 υπάρχει χαρακτηριστική υποομάδα M/G_1 πεπερασμένου δείκτη στην G/G_1 με $gG_1 \notin M/G_1$ και τέλος, αφού $g \notin M$ και η M είναι πεπερασμένου δείκτη στην G .

Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g \in G_1$, η οποία έχει μικρότερο Hirsch number από την G και από την υπόθεση της επαγωγής είναι rf , δηλαδή υπάρχει N κανονική υποομάδα της G_1 πεπερασμένου δείκτη με $g \notin N$, επειδή δε η G_1 είναι πεπερασμένα γεννώμενη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η N είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G_1 , άρα κανονική υποομάδα της G . Τότε το $gN \in G/N$, η οποία πάλι από την υπόθεση της επαγωγής είναι rf και συνεπώς, όπως προηγουμένως, υπάρχει M/N κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G/N με $gN \notin M/N$, δηλαδή $g \notin M$ με την M πεπερασμένου δείκτη στην G και τέλος. \square

Πόρισμα 0.1.17. Οι πεπερασμένα γεννώμενες μηδενοδύναμες ομάδες είναι rf .

Παρατηρήσεις 0.1.18. 1) Η προηγούμενη πρόταση θα μπορούσε να αποδειχθεί πολύ πιο σύντομα.

Έχουμε την πολυκυκλική σειρά $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$ με το πηλίκο G/G_1 κυκλική. Αν η κυκλική ομάδα G/G_1 είναι πεπερασμένη, έχουμε τελειώσει από την Πρόταση 0.1.14. Αν η κυκλική ομάδα G/G_1 είναι άπειρη, σύμφωνα με την άσκηση 10 της ομάδος Δ , η G διασπάται επί της G_1 δια μιας άπειρης κυκλικής. Η G_1 με την υπόθεση της επαγωγής είναι rf , οπότε η G είναι rf , σύμφωνα με την πρόταση που αναφέραμε στην προηγούμενη παρατήρηση (αλλά περιμένει απόδειξη!)

2) Τώρα μπορείτε να αποδείξετε την Πρόταση 0.1.45 στο προηγούμενο αρχείο, την απόδειξη της οποίας είχαμε αναβάλει.

3) Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι ισχύει παρόμοιο αποτέλεσμα με το προηγούμενο πόρισμα για πεπερασμένα γεννώμενες επιλύσιμες ομάδες.

Έστω $G = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle$. Η κανονική θήκη της $\langle b \rangle$ είναι αβελιανή (γιατί;;) άρα η G είναι επιλύσιμη. Αλλά $\langle b \rangle^G = \langle a^{-k}ba^k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$ είναι απείρως παραγόμενη (γιατί;), συνεπώς η G δεν είναι πολυκυκλική, διότι αν και η ίδια είναι πεπερασμένη παραγόμενη, περιέχει υποομάδα, η οποία είναι απείρως παραγόμενη.

Hopfian ομάδες

Όταν έχουμε ένα άπειρο σύνολο X ενδέχεται να έχουμε μια απεικόνιση $\vartheta : X \rightarrow X$, η οποία να είναι επί αλλά όχι 1-1, όπως επίσης να είναι 1-1 αλλά όχι επί. Στην περίπτωση, όπου έχουμε μια άπειρη ομάδα G , το ερώτημα που εγείρεται είναι το εξής: Υπάρχει $\vartheta : G \rightarrow G$ ομομορφισμός, ο οποίος να είναι επιμορφισμός, αλλά όχι μονομορφισμός; Δυστυχώς, υπάρχει μονομορφισμός, ο οποίος δεν είναι επιμορφισμός;

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω $\langle a \rangle$ η άπειρη κυκλική ομάδα. Για οποιονδήποτε ακέραιο k απολύτως μεγαλύτερο του 1, η απεικόνιση $a \rightarrow a^k$ ορίζει μονομορφισμός, ο οποίος

δεν είναι επιμορφισμός. Τουναντίον, κάθε επιμορφισμός της $\langle a \rangle$ αναγκαστικά θα είναι μονομορφισμός.

Ορισμός 0.1.19. Μια ομάδα G θα ονομάζεται **Hopfian** αν κάθε ενδομορφισμός της, ο οποίος είναι επιμορφισμός, είναι αυτομορφισμός.

Μια ομάδα G θα ονομάζεται **co-Hopfian** αν κάθε ενδομορφισμός της, ο οποίος είναι μονομορφισμός, είναι αυτομορφισμός.

