0.1 Ελεύθερες ομάδες.

0.1.1 Ορισμός-Καθολική Ιδιότητα.

Ορισμός 0.1.1. *Έστω X ένα (μη κενό) σύνολο αναζητούμε μια ομάδα, έστω F, και μια απεικόνιση $\sigma : X \longrightarrow F$ με την εξής ιδιότητα:*

Για **κάθε** *ομάδα G και* **κάθε** *απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : F \longrightarrow G$ ώστε $\beta \circ \sigma = \alpha$.*

Την ομάδα F και την απεικόνιση σ, αν υπάρχουν, θα την ονομάζουμε **ελεύθερη** *επί του X, μέσω της απεικόνισης σ.*

Πριν αποδείξουμε ότι πράγματι υπάρχει τέτοια ομάδα, θα δούμε μερικές *συνέπειες* του ορισμού.

Η απεικόνιση σ είναι 1-1. Πράγματι, αν το X είναι μονοσύνολο, η σ είναι 1-1. Έστω x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του X. Επιλέγουμε μια ομάδα G με τουλάχιστον δύο διαφορετικά τοιχεία g_1, g_2 και μια απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ με $\alpha(x_1) = g_1$ και $\alpha(x_2) = g_2$, τότε, επειδή υπάρχει ο ομομορφισμός $\beta : F \longrightarrow G$ με $\beta \circ \sigma = \alpha$, έχουμε $(\beta \circ \sigma)(x_1) = \alpha(x_1) = g_1$ και $(\beta \circ \sigma)(x_2) = \alpha(x_2) = g_2$. Τα g_1, g_2 έχουν υποτεθεί διαφορετικά, η β είναι απεικόνιση, άρα, αναγκαστικά, $\sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$.

Επομένως θα μπορούσαμε να *ταυτήσουμε* το σύνολο X με την εικόνα του $\sigma(X) \subset F$.

Όπως *διαισθανόμαστε* το σύνολο X (και η 1-1 απεικόνιση σ) καθορίζουν την ελεύθερη ομάδα F.

Πρόταση 0.1.2. *Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των ισοπληθικών συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα ($\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$). Οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια 1-1 και επί απεικόνιση $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$.

Από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας F_1 και τον *ρόλο* της τυχαίας ομάδας να τον έχει η ομάδα F_2 έχουμε $\beta_1\sigma_1 = \sigma_2\alpha$.

Τώρα, αντιστρέφοντας τους ρόλους, έχουμε $\beta_2\sigma_2 = \sigma_1\alpha^{-1}$.

Οπότε, συνθέτοντας από αριστερά, στην πρώτη ισότητα, με τον ομομορφισμό β_2 και χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση έχουμε

$\beta_2\beta_1\sigma_1 = \beta_2\sigma_2\alpha = \sigma_1\alpha^{-1}\alpha = \sigma_1$.

Αλλά έχουμε και την προφανή σχέση $1_{F_1}\sigma_1 = \sigma_1$. Αλλά οι ομομορφισμοί β_1, β_2, από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας, είναι μοναδικοί. Δηλαδή, $\beta_2\beta_1 = 1_{F_1}$.

Δυϊκά $\beta_1\beta_2 = 1_{F_2}$ και τέλος.

□

Παρατήρηση 0.1.3. *Για να είναι το όλο ”οικοδόμημα” στέρεο πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.*

Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα . Αν οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες, τότε τα σύνολα X_1 και X_2 είναι ισοπλήθικά ($\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$).

Θα αναβάλουμε προς το παρόν την απόδειξη, διότι μας λείπει ”κάτι”.

Πρόταση 0.1.4. *Έστω G μια ομάδα παραγόμενη από ένα (υπο)σύνολό της Y και F μια ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X. Αν $\alpha : X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση επί, τότε ο (μοναδικός) ομομορφισμός $\beta : F \longrightarrow G$, ο οποίος επεκτείνει την απεικόνιση α είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Προφανής αφού η α είναι επί του συνόλου Y, το οποίο παράγει την G.

□

Η προηγούμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική στην όλη *θεώρηση* της Θεωρίας Ομάδων και συνοψίζεται στο εξής:

Κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε μια ομάδα G, τότε αυτή (μπορεί να) έχει πολλά σύνολα γεννητόρων και για κάθενα από αυτά, έστω ένα Y, υπάρχουν άπειρα σύνολα X και απεικονίσεις $\alpha : X \longrightarrow Y$, οι οποίες να είναι επί. Άρα υπάρχουν άπειρες το πλήθος ελεύθερες ομάδες, των οποιών η G είναι πηλίκο. Παρ' όλα ταύτα το προηγουμένο αποτέλεσμα **δεν** χάνει την σημασία του.

