Ασκήσεις Γ

1. (*Η τόσο απλή αυτή Άσκηση/Λήμμα, θα σας είναι χρήσιμη σε πάρα πολλά σημεία της μελέτης σας.*

   Έστω A, B, C υποομάδες μια ομάδας G με $B \leq A$. Δείξτε ότι $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.

   (Προσοχή! Τα $A \cap (BC)$ και $B(A \cap C)$ ενδέχεται να μην είναι υποομάδες της G

2. Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι το ευθύ γινόμενο των υποομάδων της H και K ($G = H \times K$). Αν $H \leq L \leq G$. Δείξτε ότι $L = H \times (L \cap K)$. Επιπλέον δείξτε ότι $L \lhd G$ αν και μόνο αν $L \cap K \lhd K$.

3. Αν οι H, K είναι κανονικές υποομάδες της ομάδας G με $G = HK$. Δείξτε ότι $G/(H \cap K) = H/(H \cap K) \times K/(H \cap K) \simeq G/H \times G/K$.

4. Έστω L, K κανονικές υποομάδες της ομάδας G με K $\leq L$. Δείξτε ότι:

   Αν η G διασπάται επί της L, τότε η G/K διασπάται επί της L/K.

   Αν η G διασπάται επί της K και H είναι ένα συμπλήρωμά της, τότε η G διασπάται επί της L αν και μόνο η H διασπάται επί της $H \cap L$.

5. Έστω L, K κανονικές υποομάδες της ομάδας G με K $\cap L = 1$. Δείξτε ότι:

   Αν η G/L διασπάται επί της KL/L, τότε η G διασπάται επί της K.

6. Έστω K κανονική υποομάδα της ομάδας G με $Z(K) = 1$. Δείξτε ότι:

   Η G διασπάται επί της K αν και μόνο αν η $Aut(K)$ διασπάται επί της $Inn(K)$.

7. Έστω $K \lhd G$ (G πεπερασμένη). Υποθέτουμε ότι η G/K είναι p-ομάδα και P μια p-Sylow υποομάδα της G. Δείξτε ότι η G διασπάται επί της K αν και μόνο αν η P διασπάται επί της $P \cap K$.

8. Έστω G ομάδα και Η υποομάδα της G. Δείξτε ότι η H αποτελεί συμπλήρωμα ως προς μια κανονική υποομάδα K της G ($G = K \rtimes H$), αν και μόνο αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\vartheta : G \longrightarrow H$, ώστε ο περιορισμός του επί της Η να είναι η ταυτοτική απεικόνιση, αν και μόνο αν, για κάθε ομάδα M και κάθε ομομορφισμό ομάδων $\varphi : H \longrightarrow M$, ο φ επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό ομάδων $\bar{\varphi} : G \longrightarrow M$.

   Έστω $K \lhd G$ και φ ο φυσικός επιμορφισμος από την G στην G/K. δείξτε ότι η G διασπάται επί της K (με ένα συμπλήρωμα, έστω Η) αν και μόνο αν υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων $\vartheta : G/K \longrightarrow G$. Έτσι ώστε η σύνθεση $\varphi \circ \vartheta$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση της G/K.

   Σε όλες τις προηγούμενες, ισοδύναμες, περιπτώσεις η υποομάδα H της G ονομάζεται **retract**, **ανάκληση/αναίρεση** *(έχετε να προτείνετε κάτι πιό δόκιμο;)*

9. Δείξτε ότι η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ των ρητών αριθμών δεν έχει υποομάδα H, ώστε το πηλίκο Q/H να είναι άπειρη κυκλική.

10. Μια ομάδα K θα ονομάζεται **πλήρης** αν $Z(K) = 1$ και $Aut(K) = Inn(K)$.

    Έστω $K \lhd G$ και K πλήρης, Δείξτε ότι $G = C_G(K) \times K$.

    Δείξτε ότι η S_3 είναι πλήρης.

    Έστω p περιττός πρώτος. Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_{2p} είναι πλήρης αν και μόνο αν $p = 3$.

    Δια περετέρω μελέτην: Δείξτε ότι S_n για $n \geq 3$, $n \neq 6$ είναι πλήρης, ενώ η S_6 δεν είναι πλήρης.

11. Έστω $p,\ q$ πρώτοι με $p > q$. Αν $p \not\equiv 1\, mod\, q$. Δείξτε ότι όλες οι ομάδες τάξης pq είναι ισόμορφες. Αν $p \equiv 1\, mod\, q$, τότε υπάρχουν μόνο δύο μη ισόμορφες ομάδες τάξης pq.

12. Δείξτε ότι υπάρχουν τέσσερεις μη ισόμορφες ομάδες τάξης 30.

    Να τις προσδιορίσετε.

13. Δείξτε ότι υπάρχουν πέντε μη ισόμορφες ομάδες τάξης 12.

    Να τις προσδιορίσετε.

14. Έστω G μια ομάδα με τάξη ίση με 77.

    $i)$ Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της $Aut(G)$ είναι αβελιανή, αλλά όχι κυκλική.

    Υπόδειξη: Εφαρμόστε τα Θεωρήματα Sylow, τόσο για την ομάδα G, όσο και για την ομάδα $Aut(G)$.

    $ii)$ Δείξτε ότι υπάρχουν δύο κυκλικές υποομάδες της $Aut(G)$ δείκτου 2.

15. Έστω K μια ομάδα και $\varrho : K \longrightarrow S_K$ η (γνωστή) αναπαράσταση της K. Έστω $K^* = Im\, \varrho$. Δείξτε ότι $Aut(K) \cap K^* = 1$ και $N_{S_K}(K^*) = Aut(K)K^*$