Στην περίπτωση, όπου έχουμε μια ομάδα G , η οποία δεν είναι Hopfian, εμφανίζεται το εξής "παράδοξο". Αν $\vartheta : G \rightarrow G$ είναι ένας επιμορφισμός, ο οποίος δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μη τετριμμένος πυρήνας, έστω N , Δηλαδή η G είναι ισομορφη με ένα (γνήσιο) πηλίκο της ($G \approx G/N$). Το "παράδοξο" έγκειται στο γεγονός, ότι αν έχουμε μια παράσταση $G = \langle X \mid R \rangle$ της ομάδας G , η οποία δεν είναι Hopfian, πώς είναι δυνατόν να επισυνάψουμε επιπλέον σχέσεις, οι οποίες δεν "προέρχονται" από τις R και η ομάδα να "παραμένει η ίδια";

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε παραδείγματα non-Hopfian απείρως παραγομένων ομάδων.

Έστω $F = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ η ελεύθερη ομάδα με άπειρο το πλήθος γεννήτορες, η απεικόνιση φ με $\varphi(x_1) = x_1$ και $\varphi(x_i) = x_{i-1}$ για $i \geq 2$, προφανώς ορίζει έναν επιμορφισμό της ελεύθερης ομάδας (δεν ξεχνάμε τον ορισμό των ελευθέρων ομάδων), οποίος προφανώς δεν είναι μονομορφισμός.

Στην περίπτωση όπου η ελεύθερη ομάδα είναι πεπερασμένα γεννώμενη δεν μπορούμε να έχουμε μια παρόμοια κατάσταση, διότι, αν έχουμε έναν επιμορφισμό φ , τότε η εικόνα του συνόλου γεννητόρων $\varphi(X)$ παράγει την ομάδα F , οπότε, αναγκαστικά, θα έχουμε $|\varphi(X)| \geq |X|$ (γιατί;;). Άρα τελικά αφού το X είναι πεπερασμένο, θα έχουμε $|\varphi(X)| = |X|$ και ο φ είναι αυτομορφισμός.

Το παράδειγμα αυτό είχε δημιουργήσει την εντύπωση ότι μόνο απείρως παραγόμενες non-Hopfian ομάδες υπάρχουν.

Όσπου ανακαλύψανε πεπερασμένα παραγόμενες non-Hopfian ομάδες και "έγινε πάταγος".

Παράδειγμα 0.1.20. Η ομάδα με παράσταση $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = a^3 \rangle$ δεν είναι Hopfian.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\vartheta : G \rightarrow G$ με $\vartheta(a) = a$ και $\vartheta(b) = b^2$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ϑ ορίζει έναν επιμορφισμό της G . Επειδή η G δεν είναι ελεύθερη ομάδα, το ότι η ϑ επεκτείνεται σε ομομορφισμό δεν έπεται αυτομάτως. Πρέπει και αρκεί να δούμε ότι "διατηρεί" τις σχέσεις (σε έναν ομομορφισμό ομάδων η εικόνα του ουδέτερου είναι το ουδέτερο της εικόνας). Πράγματι, $\vartheta(a^{-1}b^2a) = \vartheta(a^{-1}b^3) = a^{-1}b^3$. Η ϑ είναι επί, αφού οι γεννήτορες ανήκουν στην εικόνα ($\vartheta(a) = a$ και $\vartheta(a^{-1}bab^{-1}) = b$). Παρατηρούμε ότι $\vartheta([a^{-1}ba, b]) = [b^3, b^2] = 1$. Άρα το $[a^{-1}ba, b] \in \text{Ker}\vartheta$ και τέλος;;;

Όχι ακριβώς, το τελευταίο ερωτηματικό θέλει απάντηση, γιατί $[a^{-1}ba, b] \neq 1$; Αυτό δεν είναι προφανές, αλλά όχι ακατόρθωτο. Προσπαθήστε το!

Έκτοτε έχουν ανακαλυφθεί πολλές κατηγορίες ομάδων πεπερασμένα γεννωμένων non-Hopfian ομάδων και το πρόβλημα έχει αναχθεί σε κεντρικό πρόβλημα στην Θεωρία Ομάδων.

Οι "ρίζες" ξεκινούν από την Τοπολογία (ο Hopf ήταν επιφανής Τοπολόγος-Γεωμέτρης), όπου τίθεται το εξής πρόβλημα σε αδρές γραμμές: Έστω (X, \mathcal{T}) , ένας τοπολογικός χώρος. Αν υποθέσουμε ότι στον X έχουμε μια κλάση ισοδυναμίας \sim , στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας X/\sim επάγεται μια Τοπολογία πηλίκο \mathcal{T}/\sim .