Πρόταση 0.1.5. *Έστω F μια ελεύθερη ομάδα και $\alpha : F \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε για έναν επιμορφισμό ομάδων $\beta : G \longrightarrow H$ υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : F \longrightarrow G$, ώστε $\beta\gamma = \alpha$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η F είναι ελεύθερη επί του συνόλου X, τότε για κάθε $x \in X \subset F$ έχουμε $\alpha(x) \in H = Im\,\beta$ (δεν ξεχνάμε η β έχει υποτεθεί επί). Επομένως υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $g_x \in G$ με $\beta(g_x) = \alpha(x)$. Η F είναι ελεύθερη, άρα η απεικονιση $x \longrightarrow g_x$ επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό $\gamma : F \longrightarrow G$, ο οποίος πληροί την σχέση $\beta\gamma = \alpha$ (γιατί;;), δεν ξεχνάμε ότι το X παράγει την F.

□

Κατασκευή των ελευθέρων Ομάδων.

Έστω ένα συνολο X και $X^{-1}\{x^{-1} \mid x \in X\}$, τα τυπικά αντιστροφα των στοιχείων του X. .....κατασκευάζουμε τις λέξεις.... η κενή λέξη ℓ.....ορίζουμε την παράθεση λέξεων... το σύνολο S όλων των λέξεων γίνεται ημιομάδα με πράξη την παράθεση λέξεων. .....

Ορίσαμε στο σύνολο S δύο "αντιστρεπτές" διαδικασίες, σε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ παρεμβάλουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ (όλα τα $e's$ είναι $\pm$), η διαγράφουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$.....

Οι διαδικασίες αυτές ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο S ....Το σύνολο πηλίκων $S/\sim$ αποκτά την δομή ομάδας ορίζοντας ως πράξη $[w]\cdot[u] =: [wu]$.... Το ενδιαφέρον εδώ είναι να δείξουμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων).....

Την ομάδα $(S/\sim, \cdot)$ την συμβολλίζουμε με F και είναι η ζητούμενη ελεύθερη ομάδα επί του X με την απεικόνιση $\sigma : X \longrightarrow F$ να είναι η προφανής $x \longrightarrow [x]$.

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η εικόνα $\sigma(X)$ προφανώς παράγει την F.

Έστω τώρα μια απεικόνιση $\alpha : X \longrightarrow G$ σε μια ομάδα G με $\alpha(x_i) = g_i$. Πρέπει να ορίσουμε έναν ομομορφισμό $\beta : F \longrightarrow G$, οποίος να επεκτείνει την α $(\beta\sigma = \alpha)$.

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι κάθε απεικόνιση $\bar{\beta} : S \longrightarrow G$, η οποία απεικονίζει κάθε λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ στο στοιχείο $\bar{\beta}(w) = g_1^{e_1} \cdots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots g_n^{e_n}$ ορίζει έναν ομομορφισμό ομάδων $\beta : F \longrightarrow G$ (γιατί;;;). Μα αφού τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ απεικονίζονται σε ένα $g^e g^{-e} = 1_G$, έχουμε ότι αν $w \sim u$ (δηλαδή $[w] = [u]$), τότε $\beta([w]) = \beta([u])$, όπου ως $\beta([w]) = g_1^{e_1} \cdots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots g_n^{e_n}$. Τώρα προφανώς $\beta\sigma = \alpha$ και τέλος;;;;

Όχι δεν τελειώσαμε πρέπει να δείξουμε ότι ο β είναι μοναδικός με αυτή την ιδιότητα.

Πράγματι αν $\gamma : F \longrightarrow G$ είναι ένα άλλος ομομορφισμός με $\gamma\sigma = \alpha$, τότε οι β και γ "συμφωνούν" στα στοιχεία του συνόλου $\sigma(X)$, μα αυτό το σύνολο παράγει την F, άρα τελικά $\beta = \gamma$.

Ανηγμένες λέξεις.

Μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$ στο σύνολο S θα ονομάζεται **ανηγμένη** αν δεν περιέχει τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$.