Ερώτημα: Υπό ποιες συνθήκες οι τοπολογικοί χώροι (X, \mathcal{T}) και $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ είναι ομοιομορφικοί;;;

Το πρόβλημα της Hopficity ομάδων σχετίζεται με το εξής γενικό πρόβλημα:

Έστω $\varphi : A \rightarrow B$, $\vartheta : B \rightarrow A$ επιμορφισμοί ομάδων. Είναι οι A , B ισόμορφες;

Έστω A ελεύθερη αβελιανή με αριθμησιμη διάσταση. Τότε προφανώς $A \times A \approx A$, επίσης, η προσθετική ομάδα των ρητών \mathbb{Q} είναι πηλίκο (επιμορφική εικόνα) της A , αφού κάθε

αβελιανή ομάδα είναι πηλίκο ελεύθερης αβελιανής. Θέτουμε $B = A \times \mathbb{Q}$. Επομένως έχουμε τους προφανείς επιμορφισμούς $\varphi : A \approx A \times A \rightarrow B = A \times \mathbb{Q}$, $\vartheta : B = A \times \mathbb{Q} \rightarrow A$. Αλλά προφανώς (;) $A \not\approx A \times \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 0.1.21. Κάθε πεπερασμένα γεννώμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα G είναι Hopfian.

Απόδειξη. Έστω $\vartheta : G \rightarrow G$ ένας επιμορφισμός με $\text{Ker}\vartheta = K$. Τότε οι ομάδες G και G/K είναι ισόμορφες. Επομένως έχουν τα ίδια "χαρακτηριστικά". Έστω N μια υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη ($|G, N| = n$). Επειδή η G είναι πεπερασμένα γεννώμενη, υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος υποομάδες με τον συγκεκριμένο δείκτη (ένα επιχείρημα, το οποίο το έχουμε δει - και θα το βλέπουμε - πολλές φορές). Οι G και G/K είναι ισόμορφες, συνεπώς όσες υποομάδες πεπερασμένου δείκτη n έχει η μία, τόσες υποομάδες του ίδιου δείκτη έχει και η άλλη. Αν πάρουμε την πλήρη αντίστροφη εικόνα $\vartheta^{-1}(N)$ προφανώς αυτή είναι δεικτού n και περιέχει τον πυρήνα K , άρα είναι μια από τις πεπερασμένες το πλήθος υποομάδες της G με δείκτη n .

Αυτό το επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Δηλαδή η K περιέχεται σε κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G , άρα και στην τομή τους. Η G όμως έχει υποτεθεί rf , δηλαδή η τομή όλων των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη είναι τετριμμένη. Συνεπώς η K είναι τετριμμένη και τέλος. \square

Παρατηρήσεις 0.1.22. 1. Η υπόθεση η ομάδα G είναι πεπερασμένα γεννώμενη είναι κρίσιμη, διότι, όπως έχουμε ήδη δει, μια απείρως γεννώμενη ελεύθερη ομάδα είναι rf , δεν είναι όμως Hopfian.

2. Υπάρχουν παραδείγματα πεπερασμένα γεννώμενων ομάδων, οι οποίες είναι Hopfian, αλλά δεν είναι rf , συνεπώς στην προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει το αντίστροφο.

Πληροφοριακά, ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ομάδα με παράσταση $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^4 \rangle$. Αυτή η ομάδα είναι Hopfian, αλλά δεν είναι rf .

0.1.2 Το γράφημα μιας ομάδας.

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι έχουμε την κυκλική ομάδα $C_{12} = \{1, a, a^2, \dots, a^{11}\}$ τάξης 12. Τοποθετούμε τα στοιχεία της στο επίπεδο και πέρνουμε το στοιχείο a και ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε ένα στοιχείο της ομάδας αυτής με το στοιχείο a "μεταβαίνουμε" σε ένα άλλο στοιχείο της. Την μετάβαση αυτή την σημειώνουμε με ένα "βέλος", όπου η αρχή του είναι το στοιχείο "αναχώρησης" και το τέλος το σημείο "άφιξης", π.χ. έχουμε την αρχή a^i και το τέλος aa^i . Αυτό το κάνουμε για όλα τα στοιχεία της ομάδας. Τι παρατηρούμε; Σχηματίστηκε ένα γράφημα (στην προκειμένη περίπτωση ένα πολύγωνο), όπου οι κορυφές του είναι τα στοιχεία της ομάδας και οι πλευρές του τα ζεύγη των στοιχείων της μορφής (a^i, aa^i) .

Πριν προχωρήσουμε σε ορισμούς και σχετικές παρατηρήσεις/ιδιότητες, ας κάνουμε ένα άλλο παράδειγμα πέρνοντας την ίδια κυκλική ομάδα τάξης 12, αλλά τώρα να πάρουμε το στοιχείο a^2 και να κάνουμε την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως. Τώρα θα σχηματιστεί ένα άλλο γράφημα με κορυφές πάλι τα στοιχεία της ομάδας, αλλά με πλευρές τα ζεύγη της μορφής (a^i, a^2a^i) .

Ας κάνουμε ακόμη ένα παράδειγμα πέρνοντας πάλι την ίδια κυκλική ομάδα τάξης 12, αλλά τώρα πέρνουμε ένα υποσύνολό της $S \{s_1 = a^3, s_2 = a^4\}$ και σχηματίζουμε ένα άλλο γράφημα με κορυφές πάλι τα στοιχεία της ομάδας, αλλά με πλευρές όλα τα ζεύγη της μορφής (a^i, s_1a^i) και της μορφής (a^i, s_2a^i) .

Θα επανέλθουμε στα παραδείγματα, αλλά ας δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 0.1.23. Έστω G μια ομάδα και S ένα υποσύνολό της. Σχηματίζουμε το εξής γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$. Το σύνολο των κορυφών του $V(\mathcal{G})$ αποτελείται από τα στοιχεία της ομάδας G . Το σύνολο των ακμών $E(\mathcal{G})$ αποτελείται από ζεύγη της μορφής (g, sg) , για κάθε $g \in G$ και $s \in S$.

Το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ θα ονομάζεται το **γράφημα Cayley** της ομάδας G ως προς το υποσύνολο S .

Από τον τρόπο ορισμού του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley της ομάδας G (το βλέπουμε άλλωστε και στα παραδείγματα), η δομή του γραφήματος εξαρτάται, εκτός από την ομάδα G και από την επιλογή του υποσυνόλου S .

Θεώρημα 0.1.24. Έστω G μια ομάδα και $\mathcal{G}(G, S)$ το γράφημα Cayley ως προς το υποσύνολο S .

1. Το γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S παράγει την ομάδα G .
2. Το γράφημα περιέχει θηλειές (loops) αν και μόνο αν $1_G \in S$.
3. Το γράφημα περιέχει μονοπάτια μήκους 2 αν και μόνο αν $S \cap S^{-1} \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια ωραία άσκηση. Το συμπέρασμα πολύ σημαντικό. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει τις πρώτες πληροφορίες για την δομή της G .

Θα δούμε πως μπορούμε να αντλήσουμε επιπλέον πληροφορίες για την δομή της ομάδας G μέσω ενός γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$ Cayley.

Ως γνωστόν η ομάδα G δρά (από τα δεξιά) επί του εαυτού της μέσω της πράξης της $((x, g) \rightarrow xg)$, επομένως δρα επί του συνόλου κορυφών του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$. Ας πάρουμε τώρα μια ακμή του γραφήματος, δηλαδή ένα ζεύγος (x, sx) με $x \in G$ και $s \in S$, τότε παρατηρούμε ότι, αν το τυχαίο $g \in G$ δράσει στα δύο άκρα της ακμής, θα προκύψει μια άλλη ακμή, το ζεύγος (xg, sxg) . Συνεπώς βλέπουμε ότι δράση της G στις κορυφές "διατηρεί την γειτονία", δηλαδή διατηρεί την δομή του γραφήματος. Συνεπώς έχουμε μια δράση της ομάδας G επί του γραφήματος $\mathcal{G}(G, S)$.

Η "πρόκληση" είναι: Μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την δομή της G μέσω αυτής της δράσης;

Στην αρχή είχαμε δει ότι κάθε δράση μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow S_X$. Μετά είχαμε δει ότι η δράση της G επί μιας άλλης (αλγεβρικής) δομής R ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(R)$. Εν προκειμένω η δομή που έχουμε είναι το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ επομένως η δράση της G επί του $\mathcal{G}(G, S)$ ορίζει και ορίζεται μονοσήμαντα από έναν ομομορφισμό $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}(G, S))$.