Προφανώς, αν έχουμε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots x_n^{e_n}$, κάνοντας διαδοχικές διαγραφές τμημάτων της μορφής $x^e x^{-e}$ σε πεπερασμένα βήματα φθάνουμε σε μια ανηγμένη λέξη ισοδύναμη με την αρχική. Το πρόβλημα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο ισοδύναμες λέξεις κάνοντας διαδοχικές διαγραφές, σε κάθε μία λέξη ξεχωριστά, οι ισοδύναμες ανηγμένες λέξεις, στις οποίες φθάνουμε είναι ίσες;

Έστω ότι έχουμε αρχικά τις ισοδύναμες λέξεις w και u με αντίστοιχες ανηγμένες τις $\bar{w}$ και $\bar{u}$. Προφανώς $[w] = [\bar{w}] = [u] = [\bar{u}]$, οπότε $[w][u]^{-1} = [wu^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Αυτό δίνει $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Επομένως, αν $\bar{w} = a_1^{e_1} \cdots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots a_n^{e_n}$ και $\bar{u} = b_1^{k_1} \cdots b_i^{k_i} b_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots b_m^{k_m}$, τότε από την σχέση $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$ έπεται ότι αναγωγές έχουμε **μόνο** στο τμήμα $\cdots a_n^{e_n} b_m^{-k_m} \cdots$, δηλαδή $a_n^{e_n} = b_m^{k_m}$, Οπότε προχωράμε και τελικά (αναγκαστικά) $n = m$ και $a_i^{e_i} = b_i^{k_i}$.

Δηλαδή αποδείξαμε την εξής σημαντική πρόταση.

Πρόταση 0.1.6. *Έστω F ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X. Σε κάθε στοιχείο της $[w]$ αντιστοιχεί μοναδική ανηγμένη λέξη $\bar{w}$, οπότε μπορούμε, άνευ άλλης μνείας, να ταυτήσουμε τα στοιχεία (κλάσεις ισοδυναμίας) της ελεύθερης ομάδας με τις (αντίστοιχες) ανηγμένες λέξεις του συνόλου S. Όπου φυσικά η πράξη της ομάδος είναι πλέον η $\bar{w}\bar{u} = \overline{wu}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει προηγηθεί.

□

Ως (ανηγμένο) μήκος πλέον της ανηγμένης λέξης $\bar{w} = a_1^{e_1} \cdots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \cdots a_n^{e_n}$ ορίζουμε το n και είναι μια καλά ορισμένη έννοια.

Παραδείγματα Ελευθέρων ομάδων.

Πρώτο Παράδειγμα.

Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις απεικονίσεις $\alpha(z) = z+2$ και $\beta(z) = \frac{z}{2z+1}$, $z \neq -1/2$ και $\beta(-1/2) = 1/2$. Οι α και β παράγουν μια ελεύθερη ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.

Ας δούμε το θέμα "διαισθητικά", χωρίς καμία έκπτωση στην αυστηρότητα.

Πρώτα απ' όλα οι απεικονίσεις α και β είναι 1-1 και επί, άρα έχει νόημα να μιλήσουμε για ομάδα παραγόμενη από αυτές τις απεικονίσεις. (Να κάνετε τον έλεγχο!!)

Εδώ το κρίσιμο σημείο είναι ότι, αν παρατηρήσουμε, θα δούμε ότι οι δυνάμεις της α απεικονίζουν εσωτερικά σημεία του μονδιαίου κύκλου εκτός αυτού, ενώ δύναμεις της β απεικονίζουν εξωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικού του (εκτός του μηδενός). Επομένως **καμία** ανηγμένη λέξη της μορφής $\alpha^{k_1}\beta^{\lambda_1} \cdots \alpha^{k_n}\beta^{\lambda_n}$ δεν μας δίνει την ταυτοτική μετάθεση.

Μπορείτε και πρέπει να κάνετε τον έλεγχο αυτού του ισχυρισμού. Το μόνο που πρέπει να λάβετε υπ' όψη και να εξαντλήσετε όλες τις περιπτώσεις είναι ότι ένα από τα (ή και τα δύο) k_1 και λ_n ενδέχεται να είναι ίσον με μηδέν.

Δεύτερο Παράδειγμα.

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Η ομάδα η παραγόμενη από τους δύο αυτούς πίνακες με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι ελεύθερη επί του συνόλου $\{A, B\}$.

Εδώ έχουμε το ίδο πρόβλημα να αποδείξουμε οτι καμία ανηγμένη "λέξη" της μορφής $\mathrm{A}^{k_1}\mathrm{B}^{\lambda_1} \cdots \mathrm{A}^{k_n}\mathrm{B}^{\lambda_n}$ δεν μας δίνει τον ταυτοτικό πινακα.

Αν προσπαθήσουμε στοιχειωδώς θα δούμε ότι (χωρίς να είναι ακατόρθωτο) θα δυσκολευθουμε αρκετά.

Ας γυρίσουμε πίσω και ας κάνουμε την εξής παρατήρηση. Σε κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ αντιστοιχούμε την συνάρτηση $\ell_K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\ell_K(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. (Οι γνωστοί; *Moëbius* μετασχηματισμοί).

Τώρα η απεικόνιση μεταξύ των ομάδων $\langle \alpha, \beta \rangle$ του προηγουμένου παραδείγματος και της ομάδος $\langle A, B \rangle$ με $\alpha \longrightarrow A$ και $\beta \longrightarrow B$ ορίζει έναν ισομορφισμό ομάδων (γιατί ;;;) ...και τέλος.

Παραστάσεις Ομάδων.

Είχαμε δεί την σημαντική πρόταση (??) ότι κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας. Δηλαδή για κάθε ομάδα G υπάρχει μια ελεύθερη ομάδα F και ένας επιμορφισμός $\vartheta : F \longrightarrow G$ με $F/Ker\vartheta \simeq G$. Αν η ελεύθερη ομάδα F είναι ελεύθερη επί του συνόλου X, τότε η εικόνα $\vartheta(X)Y$ αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας G για κάθε $r \in Ker\vartheta$ έχουμε $\vartheta(r) = 1 \in G$. Το ζεύγος (F, ϑ) *καθορίζει* την ομάδα G, θα ονομάζεται μια **παράσταση** της G και θα συμβολίζεται $G = \langle Y \mid R \rangle$, όπου $Y = \vartheta(X)$ και $R = Ker\vartheta$.

Πριν προχωρήσουμε σε ό,τιδήποτε άλλο πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι υπάρχουν πολλές παραστάσεις μιας ομάδας, αρκεί δούμε την Πρόταση ??.

Ο πυρήνας $Ker\vartheta$ είναι κανονική υποομάδα της ελεύθερης ομάδας F επομένως, αν S είναι ένα υποσύνολο της F, το οποίο παράγει τον $Ker\vartheta$ ως κανονική υποομάδα. Δηλαδή $Ker\vartheta = \cap\{ N \mid N \lhd F \text{ με } S \subset N \}$, τότε τα στοιχεία του S είναι αρκετά να *παραστήσουν* την G γι' αυτό συνήθως συμβολίζουμε $G = \langle Y \mid s = 1,\ s \in S \rangle$.

Σχέσεις ....και ορίζουσες σχέσεις.

....Ομάδες πεπερασμένα γεννώμενες.....πεπερασμένα παριστώμενες .....

Το σημαντικό της όλης μελέτης των ομάδων είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω Y ένα τυχαίο (μη κενό) σύνολο και S ένα σύνολο λέξεων ως προς το ''αλφάβητο'' Y. Αν τώρα πάρουμε την ελεύθερη ομάδα επί του Y και R την κανονική υποομάδα της της την παραγόμενη (κανονικά) από το S, τότε το πηλίκο F/R ορίζει μια ομάδα. Αυτή την ομάδα θα την αποκαλούμε ομάδα που ορίζεται από την παράσταση $\langle Y \mid S \rangle$.

Επομένως θα μπορούσαμε να πάμε αντιστροφα και να δούμε τις ελεύθερες ομάδες ως μια πολλή ειδική παράστασης ομάδας, όπου το σύνολο των οριζουσών σχέσεων είναι το κενό σύνολο.

Προς το παρόν δεν θα επεκταθούμε περισσότερο επ' αυτού.

bf Μερικά Παραδείγματα.

1. Η άπειρη κυκλική ομάδα έχει παράσταση $C = \langle a \rangle$

Η πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n έχει παράσταση $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ και είναι πηλίκο της ελεύθερης ομάδας διάστασης 1 (της άπειρης κυκλικής), όπου ο επιμορφισμός $\vartheta : C = \langle a \rangle \longrightarrow C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ έχει ως πυρήνα την υποομάδα $\langle a^n \rangle$.

2. Ας δούμε την διεδρική ομάδα D_{2n}, η οποία είναι το ημιεθύ γινόμενο της κυκλικής ομάδας $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ δια της κυκλικής ομάδος $C_2 = \langle b \mid b^2 \rangle$ ο αυτομορφισμός που ορίζει το ημιευθύ γινόμενο είναι ο φ με $\varphi(a) = a^{-1}$. Οπότε έχουμε την παράσταση της $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab^{-1}b^{-1} \rangle$.

Αν θέλουμε να την δούμε ως πηλίκο ελεύθερης ομάδας δεν έχουμε παρά να πάρουμε την ελεύθερη ομάδα σε δύο γενήτορες $F = \langle x, y \rangle$ και τον επιμορφισμό ϑ με $\vartheta(x) = a$ και $\vartheta(y) = b$, οπότε βλέπουμε (δεν είναι και τόσο εύκολο) ότι $Ker\vartheta = \langle x^n, y^2, (xy)^2 \rangle^F$.

3. Θα μπορούσατε να δείτε ότι μια παράσταση της άπειρης διεδρικής είναι η εξής

$D_\infty = \langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle$.

Όπως συνειδητοποιούμε σιγά-σιγά μια ομάδα μπορεί να έχει πολλές παραστάσεις. Το κέραιο ερώτημα στην Θεωρία Ομάδων, αλλά και γενικότερα στα Μαθηματικά είναι: Πώς ''μεταβαίνουμε'' από την παράσταση μιας ομάδας σε μια άλλη παράσταση της;

Ως πρώτο βήμα μπορούμε να αποδείξουμε το εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 0.1.7. *Έστω G, H δύο ομάδες και $\vartheta : F \longrightarrow G$, $\varphi : F \longrightarrow H$ δύο παραστάσεις τους . Αν κάθε σχέση της G είναι και σχέση της H, τότε η H είναι επιμορφική (πηλίκο) ομάδας G.*

Απόδειξη. Το ότι κάθε σχέση της G είναι και σχέση της H σημαίνει ότι $Ker\vartheta \subset Ker\varphi$. Επομένως, $H \sim F/Ker\varphi \sim (F/Ker\vartheta)/(Ker\varphi/Ker\vartheta)$, άρα πηλίκο της G.

□

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα.

4 Έστω $G = \langle a, b, c \mid a^2, aba, b^2c^2 = cb, a^3c = c^3a^4 \rangle$ μια παράσταση ομάδας. Ας προσπαθήσουμε να "αναγνωρίσουμε" την ομάδα αυτή.

Η ομάδα αυτή αποτελεί επιμορφική εικόνα της ελεύθερης ομάδας σε τρεις γεννήτορες $F = \langle x, y, z \rangle$ με τον προφανή επιμορφισμό, που ορίζεται από την απεικόνιση $\vartheta(x) = a$, $\vartheta(y) = b$, $\vartheta(z) = c$. Τι σημαίνει έχω αυτές τις ορίζουσες σχέσεις; Το ότι $a^2 = 1 \in G$ είναι ισοδύναμο με το $x^2 \in Ker\vartheta$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες σχέσεις. Οπότε, από την δεύτερη σχέση έχουμε ότι $y \in Ker\vartheta$ (δεν ξεχνούμε ότι ο πυρήνας ομομορφισμού είναι κανονική υποομάδα). Από την τρίτη σχέση έχουμε ότι $y^{-1}z^{-1}y^2z^2 \in Ker\vartheta$, δηλαδή $z \in Ker\vartheta$. Τέλος από την τελευταία σχέση έπεται ότι $x \in Ker\vartheta$. Δηλαδή και οι τρείς γςννήτορες της ελεύθερης ομάδας F βρίσκονται στον $Ker\vartheta$. Συνεπώς το πηλίκο $F/Ker\vartheta \sim G$ είναι η τετριμμένη ομάδα.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η παράσταση μιας ομάδας "περιέχει" όλες τις πληροφορίες για την ομάδα, το μόνο που μένει είναι να τις "αποκωδικοποιήσουμε", κάτι που δεν είναι καθόλου εύκολο στην γενικότητά του.

Επίσης, όπως έχουμε επισημάνει μια ομάδα έχει πολλές παραστάσεις. Οπότε, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην Θεωρία Ομάδων, το οποίο διέπει όλα τα Μαθηματικά είναι το εξής:

Έστω $G_1 = \langle X \mid R \rangle$, $G_2 = \langle Y \mid S \rangle$ δύο παραστάσεις ομάδων, μπορούμε να αποφανθούμε αν οι δύο αυτές ομάδες είναι ισόμορφες;

Αυτό είναι το γνωστό πρόβλημα του **ισομορφισμού**.

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα στην Θεωρία Ομάδων, το οποίο επίσης διέπει όλα τα Μαθηματικά είναι το εξής:

Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ μια παράσταση ομάδας, επίλεγουμε ένα $g \in G$ μπορούμε να αποφανθούμε αν το στοιχείο αυτό είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας;

Πιό συγκεκριμένα. Ένα στοιχείο της ομάδας είναι μια λέξη $g = g(x_i)$ ως προς τους γεννήτορες $x_i \in X$. Μπορούμε να αποφανθούμε αν το στοιχείο αυτό μπορεί να γραφεί ως γινόμενο συζυγών στοιχείων (και αντιστρόφων) από το σύνολο των οριζουσών σχέσεων R;

Αυτό είναι το γνωστό πρόβλημα της **λέξης**.

Προφανώς αυτά τα δύο προβλήματα έχουν λύση στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα/πρόβλημα.

5 Ως γνωστόν (;;;) η ομάδα μεταθέσεων S_n παράγεται από τους κύκλους $a = (1\,2)$ και $b = (1\,2 \cdots n)$. Δηλαδή έχουμε μια παράσταση $S_n \langle a, b \mid ??? \rangle$. Αναζητούμε τις ορίζουσες σχέσεις στην θέση των ερωτηματικών.

Στην γενική περίπτωση δεν και τόσο εύκολο να απαντήσουμε. Προσπαθήστε στην περίπτωση των S_3 και S_4.

6 Αν πάρουμε το ευθύ γινόμενο δύο απείρων κυκλικών ομάδων $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε μια παράσταση αυτής της ομάδας είναι (;;) η $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Αντίστροφα, αν πάρουμε την παράσταση $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$, τότε μπορούμε (;;) να αποφανθούμε ότι αυτή η παράσταση ορίζει μια ομάδα ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ενώ όλα αυτά φαντάζουν προφανή, στην αρχή χρειάζονται μεγάλη προσοχή, γι' αυτό προσπαθήστε να απαντήσετε στα ερωτηματικά αυτά.

Θεώρημα 0.1.8. *Έστω $G = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \mid s_1, s_2, \dots, s_t \rangle$ μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα. Υπόθέτουμε ότι η G παράγεται και από ένα άλλο σύνολο X (όχι κατ' ανάγκη πεπερασμένο). Τότε υπάρχει μία πεπερασμένη παράσταση της $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_\ell \rangle$.*

Απόδειξη. Αφού η G είναι πεπερασμένα γεννώμενη, αν το X είναι άπειρο, μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολό του $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, το οποίο να παράγει την G. Τώρα έχουμε δύο πεπερασμένα σύνολα που παράγουν την G. Εκφράζουμε κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ως μια λέξη ως προς το άλλο σύνολο. Έτσι έχουμε $x_j = v_j(y)$ και $y_i = w_i(x)$. Επίσης έχουμε τις σχέσεις $s_k(w_i(x)) = 1$ και (ξανά) εκφράζοντας τα $x_j = v_j(w_i(x))$.

Επομένως αν πάρουμε την ομάδα $\bar{G} = \langle \bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_n} \mid s_k(w_i(\bar{x}) = 1, \bar{x_j} = v_j(w_i(\bar{x}))\rangle$. Έχουμε, από το προηγούμενο θεώρημα ότι υπάρχει επιμορφισμός από την $\bar{G}$ στην G, ο οποίος επάγεται από την απεικονιση $\bar{x_j} \longrightarrow x_j$.

Τώρα από τις $y_i = w_i(x)$, αν θέσουμε $\bar{y_i} = w_i(\bar{x})$, έχουμε ότι .

στην $\bar{G} = \langle \bar{y_1}, \bar{y_2}, ..., \bar{y_m} \mid s_1(\bar{y}), s_2(\bar{y}), ..., s_t(\bar{y}), - - - - - -\rangle$.

Άρα πάλι από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει επιμορφισμός G στην $\bar{G}$, ο οποίος επάγεται από την απεικονιση $y_i \longrightarrow \bar{y_i}$.

Προφανώς (;;) οι δύο αυτοί επιμορφισμοί ο ένας αντιστέφει τον άλλον και τέλος.

□

Ας τελειώσουμε με δύο Θεωρήματα.

Θεώρημα 0.1.9. *Έστω N κανονική υποομάδα μιας ομάδας G, υποθέτουμε ότι οι N και G/N είναι πεπερασμένα παριστώμενες, τότε η G είναι πεπερασμένα παριστώμενη.*

Θεώρημα 0.1.10. *Έστω G ομάδα πεπερασμένα γενόμενη και N υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη, τότε η N είναι πεπερασμένα γενόμενη.*